

金 属 物 理

下 册

冯 端 王业宁 丘第荣 编著

科学出版社

75.
647

金 属 物 理
下 册

冯 端 王业宁 丘第荣 编著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书为《金属物理》下册，主要论述有关金属与合金的相变和力学性质方面的问题。第四编“相变”讨论相变动力学与晶体学的基本规律，并具体地分析了气相与液相的凝固、马氏体相变、脱溶沉淀、奥氏体分解等相变过程。第五编“力学性质”全面地介绍有关金属与合金的内耗、范性形变、合金强化、断裂、回复、再结晶、蠕变等过程的基本规律，还重点地探讨了力学性质的微观机制。

本书于1965年写成，这次出版时又作了一些修改和补充。

本书可以作为高等院校有关专业和从事金属物理及物理冶金等方面的技术工作者的参考书。

金 属 物 理 (下册)

冯 端 王业宁 丘第荣 编著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1975年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1975年11月第一次印刷 印张：13 5/8

精装：0001—8,580 插页：精 2 平 1
印数：平装：0001—6,320 字数：348,000

统一书号：13031·336

本社书号：513·13—3

定 价： 精装本 2.05 元
平装本 1.60 元

目 录

第四篇 相 变

引言	415
第九章 相变动力学	416
I. 成核成长的基本原理	416
§ 9.1. 成分不变的成核——过饱和蒸气中液滴的形成	416
§ 9.2. 成分变化的成核	421
§ 9.3. 非均匀成核	425
§ 9.4. 新相的成长	428
II. 固体中的相变	431
§ 9.5. 相变应变	431
§ 9.6. 相变和相界	432
§ 9.7. 晶体缺陷对相变的影响	435
III. 相变的形式理论	437
§ 9.8. 成核率不随时间而变的相变速率	437
§ 9.9. 成核率随时间而变的相变速率	441
第十章 凝 固	442
I. 晶体从蒸气中的成长	442
§ 10.1. 完善晶体的成长	442
§ 10.2. 非完善晶体的成长	444
II. 液态金属的凝固	447
§ 10.3. 液态金属的凝固和第二类元素的分布	449
§ 10.4. 液态金属凝固的原子过程	458
§ 10.5. 从液态金属成长的晶体中的亚结构	461
§ 10.6. 铸锭	469
§ 10.7. 共晶合金的纤维组织	469
附录 10-I. 溶质分布公式的推导	470

第十一章 马氏体相变	472
I. 马氏体相变概况	472
§ 11.1. 马氏体	472
§ 11.2. 变温转变	475
§ 11.3. 等温转变	478
§ 11.4. 奥氏体的稳定化	480
II. 马氏体相变晶体学	486
§ 11.5. 相变机制	487
§ 11.6. 关于惯态面的取向	493
§ 11.7. 界面结构——弗兰克模型	494
§ 11.8. 相变的几何分析	495
III. 马氏体相变动力学	498
§ 11.9. 马氏体相变动力学的经典处理和核心问题	498
§ 11.10. 克纳普-德林格理论	503
附录 11-I. 马氏体相变中的晶体学关系	508
第十二章 扩散相变	511
I. 过饱和固溶体的沉淀	511
§ 12.1. 沉淀的一些基本过程	512
§ 12.2. 脱溶区的结构	517
§ 12.3. 过渡相的结构	522
§ 12.4. 回归	528
§ 12.5. 晶体缺陷对沉淀的作用	530
§ 12.6. 不连续沉淀	536
II. 奥氏体的分解	538
§ 12.7. 珠光体的形成	538
§ 12.8. 贝氏体的形成	543
附录 12-I. 非完善晶体的倒易空间和异常衍射	547
第四篇 参考文献	548
 第五篇 金属的力学性质	
引言	553

