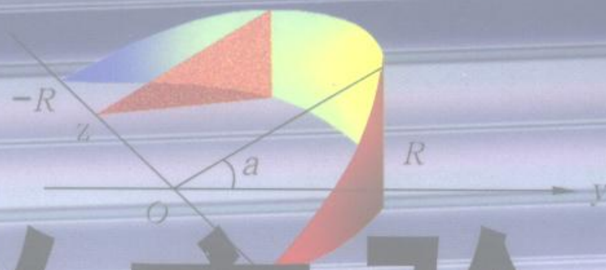
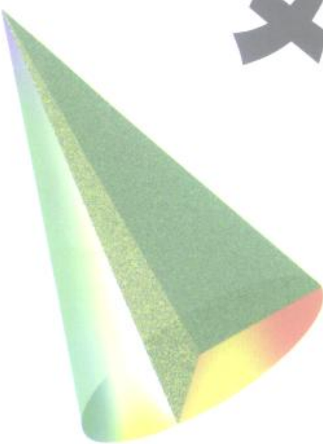
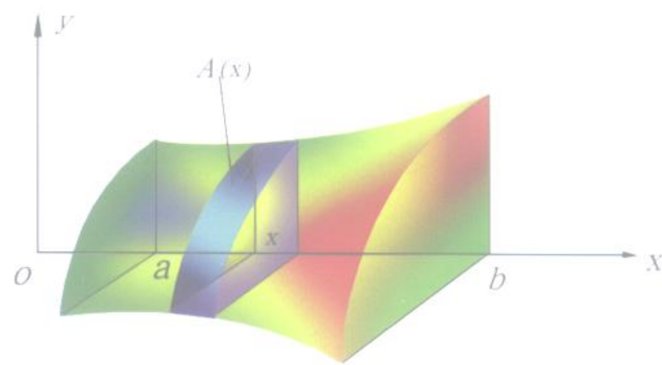
高等院校选用教材系列



数学实验





主　编　谢云荪　张志让
副主编　张光澄　童季贤

科学出版社
Science Press

数 学 实 验

主　编　谢云荪　张志让

副主编　张光澄　童季贤

“四川省高校非数学专业数学教育面向21世纪教学内容与课程体系改革”项目成果

国家工科数学课程教学基地(电子科技大学)资助项目

科学出版社

2000

内 容 简 介

本教材是根据全国高校工科数学课程教学指导委员会制定的《关于工科数学系列课程教学改革的建议》的精神编写的．本书共分三个部分，第一部分绪论；第二部分实验内容包括软件操作实验，基础实验与综合实验；第三部分附录包括三个数学软件（Matlab，Maple，Mathematica）的操作说明与实验参考解答．书中以微积分、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计为知识背景，以实际问题为载体，以数学软件为工具，将数学知识、数学建模与计算机应用三者有机地结合起来，旨在培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力．本书选题典型，由浅入深，层次分明，结构严谨，叙述清晰，具有改革新意．

本书可作为大学一、二年级开设的“数学实验”课程教材，也可供大学数学教师及工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

数学实验/谢云荪，张志让主编．-北京：科学出版社，1999．8
ISBN 7-03-007620-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．①谢…　②张…　Ⅲ．高等数学-实验　Ⅳ．013-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 20335 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999 年 8 月第 一 版　　开本：787×1092 1/16
2000 年 1 月第二次印刷　　印张：17 3/4
印数：13 501—17 500　　字数：400 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

