

自然辩证法

杂志

2
1974

自然辩证法

杂志

2
1974

上海人民出版社

目 录

马克思的数学手稿

导函数的概念..... (1)

论微分 (14)

用辩证法指导数学研究

人类对数的认识的发展司春林 (31)

怎样认识微分

——学习马克思《数学手稿》札记之一.....吴 咸 (46)

“数学”唯心主义必须批判

——学习《唯物主义和经验批判主义》的体会...谷超豪 (56)

坚持唯物论 批判唯心论

意识来源于社会实践袁 明 单世谊 (70)

实践提高了对脑功能的认识张香桐 (80)

生理能赋予人才智吗?.....李炳文 (95)

《核移植——新的可能性》批注 (103)

癌症可知 癌症可治

癌症是可以征服的袁任平 (117)

癌症可知 癌症可治

——肿瘤问题座谈会纪要..... (122)

银针也能攻癌症.....	俞 云 (136)
癌症患者谈与癌症作斗争的体会(六篇).....	(172)

从实践中学习自然辩证法

我们是怎样取得棉花高产的?

.....	南汇县泥城公社远征大队 (153)
三麦高产的辩证法 ...	江苏省沙洲县塘桥公社六大队 (158)
稻田灭蚊	川沙县江镇公社道新大队 (163)
治虫要知虫	金山县枫围公社供销社支农组 (166)
测虫、报虫和治虫	
.....	复旦大学生物系北桥农作物虫害预测预报站 (172)
征服杂菌夺高产	上海溶剂厂工人写作组 (177)
人工育珠放新彩	上海市水产局人工育珠组 (181)

自 然 史 话

生物生生不息(续)	胡雨涛 (186)
-----------------	-----------

科学家介绍：瓦特和蒸汽机	俞方生 沈继隆 (204)
--------------------	---------------

怎样认识热现象的本质?

——来信来稿及座谈会发言综述	(212)
----------------------	-------

小辞典	(217)
-----------	-------

马克思的数学手稿

导函数的概念^①

I

如果自变数 x 增加到 x_1 ^②，那末因变数 y 就增加到 y_1 。

在 I 这里，我们将研究 x 只以一次幂出现的这种最简单的情况。

1) $y = ax$ ；如果 x 增加到 x_1 ，那末

$$y_1 = ax_1 \text{ 以及 } y_1 - y = a(x_1 - x)。$$

如果现在进行微分运算，也就是说，我们让 x_1 减少到 x ，那末

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

因而

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0。$$

再者，只是由于 x 变为 x_1 ， y 才变为 y_1 的，所以现在同样有

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0。$$

因而

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

① 恩格斯在《反杜林论》中说，马克思遗留下一部极其重要的数学手稿。现在刊登的是其中的两篇论文：《导函数的概念》和《论微分》，系据德文原文译出。1881年，马克思把这两篇论文寄给了恩格斯。正文的两个标题以及正文下边的附注，都是译者加的。

② 在原稿中，变数 x, y 变化后的值记作 x', y' ，现均改为 x_1, y_1 。

变为 $0 = 0$ 。

先设差值，而后又把它扬弃，这种做法从字面上看来将导致**虚无**。在理解微分运算时所遇到的全部困难（就象一般理解否定的否定时一样），正在于要弄清楚它是怎样区别于这种简单的运算过程，以及怎样由此导出实际结果的。

如果我们用因子 $x_1 - x$ 去除 $a(x_1 - x)$ ，并相应地去除等式的左边，那末就得到

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a。$$

由于 y 是因变数，它根本不能进行任何独立运动，所以，在 x_1 没有变为 x 之前， y_1 就不能变为 y ，因而 $y_1 - y$ 也就不能 $= 0$ 。

另一方面我们已经看到，如果不使函数 $a(x_1 - x)$ 变为 0 ，那末在函数中， x_1 就不能变为 x 。因此当等式的两边用因子 $x_1 - x$ 去除的时候，这因子必然是一个有限差值。所以在建立比值

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

的时候， $x_1 - x$ 始终是一个有限差值。由此可知，

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

是一个有限差值之比；据此

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

所以

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a，$$

其中常数 a 起着两个变数的有限差值之比的极限值的作用。

由于 a 是常数，它不能有任何变化，所以化为这个常数的等式右边也就不能有任何变化。在这种情况下，微分过程在左边

I

Aug 1868

1

Wächst die unabhängige Variable x zu x' , so die abhängige Variable y zu y' .