第十三章 金属中的内耗	554
I. 内耗的唯象理论	555
§ 13.1. 内耗、横量亏损与非弹性应变的关系	555
§ 13.2. 弛豫型(或滞弹性)内耗	557
§ 13.3. 静滞后型内耗	562
§ 13.4. 阻尼共振型内耗	563
§ 13.5. 内耗的量度	564
§ 13.6. 内耗的测量方法	567
II. 点缺陷引起的内耗 (应力感生有序内耗)	569
§ 13.7. 体心立方结构的填隙式固溶体	570
§ 13.8. 替代式固溶体	574
§ 13.9. 面心立方结构的填隙式固溶体	576
III. 与位错有关的内耗	577
§ 13.10. 钉扎位错内耗	577
§ 13.11. 低温位错弛豫内耗峰	590
§ 13.12. 点缺陷与位错交互作用引起的弛豫内耗峰	598
§ 13.13. 高温位错内耗	605
IV. 与界面有关的内耗	606
§ 13.14. 非共格的晶界内耗峰	606
§ 13.15. 共格界面引起的内耗	609
V. 与热、磁和电性质有关的内耗	612
§ 13.16. 热弹性内耗	612
§ 13.17. 磁弹性内耗	614
§ 13.18. 电子阻尼	615
附录 13-I. 标准线性固体方程的推导	619
附录 13-II. 钉扎位错在脱钉后位错段长度的分布函数	620
第十四章 晶体的范性	623
I. 范性形变的几何学与晶体学	623
§ 14.1. 范性形变的测量	623
§ 14.2. 滑移的晶体学特征	627
§ 14.3. 临界切应力定律	636
§ 14.4. 形变过程中滑移的几何关系	639

目 录

§ 14.5. 不均匀的范性形变	644
§ 14.6. 孪生	649
§ 14.7. 多晶体范性形变的特征	654
§ 14.8. 形变织构	657
II. 范性形变的物理本质	663
§ 14.9. 晶体软硬的物理本质	663
§ 14.10. 屈服现象	670
§ 14.11. 流变应力与位错密度的关系	675
§ 14.12. 热激活的形变过程	684
§ 14.13. 三阶段的加工硬化曲线	691
§ 14.14. 加工硬化曲线的理论	697
§ 14.15. 包辛格效应与疲劳硬化	702
§ 14.16. 多晶体的屈服与流变	704
III. 合金强化	709
§ 14.17. 固溶硬化的基本情况	710
§ 14.18. 均匀固溶硬化的理论	713
§ 14.19. 位错线上溶质原子偏聚的效应	717
§ 14.20. 有序合金的硬化	721
§ 14.21. 第二相粒子强化的基本情况	724
§ 14.22. 两相合金屈服强度的理论	726
§ 14.23. 两相合金加工硬化的理论	733
第十五章 断裂	741
§ 15.1. 断裂的基本类型	741
§ 15.2. 脆性断裂	742
§ 15.3. 裂口的成核	748
§ 15.4. 裂口的传播	751
§ 15.5. 延性-脆性转变	758
§ 15.6. 延性断裂	766
§ 15.7. 疲劳断裂	767
§ 15.8. 纤维强化	771
第十六章 高温力学性质	778
1. 回复与再结晶	778

目 录

v

§ 16.1. 回复与多边化	778
§ 16.2. 再结晶的基本规律	784
§ 16.3. 再结晶机制	786
§ 16.4. 和再结晶有关的几个特殊问题	790
II. 蠕变	792
§ 16.5. 蠕变试验及工程蠕变数据的表示	792
§ 16.6. 蠕变的经验公式	796
§ 16.7. 蠕变过程中的结构变化及形变机制	799
§ 16.8. 蠕变理论	803
§ 16.9. 溶质原子和弥散相对蠕变的影响	811
§ 16.10. 蠕变断裂	815
§ 16.11. 发展高温合金可遵循的规律	819
第五篇参考文献	823
人名索引	833
内容索引	835