《数学实验》编写组

顾　　问　王荫清（四川大学）

组　　长　谢云荪（电子科技大学）

副 组 长　张志让（成都气象学院）　张光澄（四川大学）

　　　　　童季贤（西南交通大学）　钟尔杰（电子科技大学）

成　　员　（以姓氏笔划为序）

　　　　　王茂芝（成都理工学院）　田继东（西南石油学院）

　　　　　冯家竹（四川轻化工学院）　刘启宽（四川轻化工学院）

　　　　　向晓林（四川大学）　华　巍（成都师范专科学校）

　　　　　朱东鸣（西南工学院）　杨汉生（西南工学院）

　　　　　李天瑞（西南交通大学）　胥泽银（成都理工学院）

　　　　　郭　科（成都理工学院）　徐全智（电子科技大学）

　　　　　蔺大正（四川工业学院）　薛长虹（成都气象学院）

前　　言

1989年著名科学家钱学森教授在“中国数学会教学与科研座谈会”上提出：电子计算机的出现对数学科学的发展产生了深刻的影响，理工科大学的数学课程是不是需要改造一番？时隔近10年，各校都在探索大学数学教学改革．现在，开设“数学实验”已成为共识，因为一方面“数学实验”可以在数学教学中能对学生加强“用数学”的教育，培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力；另一方面“数学实验”可以将数学教学与计算机应用结合起来，培养学生进行数值计算与数据处理的能力；同时可以激发学生学习数学的兴趣．

“数学实验”是大学数学课程的重要组成部分，是与微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程同步开设的重要教学环节，它将数学知识、数学建模与计算机应用三者融为一体．通过“数学实验”使学生深入理解数学基本概念和基本理论，熟悉常用的数学软件，培养学生运用所学知识建立数学模型，使用计算机解决实际问题的能力．

本书内容分为三个部分．第一部分绪论，说明为什么要开设“数学实验”？什么是“数学实验”？并介绍了一个“数学实验”典型范例．第二部分是实验内容，分为“软件操作实验”、“基础实验”和“综合实验”三篇．“软件操作实验”是让学生学会使用三个数学软件（Matlab，Maple，Mathematica，)；“基础实验”是以高等数学、线性代数与概率统计三门课程知识为基础的实验；“综合实验”是综合应用以上三门课程知识、难度较大或少量超出基础知识范围的实验．三部分实验安排层次分明，由浅入深，“软件操作实验”是基础，“基础实验”是主体，“综合实验”是延伸与扩展，是“数学建模”课程的接口．第三部分附录有两部分，一部分是三个数学软件的操作说明；另一部分给出了“基础实验”与“综合实验”的参考解答．由于实验课题的开放性，所给的参考解答不一定是最好的，因此，希望读者自己独立思考进行实验，必要时才看参考解答，这样才能逐步提高自己分析问题和解决问题的能力．本书实验课题的选材十分广泛，既有物理、化学、生物等方面的实际问题，又有经济及日常生产、生活中的实际问题，不少内容不仅具有实用价值，而且富有趣味，引人入胜．

本书实验课题的编写结构包括以下几点：

（1）问题．写明所要解决的实际问题．

（2）实验目的．写明通过实验所要达到的目的，包括在数学知识、数学建模以及计算机应用等方面所要达到的目的．

（3）预备知识．说明完成这个实验课题应该具备的数学基础知识及相关知识．如果

一、二年级学生已经具备了的知识就说明知识点，如果不具备的就要加以介绍.

(4) 实验内容与要求. 实验内容要具体，实验要求要明确.

(5) 思考问题. 提出一些类似问题或扩展性问题.

实验结束要求学生写出实验报告. 实验报告的形式可以包括以下几点：

(1) 问题分析与建立模型. 阐明建立数学模型的过程.

(2) 计算过程. 包含采用什么算法，使用什么数学软件，以及计算详细过程及结果.

(3) 结果分析. 将结果回到实际问题进行分析、讨论、评价或推广.

本书的主要对象是大学一二年级学生，也可以是高年级学生. 由于“数学实验”具有模块式的特点，因此在使用安排上有较大的灵活性，既可以单独设课，又可以选择某些实验课题结合高等数学、线性代数与概率统计三门课程的教学内容同步进行. 在教师指导下一般只完成部分实验课题，其他课题由学生自己课外独立完成.

1994 年起国家教委与中国工业与应用数学学会在全国高校开展大学生数学建模竞赛，5 年来，由于四川省教委与各高校的重视，我省已有 30 所高校 631 个队 1893 名学生参加了竞赛，一万多名学生学习了数学建模课程或参加数学建模培训，广大师生反映数学建模活动对于培养学生的创造性思维、意识和能力，提高学生的综合素质具有特殊的作用，产生了极好的效果，使我们感到有必要将数学建模的思想和方法渗透到数学基础课教学中去，从而认识到开设“数学实验”的必要性和重要性. 数学课程是非数学专业共同的重要基础课程，量大面广，对于高校各专业人才素质培养关系重大，为了进一步推动和深化我省数学教学改革，四川省教委批准了立项课题“四川省高校非数学专业数学教育面向 21 世纪教学内容与课程体系改革的研究与实践”. 本教材就是课题组的研究成果.