Nun sub 3) in ganz einfache Fall betrachtet, was x nur in der ersten Potenz vorkommt



1) $y = ax$, wenn x zu x' wächst

$y' = ax'$ und:

$y' - y = a(x' - x)$ - Beide parts der Differentialquotient gleich, d.h. wenn

was x' das auf x abnimmt, so:

$x' = x$ $y' - y = 0$, also $a(x' - x) = ax' - ax = 0$. Somit, da y

oder zu y' wird, weil x zu x' , und ebenfalls:

$y' = y$; $y' - y = 0$. Also:

$y' - y = a(x' - x)$ nimmt zu $0 = 0$.

Ende der Differentialrechnung setzen $\rightarrow$ es dann weiter angehen, führt die nicht in
zu. Nachts. Die ganze Schärfe ist im Verständnis der Differentialrechnung
hier (weil es den der negativen der Negativen (bzw. positiven) liegt aber nicht
zu sein, weil es sich von selbst einleuchtet, und nicht anders zu
stellen, in welchen Resultaten führt.

stellen wir $a(x' - x)$ und abgeleitet nach der letzten Seite der
Gleichung, durch den Faktor $(x' - x)$, erhalten:

$\frac{y' - y}{x' - x} = a$. Da y die abhängige Variable, kann x das heißt eine unabhängige
Bewegung vollziehen, y' kann daher nicht $= y$ werden, also auch
nicht $y' - y = 0$, aber was vorher $x' = x$ gewesen
hinreichend haben wir gesehen, dass x' nicht $= x$ werden konnte in
der Funktion $a(x' - x)$, also letztere zu 0 zu machen
der Faktor $x' - x$ war daher notwendig eine endliche
Differenz, zur Zeit welche beiden der Gleichung mit ihr
bezeichnet worden. Im Moment der Herstellung der Verhältnisse,
 $\frac{y' - y}{x' - x}$ ist $x' - x$ daher nicht eine endliche Differenz,
sondern unendlich $\frac{y' - y}{x' - x}$ ein Verhältnis unendlicher Differenzen,
und demnach ist $\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

马克思《导函数的概念》手稿的第一页

(戳记系原稿保存单位加的)

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

进行,这是 ax 这类简单函数的特点。

如果在这个比值的分母中 x_1 减少,那末它将趋近于 x ;一旦 x_1 变为 x ,它就达到了减少的极限。这样一来,就使差值 $x_1 - x = x - x = 0$,从而 $y_1 - y$ 也就 $= y - y = 0$ 。这样我们就得到

$$\frac{0}{0} = a。$$

由于在 $\frac{0}{0}$ 这个表示式中, $\frac{0}{0}$ 的来源和意义的任何痕迹都已消失,所以我们代之以 $\frac{dy}{dx}$,其中有限差值 $x_1 - x$ 或 Δx 以及 $y_1 - y$ 或 Δy ,都作为扬弃了的或消失了的差值而以符号化的形式出现,或者说 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变成了 $\frac{dy}{dx}$ 。因而

$$\frac{dy}{dx} = a。$$

一些唯理的数学家们,固执地认为 dy 和 dx 在量上实际只是无限小, $[\frac{dy}{dx}]$ ① 只是接近于 $\frac{0}{0}$ 。正如在 II 中将要更加清楚地指出的那样,他们借此聊以自慰只是幻想。

对这里已考察的情况,还要提及的一个特点是: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ 以及 $\frac{dy}{dx}$ 同样也 $= a$,因而有限差值[之比]的极限值,同时也是微分[之比]的极限值。

2) 同一情况的第二个例子是:

$$\begin{aligned} y &= x \\ y_1 &= x_1 \end{aligned} \quad ; \quad y_1 - y = x_1 - x$$

① 方括号内的文字是译者加的。下同。

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \quad \frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = 1。$$

II

由于 $y = f(x)$ ，而 x 的函数又是以展开的代数表示式处于等式的右边，所以我们称这个表示式为 x 的原函数，称通过取差值而得到的初次变形为 x 的预先“导”函数，把通过微分过程最终得到的形式称为 x 的“导”函数。

$$1) \quad y = ax^3 + bx^2 + cx - e。$$

如果 x 增加到 x_1 ，那末

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e，$$

$$\begin{aligned} y_1 - y &= a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) = \\ &= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x)。 \end{aligned}$$

因此

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c。$$

预先“导函数”

$$a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

在这里是有限差值之比的极限值，就是说，不管这些差值取得多么小， $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的值总是由这个“导函数”给定的。但是和 I 中情况不同，在这里这个值与微分之比的极限值不相同^①。

