弹性动力学最新进展

王铎　马兴瑞　刘殿魁　主编

科学出版社

弹性动力学最新进展

王　铎　马兴瑞　刘殿魁　主编

科 学 出 版 社

1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书由20篇论文组成，涉及到弹性动力学领域中各前沿课题的最新研究进展，内容包括，稳态运动裂纹尖端弹塑性场分析、地震波在凹形地面上的散射、裂纹截面动接触问题、接触型界面裂纹的弹性波散射、圆形类杂界面裂纹的弹性波散射、非局部与微极弹性波在圆筒中的传播等。

本书可供有关专业的研究生、科研工作者和从事无损探伤、爆炸探矿和地震波的研究人员和技术人员阅读、参考。

弹性动力学最新进展

王 铎 马兴瑞 刘殿魁 主编

责任编辑 杨 岭

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

香河县第二印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

*

1995年1月第一版	开本：787×1092 1/16
1995年1月第一次印刷	印张：13 3/4
印数：1—1 500	字数：320 000

ISBN 7-03-004080-5/O·710

定价：16.80元

前　言

固体动力学是固体力学的一个重要分支，它与许多自然现象和工程实际问题密切相关。黑龙江省是我国能源、重工业与机械制造工业的重要基地，工矿企业在工程实践中提出了大量与固体动力学有关的课题，如爆炸探矿中的弹性波散射、大型旋转构件的无损探伤、在地震作用下的减灾与结构的安全设计等课题。哈尔滨市有大专院校与研究单位二十余所，近十年来，一批科学工作者在固体动力学方面作了许多研究，获得了成绩，如地震波在复杂地形下的传播、应用复变函数方法求解二维弹性波散射、多层介质中界面裂纹的散射、界面裂纹的扩展、弹性波散射反问题与裂纹扩展的弹塑性尖端分析等问题。黑龙江省力学学会固体力学专业组鉴于哈尔滨市科学工作者在固体动力学方面的研究工作，于 1991 年举行了一次固体动力学学术研讨会，交流了各大专院校与研究所的研究课题与进展概况。接着于 1992 年举行了第一次固体动力学学术报告会，会议十分活跃，宣读论文十五篇，涉及的范围有：运动裂纹尖端场的弹塑性分析、地震波在凹形地面上的散 射、裂纹表面的动接触、接触型界面裂纹的弹性波散射、对夹杂界面裂纹的弹性波散射、动态分析力学、动光弹在工程中的应用及非局部和微极波在圆筒中的传播等问题。会后，大家一致同意出版会议论文专集，并列入“固体动力学新进展”一文，该文是国家自然科学基金项目“固体力学新趋势”的分课题初稿。希望读者阅后，给予指正。

王　铎

1993.2.15 于哈尔滨

目　录

固体动力学新进展*

王　铎　邹振祝　马兴瑞　刘晶波
（哈尔滨工业大学）

引　言

固体动力学的研究范围十分广阔，其中波在固体中的传播与散射和材料在动载下的破坏是固体动力学中两个最重要的课题，因为它们和许多自然现象与工程实际问题密切相关。近些年来由于工程实际的需要提出了许多迫切的问题。例如在地震工程中要求给震源定位，估计震源的参数，了解地形和地壳厚度等对地震波的影响，以便改进防震与减少灾害的措施。又如在超声无损探伤中要求判明伤的形状、大小、位置与性质，然后应用断裂力学的理论研究结构的寿命。再如在地震勘探中需要了解地层的构造与岩石的性质，以判断石油或矿的存在与储量。这些工程实际问题实质上是波动的正问题与反问题，对线弹性介质来说就是弹性波散射的正、反问题。虽然弹性波理论的正问题已经比较成熟，但是由于工程实际问题的复杂性，这些问题还远远没有解决。至于波动方程的反问题，近些年来的研究仅仅才是有了一个良好的开端而已。工程结构的破坏始终伴随着裂纹的生成、生长与断裂等过程。研究带裂纹材料的韧性与断裂现象形成了断裂力学。断裂力学是最近二十年来才发展起来的一个新的学科，动态断裂力学是这新学科中最年轻的一个分支。断裂动力学的许多基本概念都是最近才建立起来的，比较系统的分析方法也是最近才形成的。至于实验技术还很不完善，远远满足不了实验研究的需要，正在发展之中。断裂动力学的重要性是无疑的，它与许多工程实际问题密切联系，诸如震源物理、爆炸力学、核反应堆的安全设计、在高速冲击载荷下各种结构物的破坏等。鉴于上述所阐明的情况，我们准备在断裂动力学与弹性波散射的正、反问题两个方面介绍十几年来的研究动态与今后的展望。

动态断裂力学的动向

断裂动力学研究含裂纹结构的动力学问题，这类问题都伴有波的传播，介质中质点的惯性必须考虑。断裂动力学对于研究地震现象，地层变动，桥梁与天然气管道的脆断、爆炸探矿、军事上的爆炸与防爆、受冲击力的构件与建筑物的破坏都有重要的实际意义。当含裂纹的结构受冲击力作用时，冲击波或定常波到达裂纹面将发生散射，到达界面处将发生反射，裂纹或保持稳定，或启裂而运动。如果裂纹保持静止，这类问题可以用一般的弹性动力学的方法解决，属于求解波动方程混合边界的初值问题，比起断裂静力学