本书由谢云荪、张志让任主编，张光澄、童季贤任副主编.

绪论由谢云荪、张志让编写，其中典型范例由钟尔杰、杨孝春编写，其他各篇各专题的编者如下：

钟尔杰（第二篇实验 2，5，14，15，21，附录 Matlab 软件），

向晓林（第二篇实验 19，25，第三篇实验 4，8）

童季贤（第二篇实验 8，9，24，第三篇实验 9）

胥泽银（第二篇实验 13，20）

郭　科（附录 Mathematica 软件）

李天瑞（第二篇实验 11，第三篇实验 1，5）

薛长虹（第一篇实验 1，2，3，4，第二篇实验 16，17）

王茂芝（第一篇实验 9，10，11）

朱东鸣（第一篇实验 5，6，7，8，附录 Maple 软件）

田继东（第二篇实验 4，12，18，第三篇实验 3，6）

蔺大正（第二篇实验 3，6，10，22）

刘启宽（第三篇实验 2）

冯家竹（第三篇实验 10）

华　巍（第二篇实验 1，7，23）

杨　韧（第三篇实验 7）

本书由清华大学肖树铁教授和四川大学王荫清教授主审，他们提出了不少宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢！

在本书编写及试用过程中，得到四川省教委、四川省大学生数学建模竞赛组委会、国家工科数学课程教学基地（电子科技大学）及有关各校的大力支持，在此表示衷心的感谢！

本书图、表除诸论外，是用 3 个数字表示的. 左起第一个数顺序如下：第一篇软件操作实验为 1；第二篇基础实验为 2；第三篇综合实验为 3；附录 1 实验参考解答中第二篇基础实验为 4，第三篇综合实验为 5；附录 2 数学软件操作指南为 6. 例如第 197 页中表 5. 8. 1 表示附录 1 第二篇中实验 8 的第一个表. 又如，第 245 页中的图 6.2.6 表示附录 2 中 2.Maple 软件的第 6 个图. 为了便于读者查阅，作此说明.

编写“数学实验”教材是一项崭新的工作，缺乏经验，虽经努力，但限于水平，仍存在不少问题，希望各位同行专家及广大读者批评指正.

编　者

1998 年 12 月

目　　录

绪　论

同学们在中学都做过“物理实验”与“化学实验”，却没有做过“数学实验”，那么，为什么要做“数学实验”？什么是“数学实验”？我们先从 21 世纪的时代特征谈起.

面向 21 世纪，现代社会正经历着由工业社会向信息社会过渡的变革.信息社会有两个主要特征：

一是计算机技术的迅速发展与广泛应用.计算机技术的发展已经对人类社会的全部生活（包括物质生活与文化生活）产生了十分巨大的影响，以致被称为“改变世界的机器”.计算机的应用不是为了让人们变得无所事事，变得更笨更懒，而是使人们变得更高效、更聪明、更富有想象力和创造力.

计算机最明显的功能就是高速度地进行大量的重复计算，这种高速计算使得过去无法求解的问题成为可能，例如天气预报离开了计算机是不可能的，因此，科学计算已成为与理论研究、科学实验并列为科学研究的三大支柱.由于计算机技术的发展使计算数学的发展日新月异，新的分支不断涌现，例如计算模拟、计算力学、计算物理、计算化学、计算几何、计算数论及计算概率等相继诞生.特别是 2000 多年前早已有的算法的概念，由于计算机的发展，又引起了人们极大的兴趣，对许多同类问题开发了很多计算机算法.人们选择算法，不仅要解决问题，而且还要选择符合要求的几种算法中“最佳”的一个.有些算法虽节省了运行时间，但可能浪费了内存空间，或者是反过来的情况，这就需要找出一个或多个参数有关的最优的或至少是最有效的算法.

