自然辩证法

杂志

2

1974

自然辩证法

杂志

2

1974

上海人民出版社

目　　录

马克思的数学手稿

用辩证法指导数学研究

坚持唯物论　批判唯心论

癌症可知　癌症可治

从实践中学习自然辩证法

自　然　史　话

马克思的数学手稿

导函数的概念[1]

I

如果自变数 x 增加到 x_1[2]，那末因变数 y 就增加到 y_1。

在 I 这里，我们将研究 x 只以一次幂出现的这种最简单的情况。

1）$y=ax$；如果 x 增加到 x_1，那末

$$y_1=ax_1 \text{ 以及 } y_1-y=a(x_1-x)。$$

如果现在进行**微分运算**，也就是说，我们让 x_1 减少到 x，那末

$$x_1=x;\quad x_1-x=0,$$

因而

$$a(x_1-x)=a\cdot 0=0。$$

再者，只是由于 x 变为 x_1，y 才变为 y_1 的，所以现在同样有

$$y_1=y;\ y_1-y=0。$$

因而

$$y_1-y=a(x_1-x)$$

---

① 恩格斯在《反杜林论》中说，马克思遗留下一部极其重要的数学手稿。现在刊登的是其中的两篇论文：《导函数的概念》和《论微分》，系据德文原文译出。1881 年，马克思把这两篇论文寄给了恩格斯。正文的两个标题以及正文下边的附注，都是译者加的。

② 在原稿中，变数 x,y 变化后的值记作 x',y'，现均改为 x_1,y_1。

变为 $0=0$。

先设差值，而后又把它扬弃，这种做法从字面上看来将导致**虚无**。在理解微分运算时所遇到的全部困难（就象一般理解**否定的否定**时一样），正在于要弄清楚它是**怎样**区别于这种简单的运算过程，以及**怎样由此**导出实际结果的。

如果我们用因子 x_1-x 去除 $a(x_1-x)$，并相应地去除等式的左边，那末就得到

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=a。$$

由于 y 是**因变数**，它根本不能进行任何独立运动，所以，在 x_1 没有变为 $=x$ 之前，y_1 就不能变为 $=y$，因而 y_1-y 也就不能 $=0$。

另一方面我们已经看到，如果不使函数 $a(x_1-x)$ 变为 0，那末在函数中，x_1 就不能变为 $=x$。因此当等式的两边用因子 x_1-x 去除的时候，这因子**必然**是一个**有限差值**。所以在建立比值

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

的时候，x_1-x 始终是一个有限差值。由此可知，

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

是一个**有限差值之比**；据此

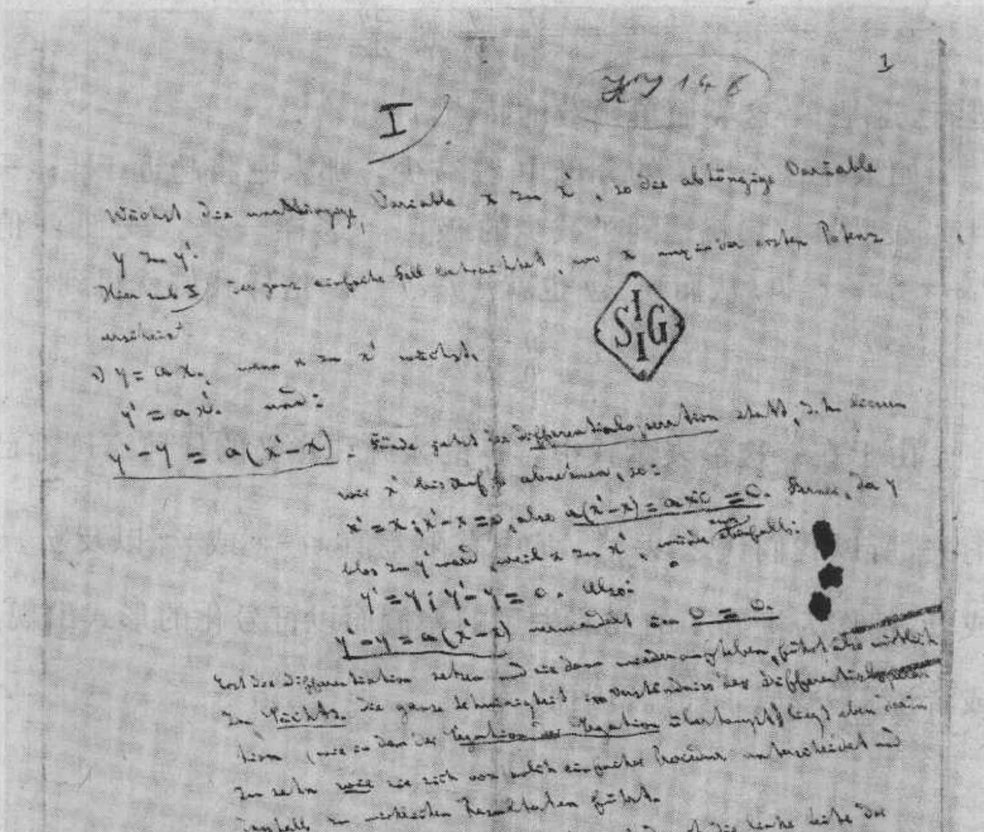
$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