如果在函数

$$a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

① 在这篇论文的草稿中接着写道：

“另一方面，现在微分过程在 x 的预先‘导’函数中(右边)进行，而同一个过程必然在左边伴随着这个运动”。

中，变数 x_1 减少，直到其减少的极限，也就是变为等于 x ，那末 x_1^2 变为 x^2 ， x_1x 变为 x^2 ，以及 x_1+x 变为 $2x$ ，从而我们得到 x 的“导”函数

$$3ax^2 + 2bx + c。$$

这里令人信服地表明：

第一，为了得到“导函数”，就必须令 $x_1 = x$ ，所以是严格数学意义上的 $x_1 - x = 0$ ，而无需任何只是无限接近之类的遁辞。

第二，由于令 $x_1 = x$ ，于是 $x_1 - x = 0$ 。这样一来，就根本没有什么符号性的东西进入“导函数”^①。原先通过 x 的变化而引入的那个量 x_1 并没有消失，它只是减少到了它的最小极限值 $= x$ ，并且始终是 x 的原函数中新引进的元素，它通过部分地和自身相结合，部分地和原函数中的 x 相结合，给出了最终“导函数”，也就是给出了减少到它的最小量的预先“导函数”。

在最初的（预先）“导”函数中，把 x_1 减少到 x ，使左边的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{dy}{dx}$ ，因而

$$\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c，$$

所以，导函数显现为微分之比的极限值。

先验的^② 或符号性的不幸只发生在左边，但由于它现在只

① 在草稿中写着下列句子：

“b) 从 x 的原函数找出‘导函数’的过程是这样进行的：我们先着手建立一个有限差值；这给我们提供了一个预先‘导函数’，它是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限值。我们随后进行的微分过程，就是把这个极限值减少到它的最小量。在最初的差值中所引入的量 x_1 并没有消失……”。

② “先验的”一词，原文为 transzendentale。

是作为一种过程的表示式，它的实际内容早已在等式的右边得到见证，所以已经失掉了它吓人的姿态。

在“导函数”

$$3ax^2 + 2bx + c$$

中，存在着与原函数（即与 $ax^3 + bx^2 + cx + e$ ）中的 x 完全不同条件下的变数 x 。所以“导函数”本身又可以作为一个原函数出现，并且通过再一次的微分过程变成另一个“导函数”的母体。只要变数 x 并没有从某一个“导函数”中被干脆除掉，那末这种做法就可以一再重复，所以对那些只能用无穷级数表示的 x 的函数来说，这种做法可以无限地继续下去。大多数情况都是如此。

符号 $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ 等等只表明最初给定的 x 的原函数的“导函数”系谱。一旦人们把这些符号当作运动的出发点，而不把它们当作单纯的 x 的逐次导函数的表示式看待时，它们就变得神秘了。这确实显得很奇怪，怎么消失了的量的比值还得重新经历再次的消失呢？但是，譬如象 $3x^2$ 能够同它的母体 x^3 一样经历一次微分过程，那末这就一点也没有什么奇怪了。人们本来就可以从 $3x^2$ 出发，把它当作 x 的原函数看待。

但是必须注意，事实上只有象在 I 中 x 仅以一次幂出现的那些等式里， $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 才是微分过程的结局。可是在这里，正如 I 中所已指出的那样，结果是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}。$$

所以，在这里通过 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所经历的微分过程，实际上并没有找到新的极限值；只有当预先“导函数”包含有变数 x 时，因而

只有当 $\frac{dy}{dx}$ 保持为某个实在过程的符号时,才有可能找到新的极限值①。

当然,在微分演算中,这决不妨碍符号 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 等等及其组合也能构成等式的右边。但这时人们也知道,这种纯粹符号的等式,仅仅表明以后对变数的实际函数应进行的那些运算。

$$2) y = ax^m.$$

如果 x 变到 x_1 , 那末 $y_1 = ax_1^m$, 以及

$$\begin{aligned} y_1 - y &= a(x_1^m - x^m) = \\ &= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc.} \textcircled{2}, \\ &\quad \text{直到 } x_1^{m-m}x^{m-1} \text{ 这一项}). \end{aligned}$$

因而

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \dots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

如果我们现在把微分过程应用到这个“预先导函数”上,以致

$$x_1 = x \text{ 或 } x_1 - x = 0,$$

那末

$$\begin{aligned} x_1^{m-1} &\text{ 变为 } x^{m-1}; \\ x_1^{m-2}x &\text{ 变为 } x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1}; \\ x_1^{m-3}x^2 &\text{ 变为 } x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1} \end{aligned}$$