计算机仿真实验（即计算机模拟），将所要研究的问题的数学模型转换为输入计算机进行运算的形式，或将所研究的问题设计成实验，将图形显示在计算机屏幕上，由计算机进行大量计算，甚至推导与证明，得出某种新的结论或新的发现.这种研究方法正在部分地代替实际实验或成为其重要的补充.特别是一些自称为“实验数学家”的新潮数学家正在创立一种新的数学研究方法，即主要通过计算机实验从事新的发现.在这些数学家看来，数学正在成为一门“实验科学”.也有一些数学家认为，由于计算机的出现，今日数学已不仅是一门科学，还是一种关键的普遍适用的技术.

二是数学的应用范围急剧扩展.早在 1959 年著名数学家华罗庚教授在《人民日报》发表了文章《大哉数学之为用》，形象地概述了数学的各种应用：“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁等各个方面，无处不有数学的重要贡献.”时至今日，计算机的高速计算使得许多过去无法求解的问题成为可能，大量新兴的数学方法正在被有效地采用，数学的应用范围急剧扩大.由于计算机具有处理大量信息的功能，所以定量分析的技术已经渗透到一切学科领域.如果说二次大战以前，数学主要用于天文、物理，那么，现在数学已经深入到化学、生物以及经济、管理等社会科学领域中.现举几例来说明.

数学对经济学的发展起了很大的作用.1969 年至 1981 年间颁发的 13 个诺贝尔经济

学奖中，有 7 个获奖工作是相当数学化的，其中 Kantorovich 由于对物资最优调拨理论的贡献而获 1975 年奖；Klein 的“设计预测经济变动的计算机模式”获 1980 年奖；Tobin 的“投资决策的数学模型”获 1981 年奖等等. 在经济和管理中，预测是管理（资金的投放、商品的产销、人员的组织等）的依据，而数学则是预测的重要武器，我国数学工作者在气象、台风、地震、病虫害、鱼群、海浪等方面进行过大量的统计预测，获得了良好的效果. 现在不懂数学的经济学家，决不会成为杰出的经济学家.

医学中广泛应用的 CT（X 射线计算机层析摄影仪）的研制成功是本世纪医学的奇迹. 其原理是基于不同的物质有不同的 X 射线衰减系数. 如果能确定人体的衰减系数的分布，就能重建其断层或三维图像，但通过 X 射线透射时，只能测量到人体的直线上的 X 射线衰减系数的平均值（是一积分）. 当直线变化时，此平均值（依赖于某参数）也随之变化. 能否通过此平均值求整个衰减系数的分布呢？人们利用数学中的 Radon 变换解决了此问题，Radon 变换已成为 CT 理论的核心. 首创 CT 理论的 A. M. Cormark（美）及第一台 CT 制作者 C. N. Hounsfield（英）因而荣获 1979 年诺贝尔医学和生理学奖. 由此可以看出数学在 CT 技术中的关键作用.

在设计与制造工业方面广泛地用到数学. 以飞机制造为例，设计师必须考虑结构强度和稳定性，这是用有限元来分析的，而机翼的振动情况则需解特征值问题；为了使飞机省油与提高速度必须找到一种最佳机翼和整个机体的形状；飞机设计在极大程度上以计算为基础，研究描绘机翼和整个机体附近气流的方程. 随着计算机技术的飞速发展，目前以计算机辅助设计（CAD）和计算机辅助制造（CAM）技术为标志的设计革命正在波及整个制造业，CAD 是数学设计与计算机技术相结合的产物. 计算流体力学可以帮助人们设计新的飞行器. 数学模型可以代替许多实验，以前设计某一部件，必须在机械车间建一模型，而今天可以设计一数学模型在计算机上进行模拟，如果改变设计，只要通过键盘打进新的参数即可，这样既成本低又省时，且具有适用性、安全性.

综上所述，21 世纪信息社会的两个重要特征，简言之就是“计算机无处不在”、“数学无处不在”. 根据这一分析，21 世纪培养的科技人才究竟应该具备什么样的数学素质呢？数学素质是数学知识和能力的综合体现. 数学素质除了包含抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力外，还应包含数学建模能力与数值计算能力（含数据处理能力），即会“用数学”解决实际问题，会用计算机进行科学计算.