* 自然科学基金资助项目

问题的求解要复杂得多。如果裂纹快速扩展，虽然外载不变，但在裂纹尖端将放射出膨胀波与等容波，在裂纹表面上将发生 Rayleigh 波的传播。因为运动裂纹的表面积 A 是时间的函数，这类问题多了未知参数 A，如用弹性动力学去解，需要补充必要的方程。这一类问题的基本方程虽然是线性的，因它要靠运动的边界条件才能确定，所以也是非线性的，即所谓数学物理中的运动边界问题，是非常复杂的问题，从数学上还没有解决。总之，断裂动力学问题十分复杂，我们只能限制在特别简单的情况去研究。

一、裂纹前沿的物理量

1. 动应力强度因子

Sih 等人[1,2]给出静止裂纹受动载作用裂纹尖端应力与位移场的一般解。对于 I 型裂纹为：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \cdots \\ u_i &= \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r}\, g_i(\theta) + \cdots \end{aligned} \qquad (i,j=1,2) \tag{1}$$

式中 u_i 为位移分量，σ_{ij} 为应力分量，$f_{ij}(\theta)$ 与 $g_i(\theta)$ 为极坐标 θ 的函数，系数 $K_I(t)$ 称为动应力强度因 子，裂纹尖端应力与位移场对于 r 和 θ 的函数关系与静力学中的完全相同，只是动应力强度因子除了与载荷和裂纹有关外，还是时间的函数。Ⅱ型与Ⅲ型裂纹也有类似的结果。

如裂纹高速扩展，既使受静载作用，由于裂纹前沿的应力急剧卸载，也要因惯性效应产生应力波。裂纹尖端附近的应力与位移场既与时间有关，又与裂纹扩展速度有关，对于 I 型裂纹来说，其应力与位移场有以下形式：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K_I(t,V)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta,V) + \cdots \\ u_i &= \frac{K_I(t,V)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r}\, g_i(\theta,V) + \cdots \end{aligned} \qquad (i,j=1,2) \tag{2}$$

式中 V 是裂纹的扩展速度。$K_I(t,V)$ 称为运动裂纹的动应力强度因子，表达应力与位移分布的空间形式的函数 $f_{ij}(\theta,V)$ 与 $g_i(\theta,V)$ 是一切运动裂纹所共同的。I 型的应力分布空间形式 $f_{ij}(\theta,V)$ 是 Rice[3] 得出的，位移分布空间形式的函数 $g_i(\theta,V)$ 是由 Mulluck[4] 得出。Ⅱ型与Ⅲ型的空间形式的函数由 Freund[5]与 Burgers[6]分别得出，Nishioka 等人[7]应用 Radok[8]的应力与位移的复变函数法求得这三种裂纹的应力和位移场的一般解，并表达成级数形式。

动应力强度因子可以 表达成速度因子 $K(V)$ 与静应力强度因子 K^* 的 乘积

$$K = K(V)K^* \tag{3}$$

K^* 与瞬时的裂纹长、作用力和裂纹运动历史有关，与裂纹的速度无关。K^* 有 静应力强度因子的量纲，但是一般来说它不一定等于运动裂纹在该瞬时相当长度的静应力强度因子，参考文献 [9] 给出了简单的解释。

2. 动能量释放率

按裂纹闭合作功的公式：

$$G = \lim_{\delta a \to 0} \int_0^{\delta a} (\sigma_y u + \tau_{xy} v + \tau_{yz} w)\, dx \tag{4}$$

得到运动裂纹的动能量释放率，或称为动扩展力，式中 u,v,w 为位移分量，$\sigma_y,\tau_{xy},\tau_{yz}$ 为应力分量。运动裂纹的动扩展力 G 与速度 V 的乘积得出运动裂纹的闭合功率。从能量守恒定律出发，参考文献［10］得出运动裂纹的动扩展力与一积分的极限相等。即

$$G = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}[(W+T)n_i - t_i u_{i,1}]ds \tag{5}$$

式中 Γ_ε 是以裂纹尖端为中心以 ε 为半径所作的圆，W 为应变能密度，T 为动能密度，t_i 为回路上力的分量，n_i 是回路上法线沿裂纹面的分量。

同理，动能量释放率也可以表达成速度因子 $g(V)$ 与静能量释放率 G^* 的乘积

$$G = g(V)G^* \tag{6}$$

其中

$$G^* = \frac{1-\upsilon}{2\mu}K^{*2} \tag{7}$$

3. 与回路无关的积分

许多研究者力图在动态问题中寻找一类与路径无关的积分。在定常运动中，参考文献[11]提出广义的 J 积分

$$J = \int_{\Gamma}[(W+T)n_i - t_i u_{i,1}]ds \tag{8}$$

式中 Γ 为任意围绕裂纹尖端的回路，对于瞬态问题，得不出与静态 J 积分类似的与路径无关的线积分，这个道理可理解为，从能源发出的弹性波，在某一瞬时都有一定的影响范围，沿两条不同路径的线积分一般不能包括相同的影响范围，所以有不同的积分值。对于瞬态问题，与路径无关的能量积分一定包含着面积分（或体积分），在近似计算中这是允许的，前面已经提到。参考文献[12]提出与路径无关的 J 积分为：

$$J = \lim\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon}(Wn_i - t_i u_{i,1})ds + \int_{A-A_\varepsilon}\rho\ddot{u}_i\, u_{i,1}dA \tag{9}$$

式中 Γ 为远离裂纹尖端的回路，A 为它所包围的面积。A_ε 为极限回路 Γ_ε 所包围的面积。同时参考文献[13]与[14]也提出类似的 J 积分，但积分内的主项与上式不同。参考文献[15]经过分析，认为参考文献[12]的 J 与运动裂纹的动能量释放率 G 相差 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}Tn_i ds$。参考文献[14]提出的 J 积分与 G 相差两倍的 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}Tn_i ds$。参考文献[13]的 J 积分应用了与裂纹尖端一起运动的回路，如转到固定坐标系，所提出的 J 与 G 相等。当定常运动时，$T = 1/2\rho\dot{u}_i\dot{u}_i$ 是非奇异的，因此这些不同写法的 J 积分都等于 G。在参考文献[14]中提出与路径无关的 J 积 分，包括裂纹面上任意载荷，有限弹性、非弹性等情况。