第四篇 相 变

引 言

相变有两种类型^[1]。第一种类型叫做一阶相变，在这种相变中，能量、体积和晶体结构的变化是不连续的；第二种类型是较高阶的相变，它的转变点常常叫做 λ 点或者居里点，在转变中，能量及体积的变化是连续的，一般地说，这种较高阶的相变和冶金工作者的关系不大，所以下面所讲的相变都是指一阶相变。

相变是相变系统中原子从一种组态到另一种组态的转变。物质三态的互相转变和一种固态到另一种固态的转变都属于这个范畴。金属工作者关心的是液态金属的凝固和固态金属中的相变，因为前者和生产工艺中的焊接、铸造和铸锭等密切相关，而后者则属于金属热处理问题。

固态相变可以分为无扩散相变和扩散相变两大类。马氏体相变是无扩散相变，在转变时，相邻原子的相对位移不超过一个原子间距；扩散相变的内容甚多，例如有序无序转变，过饱和固溶体的沉淀、共析相变等都是。多型体转变中，有无扩散的，也有有扩散的。例如 α 钴 \rightleftharpoons β 钴的转变属于马氏体型转变，没有扩散；而白锡（ β 锡）向灰锡（ α 锡）的转变则是扩散相变。

相变的范围不但很广，而且内容也很杂乱。有序固溶体问题在 § 2.12, § 3.4 已经作了必要的介绍，这里只准备着重地介绍如下几个基本问题，即液态金属的凝固（第十章），马氏体相变（第十一章），以及扩散相变中过饱和固溶体的沉淀和奥氏体的分解两部分（第十二章）。

在讨论上述具体问题之前，我们先安排了一章（第九章）来介绍相变动力学问题，作为后几章讨论的基础。

第九章 相变动力学

I. 成核成长的基本原理^[2-4]

发生相变时，可能引起系统各部分成分的变化，例如过饱和固体沉淀、共析相变等；也有不发生成分变化的相变，例如多型体相变、马氏体相变等。

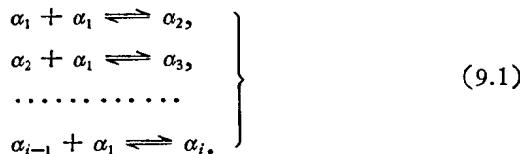
实验证明，相变不是在系统中的每个点上同时发生，而是首先在某些小区域内开始形成新相，然后才从这些小区域扩张到整体。新相开始形成的小区域叫做核心，所以第一个过程叫做成核过程，第二个过程叫做成长过程。在相变系统中，每单位体积空间内单位时间内形成核心的数目叫做成核率；新相在单位时间内线性成长的数值叫做成长率，在成核率和成长率同时都是极大值的情况下，相变速率也最大，否则，相变速率就比较慢，甚至停止。

成核和成长是相变的两个基本问题。相变理论起源于过饱和蒸气中液滴形成过程的研究，这一研究已经比较成熟，所以在这一节内我们首先用它作例子来说明成核的基本概念，而后引伸金属的相变，不过，应用上大部分还只能是定性的或者半定量的。

§ 9.1. 成分不变的成核——过饱和蒸气中液滴的形成

(a) 核心形成过程中自由能的变化 在蒸气中，由于能量涨落的原因，可能有由少数几个分子连结而成的“小集团”存在。这些“小集团”有继续成长为液滴的可能，亦有拆散而重新形成蒸气的可能，我们称这些“小集团”为胚芽。对于过饱和的蒸气，蒸气状态是不稳定的，胚芽形成液滴的几率很大，拆散的几率很小。绝大多数的胚芽不是通过几个分子同时相撞而结合起来的，因为这样相撞的几率很小，几乎是不可能的，所以我们考虑它们是通过二分

子过程重复进行而形成的。那就是说，如果 α_1 表示一个蒸气分子， α_2 表示由两个蒸气分子连结而成的胚芽，……， α_i 是由 i 个分子连结而成的胚芽，则它们的形成过程可以用下面的一连串反应来表示：