中国科学院院士吴文俊在《数学教育不能从培养数学家的要求出发》一文中指出：“任何数学都要讲逻辑推理，但这只是问题的一个方面，更重要的是用数学去解决问题，解决日常生活中，其他学科中出现的数学问题. 学校给的数学题目都是有答案的，已知什么，求证什么，都是清楚的，题目也一定是做得出的. 但是将来到了社会上，所面对的问题大多是预先不知道答案的，甚至不知道是否会有答案. 这就要求培养学生的创造能力，学会处理各种实际数学问题的方法.”

中国科学院院士王梓坤在《今日数学及其应用》一文中指出：“精确定量思维是对 21 世纪科技人员共同的素质要求. 所谓定量思维就是指人们从实际问题中提炼数学问题，抽象化为数学模型，用数学计算求出此模型的解或近似解，然后回到现实中进行检验，必要时修改模型使之更切合实际，最后编制解决问题的软件包，以便得到更广泛的方便的应用.”

1992 年美国工业与应用数学学会(SIAM)的一篇论文指出:"一切科学与工程技术人员的教育必须包括愈来愈多的数学和计算科学的内容.数学建模和相伴的计算正在成为工程设计过程中的关键工具.科学家正日益依赖于计算方法以及在解释结果的精度和可靠性方面有充分的经验."美国科学、工程和公共事务政策委员会在一份报告中指出:"今天,在技术科学中最有用的数学研究领域是数值分析和数学建模."

21 世纪培养的各类专业科技人才,应该具有将他所涉及的专业实际问题建立数学模型的能力,这样才能在实际工作中发挥更大的创造性.例如,1981 年 Tobin 建立了"投资决策的数学模型"获得了当年诺贝尔经济学奖;飞机设计师为了寻求最佳机翼与整个机体的形状,需要建立描绘飞机机翼和整个机体附近气流的数学模型;在水资源研究方面,为了建立一套地下水资源评价的理论和方法,需要建立各种地层结构的数学模型.随着计算机的发展,数学渗透到各行业,从卫星到核电站,从天气预报到家用电器,高技术的高精度、高速度、高自动、高安全、高质量、高效率等特征,无不是通过数学模型和数学方法并借助于计算机的计算控制来实现的,所以,说到底,高技术是数学技术.

为了培养学生的定量思维能力和创造能力,就必须在数学教学中培养学生的数学建模能力与数值计算(含数据处理)的能力,加强在"用数学"方面的教育,使学生具有应用数学知识解决实际问题的意识和能力."数学实验"正是为实现这一目标而开设的.

"数学实验"是一种新的教学模式,是大学数学课程的重要组成部分,是与微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程同步开设的重要教学环节,它将数学知识、数学建模与计算机应用三者融为一体.通过数学实验使学生深入理解数学基本概念和基本理论,熟悉常用的数学软件,培养学生运用所学知识建立数学模型,使用计算机解决实际问题的能力.

"数学实验"可以理解为"数学模型方法"的初步实践,"数学模型方法"已成为科学技术中常用的非常重要的方法,它是数学和其他科学技术之间的媒介和桥梁.所谓"数学模型"是指利用数学语言模拟现实、即将某种事物的主要特征、主要关系抽象出来,用数学语言概括地或近似地表达出来的一种数学结构.所谓"数学模型方法"是指利用数学模型解决实际问题的一般数学方法.用"数学模型方法"解决实际问题的过程是根据实际问题的特点和要求,作出某些合理的假设,使问题简化,并进行抽象概括,建立数学模型.然后研究求解所建立的数学模型方法与算法.最后将求解所得到的结果返回到实际中去解释、检验.

由此可见,"数学实验"具有以下特点:

*以问题为载体.*通过实际问题的解决,培养应用数学知识解决实际问题的意识与能力.因此选择适当的实际问题就十分重要.

*以计算机为手段.*实际问题的解决离不开数值计算,计算机的强大功能正是高速计算.