Nilsson[16]利用对时间的拉氏变换，将动力学双典线型波动力程转换成与静态相同的椭圆型方程，得出一个与广义 J 积分形式类似的线积分，积分中包含拉氏变换后的物理量。

二、断裂动力学的分析方法

1. 解析方法

断裂动力学的场方程与边界条件比起静态问题要复杂得多，解析方法只能求解少数的简单问题，其中个别问题能够获得解析解，绝大多数问题是将其简化为标准的积分方程

后应用数值计算求解。以下介绍几种常用的方法。

(Ⅰ)积分变换法

积分变换法是断裂动力学中最主要的一种解析方法，一大类的问题都是用积分变换法去求解的。例如：半无限长与有限长裂纹的平面问题；圆币形裂纹的轴对称问题；在板条中的裂纹问题等。在解平面波动方程时，一般先对时间进行 Laplace 变换，再对裂纹所在的坐标如 X 进行 Fourier 变换，然后按常微分方程求解，根据在 X 轴上的边界条件列成对偶积分方程。对偶积分方程可采用两种方法求解。对于半无限裂纹一般用 Wiener-Hopf[17] 方法以复变函数求解。有限长裂纹不能应用上法，可应用 Copson 方法[18]，先将对偶积分方程变换成第二类 Fredhelm 积分方程，然后用数值方法求解。Sih 等人[19]用以上两种方法求解了某些断裂动力学问题，并将前人的大量研究成果系统地汇集在他主编的书中。

(Ⅱ)位错连续分布法

在静态问题中，裂纹可以看成由连续分布的静止位错所组成。类似地在动态问题中，裂纹是位移场的间断线，可以看成由连续分布的运动位错所组成。另一方面，裂纹的动力学问题也可以用如下两个问题相迭加而成：一是自由表面的 Lamb 问题；一是在裂纹尖端以外的预扩展方向上存在连续分布运动位错的问题。后者由动位错的存在所产生的位移，与前者自由表面 Lamb 问题解出的位移相叠加，要恰好使裂纹尖端以外预扩展方向的位移为零。将裂纹看成连续分布动位错需用应力平衡条件写成方程，而叠加法则用位移的消失条件写成方程。在[1]中，动态裂纹问题应用积分变换法将场方程变换为对偶积分方程后，如果利用连续位错分布密度的概念，可以将对偶积分方程简化为标准的奇异积分方程，然后求解。

(Ⅲ)自相似法

在特殊的几何与载荷条件下，连续介质的运动表现出自相似性质。弹性动力学的波动方程，在自相似条件下简化为二维 Laplace 方程或一维的波动方程，可以分别应用复变函数法和特征线法求解。波动方程的简化一般用 Chaplygin 变换(Ⅲ型裂纹)：

$$\begin{aligned} z &= \beta + i\theta \quad , \quad (z = x + iy) \\ \beta &= \mathrm{ch}^{-1}(C_2 t)/r \end{aligned} \tag{10}$$

式中 z 为复数，C_2 为剪波速度。Cherepanov[20]根据波动方程的函数不变解理论发展了一种求解直线裂纹自相似扩散的系统方法。所用的变换为

$$z = \frac{xt - iy\sqrt{t^2 - a^2(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \tag{11}$$

式中 a 是波速的倒数。

(Ⅳ)权函数法

利用应力强度因子与能量释放率之间的关系，在静态断裂力学中 Rice[21]提出了权函数法的基本思想，并得到成功的应用。

这一方法的特点是，对于含裂纹体都存在一个唯一的与之对应的权函数，权函数与载荷和应力强度因子存在某种关系。如果已经得到某一载荷系统的解，则可求得该裂纹体的权函数，利用权函数能求出其他载荷系统的应力强度因子。

对于动态断裂力学问题，应力强度因子与能量释放率之间的关系只有在拉氏变换后，才出现与静态问题的类似公式。于是裂纹体在动态问题中的权函数只能是在拉氏域中的。

如果该裂纹体受其他载荷系统的体积力和边界力已知，经拉氏变换后，则用权函数法求出拉氏变换域中的动应力强度因子，再经拉氏反演即得出该裂纹体受其他载荷系统作用在时域中的动应力强度因子。

以上几种解析方法都是针对线弹性断裂动力学问题而提出的，至于对弹塑性、粘弹性等介质中的断裂动力学问题则要用解这些类型问题的方法去求解。

2. 近似计算方法

常用的近似计算方法有：有限差分法；有限元法；边界元法。这些近似计算方法可以填补解析法的不足，对于有限几何形状、有限变形、弹塑性与粘弹性介质等静止裂纹的动态问题或以任意速度运动的裂纹问题都能得到近似的数值结果。

（Ⅰ）有限差分法

有限差分法的概念清楚，方法简单，广泛地应用于各种工程问题的求解。用有限差分法解受动载作用的静止裂纹时，只需在每一瞬时（时间步长）去解一静力学问题，因为静止裂纹的边界是不变的，比较简单。对于运动裂纹，每一时间步长都要扩展，在计算时有以下几种方法：Ⅰ）根据实验求得裂纹扩展的速度与轨迹，依次解除裂纹前方的各节点；Ⅱ）应用断裂判据与材料的断裂韧性（J_D,K_D,δ_D）确定裂纹的扩展速度；Ⅲ）为了理论分析，假定裂纹用某一速度进行传播。