式中有两个表示反应方向的箭头，上面一个表示胚芽的成长，下面一个表示胚芽的拆散。蒸气分子形成胚芽之后，它们的自由能比之在蒸气相时为低，但是另一方面，由于胚芽和蒸气间形成了表面，因而要求表面能。令液相和它的蒸气之间单位面积的表面能为 σ ，从蒸气形成单位体积液滴时自由能的改变量为 ΔF_v ，那么在一定的温度和压强下，形成一个半径为 r 的球形胚芽时的自由能的总变量 ΔF_i 为

$$\Delta F_i = 4\pi r^2 \sigma + \frac{4}{3} \pi r^3 \Delta F_v. \quad (9.2)$$

若在这半径为 r 的胚芽中含有 i 个分子，则式(9.2)可以普遍地写成

$$\Delta F_i = a\sigma i^{2/3} + b\Delta F_v i, \quad (9.3)$$

式中 a, b 为二常数，其数值由胚芽的密度和形状决定；例如胚芽为球形时， $a = (36\pi\nu^2)^{1/3}$ ， $b = \nu$ ，其中 ν 是一个分子在胚芽中所占的空间。在发生相变的条件下， ΔF_i 恒为负值。不过，尽管这样，当 r 很小，亦即 i 很少的时候，蒸气分子形成胚芽时放出的能量不足以供应表面能的需要，因此胚芽的长大还得吸收胚芽自身以外的能量，这能量是由系统内部能量的涨落而来。当 r 大于某一临界值 r^* （相当于 i 大于某一临界值 i^* ）以后，胚芽的成长反而放出能量。 ΔF_i 和 r 的关系如图 9.1 中标以 $\sigma > 0$ 的曲线所示。令

$$\frac{\partial(\Delta F_i)}{\partial r} = 0$$

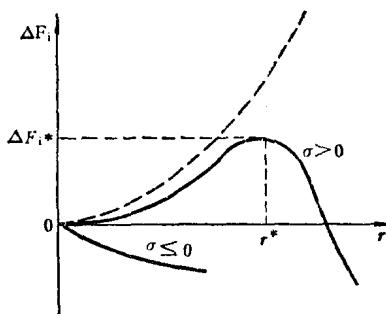


图 9.1 新相胚芽形成时自由能的改变量和半径的关系

或

$$\frac{\partial(\Delta F_i)}{\partial i} = 0,$$

即可求出临界值 r^* , i^* 以及和它相对应的自由能改变量的临界值 ΔF_{i^*} , 即

$$r = r^* = - \frac{2\sigma}{\Delta F_v}, \quad (9.4)$$

$$i = i^* = - \left(\frac{32\pi}{3\nu} \right) \left(\frac{\sigma}{\Delta F_v} \right)^3, \quad (9.5)$$

$$\Delta F_i = \Delta F_{i^*} = \frac{16\pi\sigma^3}{3(\Delta F_v)^2}. \quad (9.6)$$

平均地说, 当胚芽半径小于临界值 r^* 时, 亦即胚芽内分子数目少于 i^* 时, 胚芽消失的几率大于成长的几率; 当大于 r^* 时(亦即 $i > i^*$ 时), 则胚芽成长为一颗液滴的几率大于消失的几率。当然, 如果 $\sigma \leq 0$, 则胚芽不管多么小总是可以长大的, 这时也就不存在临界值。如图 9.1 中标以 $\sigma \leq 0$ 的曲线所示。

我们可以把 ΔF_v 表为

$$\Delta F_v = - \frac{kT}{\nu} \ln \left(\frac{P}{P_e} \right), \quad (9.7)$$

式中 P 是实际的蒸气压, P_e 是蒸气和液相平衡时的压强, k 是玻

耳兹曼常数， T 是相变时的绝对温度。当实际蒸气压大于平衡值时， ΔF_v 为负值，这时可以形成液相核心，但是在实验上 P/P_c 必须或多或少大于某一临界值，我们才能观察到成核现象。譬如空气中的水蒸气，在 264 K 时， P/P_c 的临界值为 4.85，假定这时水的表面能为 76 尔格/厘米²，那么，我们可以根据式(9.5)估计到，在这情况下，临界胚芽中水分子的数目为 70 左右。