*以软件为工具.*科学计算工具的主体是各种软件,而它们的共同基础是数学软件工具,合理使用软件工具可以使有限的资源发挥更好的效益,避免低水平的重复劳动.因此,进行数学实验要充分利用数学软件.

以学生为主体."数学实验"既然是实验就要求学生多动手、多上机,少讲多练,在老师指导下探索建立模型解决问题的方法,在失败与成功中获得真知.

既然“数学实验”的载体是“问题”，从实际问题出发进行研究，因此选准、选好实验课题就显得十分重要.我们选择实验课题一般遵循以下原则：

量力性.适合大学一二年级的知识水平，在从事数学实验时不需要补充大量知识就可入手；问题的“可读性”好，学生容易理解.

实用性.要有生产、生活的实际背景和较好的应用价值.选择“可移植性”的实际问题，可以使学生从建模和求解过程中不仅能体会到理论与实践之间的相互作用，而且还能从结果的实际意义中看到数学的价值，体会到解决大量的生产、生活中的实际问题离不开数学，提高学习数学的自觉性.

开放性.最好有多种求解模型和求解方法，给学生以发挥聪明才智的空间，比较多种方法的利弊，提高分析问题和解决问题的能力.

趣味性.富有趣味的实际问题，能吸引学生思考，引导学生钻研，启迪学生思维，开阔学生眼界，提高学生学习数学的兴趣.

能体现计算机的作用.实际问题需要通过计算机计算或模拟，不仅在建模求解过程中使用计算机，而且在思考、猜想、探索、发现、模拟、作图、检验过程都可以使用计算机.

“数学实验”要求学生积极主动地参与，把教学过程更自觉地变成学生活动的过程，充分发挥学生的创造性.传统的数学教学模式是：教师讲—学生听—做题—复习—考试，学生一般处在比较被动的状态，不利于激发学生学习数学的兴趣，不利于培养学生的创造精神，学生学了数学后不知道怎么“用数学”.“数学实验”就是为了解决传统数学教学模式的弊端，让学生在大学数学学习阶段，就能面对实际问题，积极思考，主动参与，学会数学建模，学会使用数学软件，亲身体验到数学大有用武之地.

为了帮助大家进一步理解什么是“数学实验”以及“数学实验”的一般方法与步骤，下面我们介绍一个典型范例.

数学实验典型范例：鱼雷击舰问题

一、问题

一敌舰在某海域内沿正北方向航行时，我方战舰恰位于敌舰的正西方向 1n mile 处.我舰向敌舰发射制导鱼雷，敌舰速度为 0.42n mile/min，鱼雷速度为敌舰速度的 2 倍.试问敌舰航行多远时将被击中？

二、实验目的

1.了解建立数学模型的基本方法.

2.学习利用计算机模拟方法解决实际问题.

3.学习使用数学软件求常微分方程的符号解和数值解.

三、预备知识

导数的几何意义及物理意义；可降阶的高阶常微分方程求解.

四、实验内容与要求

1. 用计算机模拟方法模拟鱼雷追击敌舰的过程.
2. 运用所学知识建立微分方程模型.
3. 利用数学软件求微分方程的数值解并作图.
4. 利用数学软件求微分方程的符号解.
5. 运用所学知识求微分方程的解析解.

五、实验过程

1. 用计算机模拟方法模拟鱼雷追击敌舰的过程.

现在我们先介绍什么是计算机模拟. 用计算机模仿实物系统,对实物系统的结构和行为进行动态演示,以评价或预测系统的行为效果,为决策提供信息. 这一实验技术称为计算机模拟(又称仿真). 在对真实系统做实验时,可能时间太长、费用太高、危险太大、甚至很难进行. 采用计算机模拟技术,常常能获得比较满意的结果. 根据模拟对象的不同特点,计算机模拟分为确定性模拟和随机性模拟两大类,求解本问题的模拟属于确定性模拟. 问题的解虽然可以用解析的方法获得,但分析和计算的过程都较复杂. 计算机模拟的方法简单可行,能在较短时间内观察到鱼雷追击敌舰的全过程,并且可以估计鱼雷(或舰艇)的速度变化对追击过程的影响. 我们采用时间步长法,按照时间流逝的顺序一步一步对敌舰和鱼雷的活动进行模拟. 在整个模拟过程中,时间步长是固定不变的.