应用有限差分法，Chen[22][23]与 Wilkins[24]编成二维 HEMP2D 与三维 HEMP3D 程序。HEMP3D 程序还可以解固体力学中的动塑性与时间敏感的材料和气体力学等问题。

有限差分法的最大缺点是动应力强度因子只能用外推方法求得，另外对于物体边界复杂的问题难以处理。

（Ⅱ）有限元法

应用有限元法求解断裂动力学问题，与一般线弹性动力学问题的区别，在于裂纹尖端有奇异性。为了提高计算精度，降低计算时间，处理的方法是：采用奇异单元；或采用与路径无关的能量积分等方法。至于在有限元法中，处理裂纹扩展的方法与有限差分法的相同。为求解静止裂纹受动载作用的应力强度因子 Aberson[25]设计了多参数奇异单元。对于对称的奇异元取8个结点，共16自由度，规定以裂纹尖端附近位移场的级数展开式（见式(1)级数的第二项起未写出）中的13个待定系数与3个刚性位移作为参数。对于非对称奇异元取十个结点。Agres[26]应用八结点等参四边形单元，单元自动满足 r 的负二分之一的奇异性。

Aoki 等人[27]提出单参数奇异元求解运动裂纹问题，但在奇异元与普通单元连接的单元必须作处理。

奇异元法不能应用普通元编写的通用程序，总是有些不方便，为了改变这一情况，可以应用类似静态断裂力学中的 J 积分法。只是除了计算线积分外，对于动态问题还要计算面积分，然后应用 J 积分与 G 和 K 的关系求出动应力强度因子。此外，有限元法还可以通过包含弹塑性、粘弹性的 J 积分公式求解在这些介质中的动态断裂力学问题。

（Ⅲ）边界元法

弹性动力学中的边界积分方程法在断裂动力学问题中的应用，是范天佑与 Hahn[28]提出来的，他们计算了单边裂纹板受阶跃拉伸载荷作用的问题。这一方法计算简便，省机时，一些典型的例子已开始作出[29]。参考文献[30]将奇异四分之一边界元推广到裂纹的

动态问题中来。但是，边界积分方程是经过拉氏变换的，必须反演才能得出实际结果，而反演的困难与计算精度是需要进一步研究的。

三、断裂动力学问题分析研究的概况

1. 静止裂纹受突加载荷作用的问题

静止裂纹受突加载荷作用的问题是瞬态问题。Maue[31]研究受拉伸载荷作用的无限弹性板中，突然出现一条半元限 长裂纹的瞬态问题。这一问题相当于在一预先存在的半元限长裂纹的上下表面上突加一相等而相反的均布阶跃拉应力 σ_0 这一问题的动应力强度因子的解为：

$$K_I = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{C_2}}{C_1} (\frac{C_R}{C_2}) \sigma_0 \sqrt{C_2 t} \tag{12}$$

式中 C_2 为剪波速度，C_1 为纵波速度，C_R 为 Rayleigh 波速度。由上式看出，K_I 随 C_2t 的平方根成比例地增长，当时间无限增长时，K_I 趋于无限大，因此动应力强度因子无法与静态情况比较。此外，式中包含 C_R，说明法向冲击载荷产生表面波。对 Ⅲ 型裂纹研究的结果证明 $K_{\text{Ⅲ}}$ 仅与 C_2 有关，不产生表面波。

Sih 等人[32]研究有限长裂纹 $2a$，求出裂纹的表面上受对称的阶跃载荷的动应力强度因子的数值解，看出有限长裂纹的动应力强度因子开始时，与半无限长裂纹的相同，当另一端产生的压缩波传到该端时，K_I 呈 下降趋势，然后在静应力强度因子水平线上摆动，最终趋于静载的应力强度因子。在冲击力作用下静止裂纹的解还有：无限体内的圆币形裂纹受阶跃扭转载荷作用的问题[33]；受弯曲应力突然作用的含穿透裂纹无限薄板的问题[34]。在两个半平面之间夹着的正交各向异性板中两个共面裂纹受突加载荷 的问题等等。

以上结果都是无限体或无限板的解，对于有限体或有限板必须用近似计算方法。Chen[35]应用 Lagrange 有限差分法研究有中心裂纹的板，受阶跃函数的均匀拉伸应力作用得出动应力强度因子随时间变化的曲线。无论是在 Rayleigh 波从裂纹的一端达到另一端的时刻由入射波在裂纹面上产生的散射膨胀波从裂纹的一端到最近的边界反射回该点的时刻、相对应的等容波到达的时刻以及第二次反射回的时刻等等都能发现这些波对动应力强度因子的影响。用有限差分法 HEMP 3D 程序研究长方体中有椭圆片状裂纹受冲击力作用的三维问题请见参考文献[36]。

2. 受常载荷作用下裂纹快速扩展问题

（Ⅰ）半无限长裂纹

Yoffe[37]最早求得运动裂纹的解。她假设在受拉伸力的无限板中，运动裂纹的长度与速度不变，这一问题不太现实，不作介绍。Craggs[38]研究一半无限长裂纹沿 x 轴以常速度运动的问题，在裂纹表面上作用一对称的集中力，集中力随裂纹以速度 V 向前运动。稍后，[39]研究了在受拉伸应力 σ_0 作用下的无限板中突然出现一半无限长裂纹以速度 V 沿 x 轴运动的问题 。他用积分变换与 Weiner-Hopf 方法求得动应力强度因子，而 Cherepanov[20]应用自相似方法十分简便地得出了相同的结果。接着 Freund[40]研究了半无限长裂纹以常速度 V 向前运动，在裂纹表面作用任意载 荷分布的情况。用位错连续分布的叠加法求解了半无限长裂纹的表面上突加对称法向集中力的动应力强度因子，所得结果与