从式(9.7)还可以看到，当相变温度趋近平衡温度时， P_c 趋近 P ，因此 $\Delta F_v \rightarrow 0$ 。相变温度愈高， ΔF_v 的绝对值愈小，所以胚芽的临界尺寸也愈大 [式(9.4), (9.5)]，成核功 ΔF_i 也愈大 [式(9.6)]。换句话说，当相变温度较高的时候，胚芽需要大一些才能稳定，形成一个核心时外界所做的功也多一些。当系统温度高于平衡温度时， $P < P_c$ ，这时 $\Delta F_v > 0$ ，分子的聚集总是使 ΔF_i 上升，以致不能形成核心，如图 9.1 的虚线所示¹⁾。

式(9.7)也常常可以用来计算过饱和固溶体沉淀时的 ΔF_v 值，在那种情况下，我们把压强比 P/P_c 改写成 浓度比 C/C_c ^[5] (C 是溶质实际浓度， C_c 是平衡浓度)。

(b) 成核率 现在我们按照上面所说的液相核心形成的概念来推导成核率。首先设系统在一定的温度和一定压强下，在单位体积内，由 i 个分子构成的胚芽数目为 n_i ，而单个蒸气分子的数目为 n ，假若这些胚芽和蒸气分子的混合是理想的混合，那么在

1) 对于凝聚系统，因为 ΔF_v 是温度的函数，所以 r^* , i^* 和 ΔF_i* 的数值也都随温度而变。在压强不变的条件下，从热力学可知

$$\left[\frac{d(\Delta F_v)}{dT} \right]_P = -\Delta S_v,$$

这里 ΔS_v 是相变时形成单位体积新相时熵的改变量，常常可以假定与温度无关。于是

$$\Delta F_v = \Delta S_v(T - T_0),$$

T_0 是两相的平衡温度。将上式代入式(9.4), (9.5) 和 (9.6)，即可得出 r^* , i^* 及 ΔF_i* 与温度的关系。可以看出，相变温度越接近平衡温度，则胚芽的临界尺寸和临界成核功 ΔF_i* 也越大。当温度高于平衡温度时，即 $T > T_0$ 时， ΔF_v 为正值，于是形成胚芽所需的能量 ΔF_i 始终随着胚芽半径的增大而上升，亦如图 9.1 的虚线所示；这样，即使形成新相胚芽，也是不稳定的。

这单位体积内,由于胚芽的形成,蒸气(整个相变系统)自由能的改变量 ΔF_m 将为

$$\Delta F_m = n_i \Delta F_i + kT \left[n_i \ln \left(\frac{n_i}{n_i + n} \right) + n \ln \left(\frac{n}{n_i + n} \right) \right], \quad (9.8)$$

上式右端第二项是由于混合后熵值增加而得到的数值。在平衡条件下, ΔF_m 应为一极小值, 即 $\frac{\partial(\Delta F_m)}{\partial n_i} = 0$, 因此, 在平衡时由 i 个分子组成的胚芽的数目应为

$$n_i = n \exp \left(-\frac{\Delta F_i}{kT} \right); \quad (9.9)$$

按此, 单位体积中, 达到临界尺寸的胚芽数目 n_i^* 应为

$$n_i^* = n \exp \left(-\frac{\Delta F_i^*}{kT} \right). \quad (9.10)$$

临界尺寸的胚芽要能成长为新相(液相)的核心, 必须要有蒸气分子和它相碰撞, 只有在碰撞中多得到一个分子之后, 它才能克服热力学势垒 ΔF_i^* 而成为稳定的核心。假定在过饱和蒸气中胚芽和核心是平衡的, 并且表示在式(9.1)中的分解方向的反应可以略去不计, 即所有和临界胚芽相撞的蒸气分子都不反射, 那么成核率 I 便应该等于单位时间内单个的蒸气分子和临界尺寸胚芽相撞的次数, 即