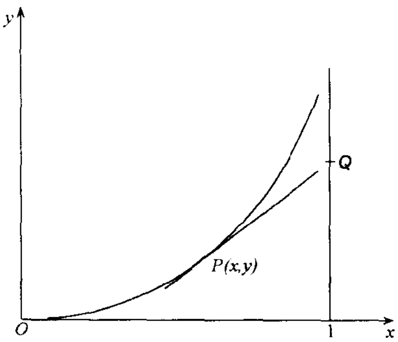


图 1

建立直角坐标系(图 1),设敌舰为动点 Q,鱼雷为动点 P,Q 点的初始位置为 $Q_0(1,0)$,P 点的初始位置为 $P_0(0,0)$.

为了计算出追击过程中每一时刻 P 点和 Q 点的具体位置,需分别描述 P、Q 两点运动的方向、速度及位置变化规律. 由于 Q 点从初始点出发沿 y 轴方向运动且速度为常数 v_0,故 Q 点在 $t=t_k$ 时刻的位置为 $Q_k(1,v_0t_k)$.

由于 P 点的运动方向始终指向 Q,设在 $t=t_k$ 时刻,P 点位置是 $P_k(x_k,y_k)$,则向量 $\overrightarrow{P_kQ_k}=(1-x_k,v_0t_k-y_k)$,此时 P 点的运动方向可由下面单位向量(方向余弦)表示

$$e^{(k)}=(e_1^{(k)},e_2^{(k)})=\frac{\overrightarrow{P_kQ_k}}{\|\overrightarrow{P_kQ_k}\|} \tag{1}$$

$$e_1^{(k)}=\frac{1-x_k}{\sqrt{(1-x_k)^2+(v_0t_k-y_k)^2}},\quad e_2^{(k)}=\frac{v_0t_k-y_k}{\sqrt{(1-x_k)^2+(v_0t_k-y_k)^2}} \tag{2}$$

P 点运动速度为常数 $v_1=2v_0$. 取时间步长 $\Delta t=2\mathrm{s}$,设在 $t=t_{k+1}$ 时刻,P 点的位置为 $P_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1})$,于是 P 点位置变化规律为

$$\begin{cases}x_{k+1}=x_k+v_1\Delta te_1^{(k)}\\y_{k+1}=y_k+v_1\Delta te_2^{(k)}\end{cases} \tag{3}$$

现对追击过程进行模拟，当两个动点的距离小于 0.02(n mile)时，则认为 P 点已经追上 Q 点. 模拟过程实际上是产生平面上两个点列：P_k,Q_k($k=0,1,2,\cdots$)的过程.

程序一(计算机模拟 P 点追赶 Q 点过程)

```
p=[0 0];t=0;dt=2;v0=0.42/60;v1=2*v0;        %设置初始数据 P0,t0,Δt,v0,v1
for k=1:100
  t=t+dt;q=[1 v0*t];u(k)=1;v(k)=q(2);      %计算 Q 点在 tk 时刻的坐标
  w=q-p;d=norm(w);                           %计算 PQ 向量及两点间的距离
  ifd<=0.02,break,end                        %若 P,Q 两点的距离小于 0.05,
                                             则跳出循环
  w=w/d;p=p+v1*dt*w;                         %计算 P 点在 tk 时刻的坐标
x(k)=p(1);y(k)=p(2);                         %分离横坐标与纵坐标
end
plot(x,y,u,v,'o')                            %作图
```