用权函数的解相同。

半无限长裂纹的解是有用的，只要有限长裂纹从另一端产生的压缩波或边界的反射波未达到该端时，都可以应用。

（Ⅱ）自相似裂纹

假定受拉伸应力 σ_0 作用的板中，从 $t=0$ 时刻起，在原点突然出现裂纹，沿 x 轴的双方以常速度 V 运动，在 t 瞬时，裂纹长从零扩展到 $2Vt$。这一问题称为 Broberg 问题。Broberg 问题是一个典型的自相似问题。但是，Broberg 本人却用积分变换和奇异积分的方法求出问题的精确解。后来，Craggs[41]用自相似方法求出同一问题的解，避免了奇异积分方程的复杂计算。Erdogan[42]用自相似方法求出Ⅱ型 Broberg 裂纹问题的精确解。与数值解比较，发现 Broberg 解就是在运动的初始阶段，对这一问题也可以应用，误差不超过5%。

应用自相似方法还能求出 Broberg 问题中其他的不同载荷和不同边界的许多问题。例如：在坐标原点处作用瞬时集中脉冲载荷，或作用随时间线性变化的集中力 Pt 的 Broberg 裂纹扩展问题[20,43]。

（Ⅲ）以变速度运动的裂纹

Kostrov[44]最早研究半无限长裂纹在静载作用下Ⅰ型裂纹的非匀速运动的解。研究有限长裂纹以加速度扩展的问题请参见参考文献[45]，当载荷 σ_0 为常数时，对以加速度运动的半无限长裂纹的动应力强度因子的研究结果表明；计算匀速运动裂纹的动应力强度因子的公式可近似地用在非匀速运动的裂纹上，只要将式中的速度改为瞬时速度即可。推广到裂纹尖端的应力和位移场的一般解，对于非匀速运动也可以应用，只须将式中的速度改为瞬时速度。

（Ⅳ）裂纹的分叉与斜叉问题

实验证明，当裂纹高速运动时，在一定条件下发生裂纹偏离运动平面。裂纹不沿裂纹所在平面运动是斜叉问题(Kinking)，裂纹沿两个或多个方向出现分枝是分叉问题。裂纹的分叉与斜叉问题的解法相同。斜叉的理论分析是 Achenbach[46]首先得出的。该文献研究Ⅲ型半无限长静止裂纹，在定常 SH 平面应力波冲击下，发生动态斜叉，斜叉的扩展速度设为常值。由于柱面波的质点速度具有自相似性质，波动方程经过 Chaplygin 变换简化为带缝条域内的 Laplace 方程，然后由 Schwarz-Christoffel 映照得到关于上半复平面上的一个求解析函数的 Riemann-Hilbert 问题。作者接着又对Ⅰ型裂纹在冲击载荷作用下的斜叉问题，也进行了同样的分析[47]。在这问题中同时出现了互相耦合的膨胀波与等容波。上述方法导致两个上半复平面的 Riemann-Hilbert 问题，它们在实轴上有耦合的复杂边界条件，经过利用 Hilbert 变换形成积分方程。后来，他们在小角度斜叉中，得出近似的数值结果[48]。

Achenhach[49]应用与斜叉相同的方法研究Ⅲ型半无限长静止裂纹受冲击后的两分叉问题。Bergers 等[50-53]采用动位错方法求解斜叉与分叉问题，得到动应力强变因子的数值结果。他们把动分支裂纹看成位移场的间断线，用沿间断线上连续分布的动位错来描述，按自相似方法考虑从裂纹尖端产生并沿分叉方向运动的螺位错（Ⅲ型）或刃位错（Ⅰ型）所产生的应力场，经过与外载叠加后，根据边界条件建立奇异积分方程（Ⅲ型）或对偶积分程（Ⅰ型），然后求数值解。

（Ⅴ）界面上的运动裂纹

裂纹在两种不同介质连接的内表面上的运动常发生在自然界的地层与人造的复合材料中。地层的内表面(或称界面)是最薄弱的地方,是最容易出现裂纹的地方。裂纹沿两个半空间不同介质的界面上运动是最简单的模型,但是问题仍然很复杂,对于内平面问题就有四个波速,对于反平面问题也有两个波速。目前,得到的解析解有:半无限裂纹平面应变条件下的稳定问题[54];在定常波作用下,半无限裂纹以常速运动的反平面问题[55]与非均速运动的反平面问题[56];从零扩展的反平面 Broberg 问题[57]。与静态界面裂纹类似,Ⅰ与Ⅱ型运动裂纹尖端应力场具有根号二分之一的振荡奇异性,参考文献[58]假设裂纹尖端光滑接触模型,消除了裂纹尖端不合理的振荡奇异性。关于界面裂纹其他问题的解还有:在板条两层介质的内表面上运动的裂纹[59],在层状材料的界面运动的自相似裂纹[60]。参考文献[61]研究Ⅲ型运动界面裂纹的应力场,得出根号二分之一的奇异性,裂纹运动速度大约达到剪波速的0.58倍时,最大周向应力偏离了界面。

3. 裂纹的动态弹塑性问题

(Ⅰ)运动裂纹小范围屈服情况

Baker[39]求得半无限长裂纹以常速运动裂纹尖端的应力与位移场后,曾分析裂纹尖端附近的歪能和最大剪应力与方向角 θ 的关系。所得的等色线,在低速时与动光弹的实验符合。但是,在高速时,实验得到的等色线两翼向前倾,而解析解则向后倾。参考文献[62]用屈服准则计算出的塑性区的形状,在高速时也向后倾。