$$I = Z_c S^* n_i^*, \quad (9.11)$$

式中 S^* 是一个临界尺寸胚芽的表面积; Z_c 是每秒内单个分子和胚芽单位表面积碰撞的次数, 从统计力学知道

$$Z_c = \frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}},$$

这里 P 是在相变条件下蒸气的压强, m 是分子的质量, k , T 的含义同式(9.7)。这样, 式(9.11)就变为

$$I = \frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} S^* n \exp \left(-\frac{\Delta F_i^*}{kT} \right). \quad (9.12)$$

可以看出,成核率是温度的函数,并且当温度很低或者接近平衡温度 T_0 时, I 值都趋近于零(要记得 ΔF_{i*} 也是温度的函数)。因此,在适当的温度下, I 有一极大值。凝聚系统中的成核率亦有此性质。这个成核理论通常称为经典的成核理论。这个理论有一个基本假定,即认为,只包含有 50 到 100 个分子的微小胚芽的性质和宏观液相的性质是相同的,胚芽和蒸气间有一明显的分界面,因此宏观液相的表面能可以用来计算胚芽表面能的增加。但是,这个假定事前并未加以证明。后来有一些人在这方面做了一些修正,然而也没有得到实验上的支持^[2]。

§ 9.2. 成分变化的成核

考虑由 i, j 两种原子构成的不平衡单相固溶体的相变系统。令 i 原子的平均百分浓度为 C_i , 当此固溶体分解成平衡的 α 和 β 两个相时, 在 α 相中的百分浓度为 C_i^α , 在 β 相中的百分浓度为 C_i^β , 并假定相变过程包括 i 原子在 β 相中偏聚的过程, 于是 $C_i^\beta > C_i^\alpha$ 。现在我们讨论 β 相核心形成过程中的能量变化。

在上述固溶体中, β 核心的形成必须经过浓度的涨落, 因此, 亦随之有能量的涨落。设 i, j 原子均匀分布时, 这系统的自由能为 $F(C_i)$ 。我们考虑, 如果 i 原子浓度 C_i 发生很小的涨落, 一部分的浓度上升 ΔC_i , 另一部分下降 ΔC_i , 那么这整个系统的自由能变化 $\Delta F(C_i)$ 应为

$$\begin{aligned}\Delta F(C_i) &= \frac{1}{2} [F(C_i + \Delta C_i) + F(C_i - \Delta C_i)] - F(C_i) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial C_i^2} \right)_{C_i} (\Delta C_i)^2.\end{aligned}\quad (9.13)$$

从上式我们可以看到, 如果 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial C_i^2} \right)_{C_i} < 0$, 那么浓度涨落的结果将使系统的能量下降, 这时合金必然能分解成两个相, 并且不受到热力学上的“阻力”。这个分解的过程是逆扩散的过程, 其分解的

条件也合乎逆扩散的要求[见式(7.23)]. 相反, 如果 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial C_i^2}\right)_{C_i} > 0$, 则浓度涨落的结果使系统的能量上升, 所以涨落是受到压抑的, 压抑的力量使合金进行顺扩散而均匀化. 在这情况下, 必须依靠外来的能量, 相变才能进行.

事实上, 在固溶体分解成两个相的情况下, 浓度的变化总是相当大的, 所以式(9.13)的最后一等号不能使用. 对于这个问题, 还要介绍详细的推导^[6], 下面先把固溶体相图和自由能的关系加以说