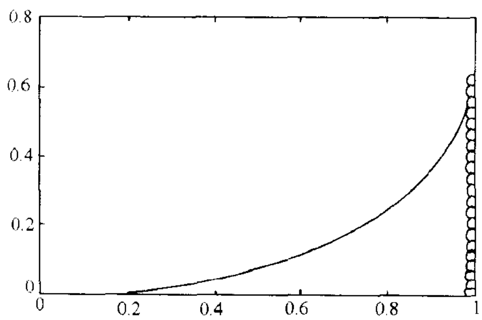


图 2 模拟追击曲线

表 1 不同时刻鱼雷的坐标

第 k 秒	x	y	第 k 秒	x	y	第 k 秒	x	y
2	0.0280	0.0004	34	0.4689	0.0702	66	0.8468	0.3016
4	0.0560	0.0012	36	0.4954	0.0793	68	0.8653	0.3226
6	0.0840	0.0024	38	0.5216	0.0890	70	0.8829	0.3445
8	0.1119	0.0040	40	0.5476	0.0994	72	0.8994	0.3670
10	0.1398	0.0061	42	0.5734	0.1104	74	0.9150	0.3903
12	0.1677	0.0086	44	0.5988	0.1222	76	0.9294	0.4143
14	0.1956	0.0116	46	0.6238	0.1347	78	0.9426	0.4390
16	0.2233	0.0151	48	0.6485	0.1479	80	0.9546	0.4643
18	0.2511	0.0190	50	0.6728	0.1619	82	0.9653	0.4902
20	0.2787	0.0235	52	0.6966	0.1766	84	0.9747	0.5166
22	0.3063	0.0285	54	0.7199	0.1921	86	0.9826	0.5434
24	0.3337	0.0340	56	0.7427	0.2083	88	0.9891	0.5707
26	0.3610	0.0401	58	0.7649	0.2254	90	0.9942	0.5982
28	0.3882	0.0467	60	0.7865	0.2432	92	0.9977	0.6260
30	0.4153	0.0539	62	0.8074	0.2619	94	0.9997	0.6539
32	0.4422	0.0618	64	0.8275	0.2814			

表 2　不同时刻敌舰的纵坐标

第 k 秒	y	第 k 秒	y	第 k 秒	y	第 k 秒	y
2	0.0140	26	0.1820	50	0.3500	74	0.5180
4	0.0280	28	0.1960	52	0.3640	76	0.5320
6	0.0420	30	0.2100	54	0.3780	78	0.5460
8	0.0560	32	0.2240	56	0.3920	80	0.5600
10	0.0700	34	0.2380	58	0.4060	82	0.5740
12	0.0840	36	0.2520	60	0.4200	84	0.5880
14	0.0980	38	0.2660	62	0.4340	86	0.6020
16	0.1120	40	0.2800	64	0.4480	88	0.6160
18	0.1260	42	0.2940	66	0.4620	90	0.6300
20	0.1400	44	0.3080	68	0.4760	92	0.6440
22	0.1540	46	0.3220	70	0.4900	94	0.6580
24	0.1680	48	0.3360	72	0.5040		

程序一中动点 P 的横坐标记为 x，纵坐标记为 y；动点 Q 的横坐标记为 u，纵坐标记为 v. 在 Matlab 环境中运行程序一，屏幕将显示出追击曲线的图形(图 2). 不同时刻鱼雷的坐标如表 1 所示，94s 后鱼雷的位置为(0.9997，0.6539)；不同时刻敌舰的纵坐标如表 2 所示，94s 后敌舰的纵坐标为 0.6580. 由于此时鱼雷和敌舰的距离不超过 0.02n mile，可以认为当敌舰航行至 0.6580n mile 处时将被击中.

2. 建立微分方程模型.

设敌舰的速度为常数 v_0，追击曲线为 $y=y(x)$. 即在时刻 t，鱼雷的位置在点 $P(x,y)$ 处，这时敌舰的位置在点 $Q(1,v_0t)$处(图 1). 由于鱼雷在追击过程中始终指向敌舰，而鱼雷运动方向是沿曲线的切线方向，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_0t-y}{1-x}\quad 或\quad v_0t-y=(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

两边对 x 求导，得

$$v_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad 即\quad v_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\tag{4}$$

由已知鱼雷的速度为 $2v_0$，即

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=2v_0$$

因为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$，所以，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=2v_0$ 即

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2v_0}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

代入(4)式得曲线 $y=y(x)$满足的微分方程模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}{2(1-x)},\ 0<x<1\\ y(0)=0,\ y'(0)=0.\end{cases}\tag{5}$$