(Ⅱ)运动裂纹的 D. M 模型

仿效静态断裂力学中的 D. M 模型,在动态断裂力学中,Erdogan[63]求出Ⅲ型自相似扩展裂纹受均布载荷作用下的塑性区尺寸,速度愈大塑性区尺寸愈小,当 $V \to C_2$ 时为零。Aodi 等人[64]求出在原点上受集中力Ⅰ型自相似扩展裂纹的应力场,按 D. M 模型求出裂纹的张开位移与塑性区尺寸。参考文献[65]求出无限体内圆币形裂纹自相似扩展时的 COD,并详细讨论了张开位移的形状。参考文献[66]用叠加法求出半无限长裂纹在非稳态情况下的塑性区尺寸与 COD。对于非稳定裂纹,塑性区尺寸与 COD 都与两端的速度有关,当两端速度相等时得出稳态解。该文献对于Ⅰ型裂纹仅提出类似的近似公式,未予讨论。

(Ⅲ)运动裂纹尖端的弹塑性奇异场

运动裂纹在稳态情况下,裂纹尖端的弹塑性奇异场首先是 Slepyan[67]得到的,他研究了平面应变与理想弹塑性情况下的Ⅰ型与Ⅲ型裂纹。Achenbach 等人[68]研究了类似的问题,Lo[69]将参考文献[67]的工作扩展到Ⅱ型裂纹。在参考文献[67]中,Ⅰ型裂纹的应变无奇异性,高玉臣与 Nemat-Nasser[70]重新研究Ⅰ型与Ⅲ型裂纹,得出Ⅰ型裂纹的应变有奇异性,并在参考文献[71]中研究了Ⅱ型裂纹。他们还在幂硬化材料情况得出Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型统一的奇异型,其形式为:

$$\sigma_{ij} \sim (\ln R_0/r)^{1/(n-1)}, \varepsilon_{ij} \sim (\ln R_0/r)^{n/(n-1)}$$

Nemat-Nasser[72]系统地考查了弹塑性固体中两类不同的本构关系的材料对运动裂纹尖端奇异场的影响。高玉臣[73]假设了一种弹－粘塑性本构模型代替了通常的弹塑性模型,对某适当的位移模式得出了单参数的奇异解。

(Ⅵ)裂纹动态弹塑性问题的近似计算

Kishimoto 等人[74]用 J 积分方法计算了静止的中心裂纹与斜裂板的受动载荷的弹塑

性问题。Kannian 等人[75]用有限元法，取 $J_{ID}=(1-\nu^2)/E, K_{ID}^2$ 作为断裂判据，计算了用AISI4340钢制的三点弯曲试件，发现与实验不符合，考虑材料的塑性后，计算结果才与实验符合，后来他们又用有限元进行了弹塑性分析。

4. 裂纹在其他材料中的传播

半无限长反平面剪切裂纹在线性粘弹性介质中动态稳定传播的研究见参考文献[76]。参考文献［77］应用以 Barenblatt 模型为基础的动能量释放率作为断裂判据，求出稳态运动裂纹在粘弹性材料中的速度。参考文献［78］得出了两个平行稳态传播的Ⅲ型裂纹在粘弹性介质中的动能量释放率。

5. 运动裂纹尖端的温度场

运动裂纹的前沿一般都出现塑性区，塑性功率是不可逆的能量，将转化为热与光。根据 Doll[79]与 Fuller[80]用树脂树料的实验证实，当 $V=200\sim650$m/s 时，裂纹尖端处上升到500K。

Rice 与 Levy[81]假设塑性区是一条无厚度的线，并且断裂能全部转变为塑性区的温度增长，计算出的温度比实验值高出一倍。为了解释这一差异，Williams[82]提出塑性区应该有一定的 厚度，经 Parvin[83]计算，若厚度在0与 0. 3μm 之间则与实验符合较好。Yatomi[84]应用 Curtin[85]所发展的局部平衡理论，给出围绕快速运动裂纹的热传导与能量守恒方程组，考虑裂纹表面温度很高于周围的温度，作为了一些简化，得出闭合形式的简单解，这解与 Fuller 的实验符合。Nguyen[86]按散热介质动力学对运动裂纹进行了研究，认为在 $G\neq 2r_0$ 时，裂纹尖端为一热源，温度有 logr 的奇异性。Weichert 等[87]假设裂纹尖端热源为圆形，热源分布均匀，计算了玻璃在不同的裂纹传播速度下围绕裂纹尖端的温度场。汪懋骅[88]将上述问题的热源分为点热源与分布热源进行了计算。参考文献［89］则将热源形状假设为扇形，热源分布均匀求出运动裂纹尖端的温度场。Atluri 等[90]假设热源为矩形，用有限元计算了钢中运动裂纹尖端的温度场。Sung[91]研究了快速裂纹在粘弹性介质中裂纹尖端温度场的问题。

四、断裂判据与动断裂韧性

含裂纹结构受动载作用，可能发生裂纹的起裂、传播与止裂三个过程。在这三个阶段控制裂纹的条件分别称为静止裂纹的起裂判据与运动裂纹的传播和止裂判据。

1. 裂纹的起裂判据

对于在冲击力作用下裂纹的起裂主要是 K 判据。最大应力强度因子判据认为当动应力强度因子达到或超过材料的起裂断裂韧性时裂纹失稳扩展，即

$$K_I \geqslant K_{Id} \tag{13}$$

式中 K_{Id} 是材料的起裂断裂韧性，由实验确定。K_{Id} 与加载速率有关，而 K_I 是裂纹长、应力与时间的函数。$K_{Id}(\sigma)$ 与静态断裂韧性 K_{Ic} 不同，不是常量，它随加载速率的增加而单调下降。