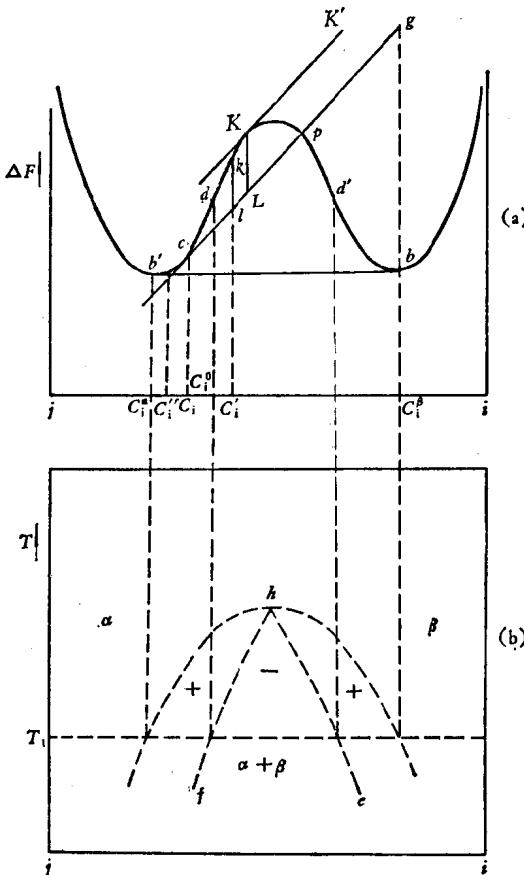


图 9.2 i, i 合金相图 (b) 及其成分和自由能的关系 (a)

明^[7]。图 9.2(b) 表示由 i, i 两种原子构成的合金相图，在低温时，这合金分解成 α 和 β 两个相， α 相是 i 原子在 i 点阵中的固溶体， β 相是 i 原子在 i 点阵中的固溶体。为了便于讨论起见，我们假定 α 和 β 两个相的晶格结构相同， i 和 i 两种原子的大小和性质也差不多。这样，相变所产生的表面能和畸变能都可以略去不计。图 9.2(a) 表示这合金在温度 T_1 时自由能和成分的关系曲线。位于公切线 $b'b$ 以上部分 $b'dd'b$ 表示淬火至 T_1 的合金，如果它能保持单相状态时的自由能，其中 dd' 部分是向下弯的，所以在这范围内 $\partial^2 F / \partial C_i^2$ 小于零；而 $b'd$ 和 bd' 两部分向上弯，在这两个范围内 $\partial^2 F / \partial C_i^2$ 大于零。 d 和 d' 是曲线的转折点，在这两个位置上 $\partial^2 F / \partial C_i^2$ 等于零。和相图对应，这两点相当于图 9.2(b) 中通过 T_1 的水平线和通过 d 及 d' 两点的铅垂线的交点，这样的交点称为“旋点”(spinodal point)。当合金的温度改变时，自由能-成分曲线亦将发生改变，因此旋点的位置亦势必会移动，移动的轨迹如图 9.2(b) 中的虚线 hf 和 hc 所示；这两根曲线称为“旋点曲线”(spinodal curve)。温度和成分在这曲线以下的各点， $\partial^2 F / \partial C_i^2$ 均小于零，图中标以“—”号；在曲线以上， $\partial^2 F / \partial C_i^2$ 都大于零，图中标以“+”号。

现在考虑在 i 原子浓度为 $C_i(C_i^* < C_i < C_i^\beta)$ 的亚稳固溶体中浓度涨落的情况，假设由于 i 原子浓度的上升而形成一个 β 相的胚芽，那么，在有 N 个原子的合金中，由于这个胚芽的形成而引起的自由能的改变可以按上述方式来推导。

令 N 表示合金中的总原子数， n 表示胚芽中的原子数，胚芽中 i 原子的浓度为 $C'_i(C'_i > C_i)$ 。由于胚芽中 i 原子浓度有所增加，所以胚芽以外的 $(N - n)$ 个原子中的 i 原子浓度势必会下降，设为 C''_i 。因为在胚芽产生以前和以后合金的 i 原子数目应不变，所以

$$NC_i = (N - n)C''_i + nC'_i,$$

或者

$$C_i - C''_i = n(C'_i - C_i)/(N - n), \quad (9.14)$$

1105369