而最后

$$x_1^{m-m}x^{m-1} \text{ 变为 } x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}.$$

① 在草稿中上面这句话是这样写的:

“这只能发生在这种地方,那里预先‘导’函数含有变数 x , 因而也能通过它的运动构成一个真正的新值, 因而 $\frac{dy}{dx}$ 是某个实在过程的符号。”

② “etc.”表示“等等”。

这样我们就 m 次地获得了函数 x^{m-1} ，因而“导函数”便是 max^{m-1} 。

在“预先导函数”中，通过令 $x_1 = x$ ，左边的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就变为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{dy}{dx}$ ，因而

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}。$$

微分学的所有运算都可按这种方式来处理，但那是毫无用处的烦琐。不过，这里还是要举一个例子，因为在迄今所举的各例中，差值 $x_1 - x$ 在 x 的函数中只出现一次，因而在构成

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

时，它就从右边消失了。在下面的例子中就不是这种情况：

$$3) \ y = a^x;$$

如果 x 变到 x_1 ，那末

$$y_1 = a^{x_1}。$$

因此

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x (a^{x_1 - x} - 1)。$$

$$a^{x_1 - x} = \left\{ 1 + (a - 1) \right\}^{x_1 - x},$$

并且

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + (a - 1) \right\}^{x_1 - x} &= 1 + (x_1 - x)(a - 1) + \\ &+ \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

因而

$$y_1 - y = a^x (a^{x_1 - x} - 1) = a^x \left\{ (x_1 - x)(a - 1) + \right.$$

$$+ \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 + \\ + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a - 1)^3 + \text{etc.} \Big\}。$$

$$\therefore \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \left\{ (a - 1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a - 1)^3 + \text{etc.} \right\}。$$

如果现在 $x_1 = x$, 因而 $x_1 - x = 0$, 那末我们便得到“导函数”

$$a^x \left\{ (a - 1) - \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 - \text{etc.} \right\}。$$

因而

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{ (a - 1) - \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 - \text{etc.} \right\}。$$

如果我们称花括号中的常数之和为 A , 那末

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x;$$

但是这个 $A =$ 底数 a ① 的耐普尔对数, 所以

$$\frac{dy}{dx}, \text{ 或当用 } y \text{ 的值代入时 } \frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$$

以及

$$da^x = \log a \cdot a^x dx。$$

补充

1) 以前曾经研究过这样的情况: 因子 $(x_1 - x)$ 在“预先导函数”中, 即在有限差值等式中只出现一次。所以通过两边除以 $x_1 - x$ 构成

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

① 这里的“底数 a ”表示 a 是指数函数 $y = a^x$ 的底数。

这个因子便从 x 的函数中被消去了。

2) (在例子 $d(a^x)$ 中) 研究过这样的情况: 在构成 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之后, 因子 $(x_1 - x)$ 还保留在 x 的函数中。

3) 还要研究一下这种情况: 因子 $x_1 - x$ 不是直接从(“预先导函数”的)最初差值等式中演化出来的。

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2};$$

我们用 $x_1 - x$ 去除 x 的函数, 因而也用它去除左边。于是

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \left(\text{或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}。$$

为了把根式从分子中消掉, 分子和分母都用 $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$ 去乘, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} = \\ &= \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}。 \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} = \\ &= \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}。 \end{aligned}$$

论 微 分

I

1) 设要加以微分的是 $f(x)$ 或 $y = uz$ 。 u 和 z 是自变数 x 的两个函数；而相对于依赖它们的函数 y 来说，它们又是自变数。因此 y 也依赖于 x 。

$$y_1 = u_1 z_1,$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z),$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{z_1 \Delta u}{\Delta x} + \frac{u \Delta z}{\Delta x}。$$

如果在右边 x_1 变为 x ，因而 $x_1 - x = 0$ ，那末 $u_1 - u = 0$ ， $z_1 - z = 0$ ，所以 $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ 中的因子 z_1 也就变为 z ，最后在左边 $y_1 - y = 0$ 。因此：

$$A) \frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}。$$

用各项的公分母 dx 乘这个等式，它就变为

$$B) dy \text{ 或 } d(uz) = zdu + u dz。$$

2) 先来研究等式 A)：

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}。$$

在只有一个依赖于 x 的因变数的那些等式中，最后结果总是

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$