最初一些研究者[92] 等用动态撕裂试验或切口冲击试验按静力条件计算 K_{Id} 值。以后，Kalthoff 等[93]改用落锤作用下的三点弯曲试件作实验，发现裂纹起裂时间迟于最大载荷的到达时间，说明按静力条件计算是不合理的，提出需要按动力学问题对试件进行分析。后来，Stockl[94]用有限差分法对冲击弯曲试件作了完全动力学分析，得出了与实验一致的结果。除了落锤加载方式外，Sommer[95]应用了冲击波加载的实验求 K_{Id} 。

2. 运动裂纹的传播与止裂判据

当裂纹在材料中以 V 快速运动时，动应力强度因子应该与材料的动态断裂韧度相等，即

$$K_I = K_{ID} \tag{14}$$

其中 $K_{ID}(V)$ 是材料的动态断裂韧性，与运动速度有关，K_I 与速度、应力和瞬时裂纹长度有关。上式是断裂动力学基本方程组的补充方程；如果裂纹沿自身所在平面运动，已知 K_{ID} 用上式可以确定裂纹速度；相反地如果用实验方法知道裂纹速度，则用上式确定材料的断裂韧性。实验证明，当裂纹速度较大时，断裂韧性变化很快，增长很大，无论是树脂材料[96]还是结构钢[97]都有类似的实验结果。

当动应力强度因子小于或等于材料的止裂断裂韧性时，运动裂纹停止，即

$$K_I \leqslant K_{IR} \tag{15}$$

K_{IR} 是材料的止裂断裂韧性的值，可用双悬臂梁等实验方法确定。一些研究者对止裂断裂韧性有不同的看法，有的认为 $K_I < K_{ID}$ 时裂纹停止运动，所以只需要将式(14) 改为 $K_I \leqslant K_{ID}$，不需要再列成两个判据，也有人认为 K_{ID} 并不等于 K_{IR}。

3. 运动裂纹传播的 J 积分判据

J 积分判据认为裂纹在运动时应该满足条件

$$J = J_D \tag{16}$$

式中 $J_D(V)$ 是材料的动断裂韧性与速度有关，而 J 是裂纹长度（或时间）、应力与裂纹运动速度的函数。这一判据对于延性金属材料十分有用。Zehnder 等[98]用焦散法实验与高速摄影技术研究4340钢三点弯曲试件受冲击载荷作用下的动断裂韧性，他根据实验的焦散直径 D 求出 J 积分随时间变化的规律，从而得出材料 4340 钢的 $J_D(V)$。他还用实验得到的 应力边界条件，应用弹塑性有限元计算 J 积分随时间变化的规律，计算结果与实验比较，符合较好。

4. 运动裂纹的分叉条件

当运动裂纹处于不稳定的条件下时，将出现分叉现象，这些不稳定条件称为分叉判据。这些判据有的根据临界速度的概念[99]，有的根据临界的动应力强度因子[100]，有的根据应变能，也有的考虑裂纹尖端微结构的影响。其中，同时能够给出分叉条件与分叉角的有以下两个判据：a) Theocaris[101]提出在沿 Misess 屈服边界上，裂纹按最大歪应变能密度的方向传播；b) Ramuln[102]提出分叉的必要条件为 $K_I \geqslant K_{Ib}$，充分条件为 $r_0 \leqslant r_c$，其中 K_{Ib} 与 r_c 是材料有关的参数，r_0 与裂纹尖端的微结构、裂纹运动速度与远处应力有关，称为特征距离，有公式计算。必要条件说明裂纹分几个叉时动能量释放率需要满足的条件，而充分条件则包含着运动裂纹的偏移。

除上述几种动态判据以外，还有动态 COD 判据，不再介绍。

五、今后的一些展望

在断裂动力学中由于考虑了惯性力，数学处理变得很复杂，因此迄今为止的研究多半是从宏观研究出发，以线弹性动力学为基础，所研究的对象与解决的问题都是最简单的情况。因此，我们认为对于断裂动力学要从以下几方面进行研究：

1. 对断裂动力学中较复杂的现象与问题从理论与实验两方面进行研究：如分叉现象、止裂现象、非均匀运动裂纹、三维裂纹问题与复杂结构中的裂纹问题等。

2. 从材料的线弹性向弹塑性、粘弹性与弹-粘塑性方向发展。如裂纹尖端的弹塑性应力、应变场与温度场的研究，寻求合理的快速延性断裂的物理参数与断裂判据，运动裂纹尖端附近场的有限变形研究。

3. 从宏观研究向与微观相结合的研究方向发展。如裂纹快速传播的机理、在宏观裂纹前微裂纹的产生与聚合、位错运动对裂纹扩展的影响、空洞的形成与聚合导致的快速断裂等。

4. 从均匀介质向非均匀介质方向发展。如复合材料与陶瓷的断裂动力学问题、多层介质中界面裂纹的扩展等。

5. 从一般冲击加载向高速或超高速冲击方向发展。在高速率载荷作用下，材料的物理与化学性能有较大的改变，有必要与本构关系连系起来，研究材料在高冲击力作用下的断裂参数与判据。

弹性波散射研究的动向

所谓弹性波的散射，指的是在弹性波传播过程中遇到了某些障碍，例如某些边界和弹性材料 的某些变化等等，定义域内的弹性波就要发生变化，弹性波的这些变化的总体称之为弹性波的散射，其中包括弹性波的反射，折射和绕射等。从数学力学角度观察问题，任何一个弹性动力学问题都可以归结为一组控制方程，包括：偏微方程或积分方程；初始条件；边值条件。弹性波的散射问题用数学工具可表示如下：

$$u = u^{(i)} + u^{(s)} \tag{17}$$

其中 u 为弹性波场总的位移，$u^{(i)}$ 为入射波场的位移，$u^{(s)}$ 为散射波场的位移。弹性波散射问题分为正问题与反问题两大类。弹性波散射的正问题即：已知入射波场求散射波场，是一个初值、边值问题。弹性波散射的反问题是：在弹性波散射的控制方程组中某些参数或条件是未知的，但通过各种测量手段知道某些别的数据（如弹性波的散射数据），即所谓附加条件，再利用这些附加条件去定解原有控制方程组中的某些未知量。所谓定解是从物理角度看问题，认为这些方程的收敛性是有保证的。更具体一点说，弹性波散射的反问题要求通过各种手段，测得弹性波的散射数据，然后根据这些数据反推出：1）弹性波发散源的方位；2）确定弹性介原常数及密度的变化；3）确定散射体或裂纹的位置、大小与方向等等。

弹性波散射的研究由于在 解释地震现象、地震监测、冲击下材料和结构的响应、新型材料如复合材料和陶瓷材料受冲击下波的传播、断裂动力学等实际问题中越来越广泛的应用，起到越来越重要的 作用，所以受到人们普遍的重视。

一、弹性波散射的正问题

弹性波散射正问题求解的困难性与前面叙述的断裂动力学问题相同，主要在于其真实的物理现象本身特别复杂。一般说来，弹性波有三种类型：纵波（P 波相当于声波）和两个横波分量（SV 波与 SH 波，相当于电磁波）。这些波在边界上相互耦合，产生类型的转换和产生新波型，如 Rayleigh 波、Love 波和 Stoneley 波等等。波型的转换，多次的反射、折射和新波型的产生交织在一起，相互影响，使问题变得异常复杂，其求解的难度相当大。弹性波散射正问题的分析方法与前面断裂动力学的分析方法许多是共同的，对于含裂纹体的散射问题则完全相同，因为散射体不一定是裂纹，也有它的特殊性，所以现在作

简要的介绍。

1. 弹性波散射正问题的分析方法

（Ⅰ）积分方程法

这种方法是解决弹性波散射的最有效方法。积分方程的导出一般是从弹性动力互等原理出发或直接从积分变换入手，得到问题的积分方程，最后的积分方程类型主要有两大类，Fredholm 型积分方程和具有 Cauchy 型积分核的奇异积分方程。在后面关于裂纹的弹性波散射概述中明显可见大部分研究者都采用这种方法。积分方程法中的主要困难在于 Laplace 和 Fourier 变换的反演。一般来说，这些反演都是在复平面上进行，这里积分路线的选择、奇点和分枝点位置的确定及其性质的分析、收敛性的证明都是相当复杂的，只有解决了这些问题，再利用各种渐近分析方法如最速下降法和稳态相位法等，才能对问题进行正确的求解，得出全面正确的分析。值得提出的是，由 Cagniard1962年提出的，后又由 De-Hoop 改进的，所谓Cagniark-De-Hoop 反演方法对解决无限空间中瞬态波传播问题是非常有效的。最近该方法又被推广到解决半无限空间上多层介质的裂纹问题[44]。

（Ⅱ）转换矩阵法（T 矩阵法）

转换矩阵法是目前解决任意形状散射体的弹性波散射比较有效的方法，该方法同时由 Pao 等人[103][104][105]和 Waterman[105]提出，这种方法来源于电磁波和声波的散射矩阵理论，见[104，105]中的参考文献，所以弹性波散射的 T 矩阵是电磁波和声波散射理论的直接推广。它的基础是弹性波散射的积分表达式及各种波函数，它的导出就是把积分表述中的已知函数和未知函数用波函数表达，然后考虑到边界条件得到求解未知系数的 T 矩阵方程。转换矩阵的主要特点是如果散射体确定，则转换矩阵 T 不变，即与入射波的性质无关，而且转换矩阵 T 具有某种正定性，其缺点是当散射体的特征长轴比特征短轴大很多时（越扁时），由于截断引起的误差很大。对这一缺点可以用优化截断的方法加以改进[107]。

（Ⅲ）射线法

射线方法是由 Keller 等人[108]提出的，该方法在波动理论中得到了深入发展，Achenbach 等人在他们的专著中[109]详细地阐述了射线方法在弹性波散射理论中的应用，尤其是对裂纹的弹性波散射方法的应用。弹性动力射线方法的思想是把波动方程中的势函数取成级数形式，该级数具有未知的振幅和相位函数，在高频意义下，射线理论结果与实验结果相当吻合。另外 Achenbach 等人把这种方法应用于地震工程[110,111]。

（Ⅳ）其他方法

对于二维的弹性波散射问题，复变函数方法是比较有效的。此外，还有匹配渐进展开法、Born 近似法、波函数展开法与奇异展开法，对于某些问题它们是有效的。至于数值方法与断裂动力学中的方法类似，不再介绍。

2. 弹性波散正问题的研究概况

我们把散射体分为三类：第一类是裂纹，它们的体积为零；第二类是各种形状的物体或空腔，它们的体积不为零；第三类是不规则的边界，在地震波的散射中称为复杂场地。下面依次介绍在这些散射体上弹性波散射的研究概况。

（Ⅰ）弹性波在裂纹上的散射

含有一个平面裂纹的弹性波散射是裂纹散射问题中的基本问题。Fridman[112]首次给