所以

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}=a,$$

其中常数 a 起着两个变数的有限差值之比的**极限值**的作用。

由于 a 是常数，它不能有任何变化，所以化为这个常数的等式**右边**也就不能有任何变化。在这种情况下，**微分过程**在左边



马克思《导函数的概念》手稿的第一页

（戳记系原稿保存单位加的）

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

进行，这是 ax 这类简单函数的特点。

如果在这个比值的分母中 x_1 减少，那末它将趋近于 x；一旦 x_1 变为 x，它就达到了减少的极限。这样一来，就使差值 $x_1 - x = x - x = 0$，从而 $y_1 - y$ 也就 $= y - y = 0$。这样我们就得到

$$\frac{0}{0} = a。$$

由于在 $\frac{0}{0}$ 这个表示式中，$\frac{0}{0}$ 的来源和意义的任何痕迹都已消失，所以我们代之以 $\frac{dy}{dx}$，其中有限差值 $x_1 - x$ 或 Δx 以及 $y_1 - y$ 或 Δy，都作为**扬弃了的或消失了的**差值而以符号化的形式出现，或者说 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变成了 $\frac{dy}{dx}$。因而

$$\frac{dy}{dx} = a。$$

一些唯理的数学家们，固执地认为 dy 和 dx 在量上实际只是无限小，[$\frac{dy}{dx}$]① 只是接近于 $\frac{0}{0}$。正如在 Ⅱ 中将要更加清楚地指出的那样，他们借此聊以自慰只是幻想。

对这里已考察的情况，还要提及的一个特点是：$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ 以及 $\frac{dy}{dx}$ 同样也 $= a$，因而有限差值[之比]的极限值，同时也是微分[之比]的极限值。

2）同一情况的第二个例子是：

$$\left.\begin{aligned} y &= x \\ y_1 &= x_1 \end{aligned}\right. ; \quad y_1 - y = x_1 - x;$$

---

① 方括号内的文字是译者加的。下同。

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=1;\qquad \frac{0}{0}\text{ 或 }\frac{dy}{dx}=1。$$

II

由于$y=f(x)$，而x的函数又是以**展开的代数表示式**处于等式的右边，所以我们称这个表示式为**x的原函数**，称通过取差值而得到的初次变形为**x的预先“导”函数**，把通过**微分过程**最终得到的形式称为**x的“导”函数**。

1) $y=ax^3+bx^2+cx-e$。

如果x增加到x_1，那末

$$y_1=ax_1^3+bx_1^2+cx_1-e,$$

$$y_1-y=a(x_1^3-x^3)+b(x_1^2-x^2)+c(x_1-x)=$$
$$=a(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1-x)(x_1+x)+c(x_1-x)。$$

因此

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c。$$

预先“导函数”

$$a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$$

在这里是有限差值之比的**极限值**，就是说，不管这些差值取得多么小，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的值总是由这个“导函数”给定的。但是和 I 中情况不同，在这里这个值与微分之比的极限值不相同①。

如果在函数

$$a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$$

---

① 在这篇论文的草稿中接着写道：

“另一方面，现在微分过程在x的预先‘导’函数中(右边)进行，而同一个过程必然在左边伴随着这个运动”。

中，变数 x_1 减少，直到其减少的**极限**，也就是变为**等于** x，那末 x_1^2 变为 x^2，x_1x 变为 x^2，以及 x_1+x 变为 $2x$，从而我们得到 x 的**“导”函数**

$$3ax^2+2bx+c。$$

这里令人信服地表明：

第一，为了得到“导函数”，就必须令 $x_1=x$，所以是**严格数学意义**上的 $x_1-x=0$，而无需任何只是无限接近之类的遁辞。

第二，由于令 $x_1=x$，于是 $x_1-x=0$。这样一来，就根本没有什么符号性的东西进入“导函数”①。原先通过 x 的变化而引入的那个量 x_1 并没有消失，它只是**减少**到了它的最小极限值 $=x$，并且始终是 x 的原函数中新引进的元素，它通过部分地和自身相结合，部分地和原函数中的 x 相结合，给出了最终“导函数”，也就是给出了**减少到它的最小量的预先“导函数”**。

在最初的（预先）“导”函数中，把 x_1 减少到 x，使左边的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{dy}{dx}$，因而

$$\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=3ax^2+2bx+c,$$

所以，**导函数**显现为微分之比的**极限值**。

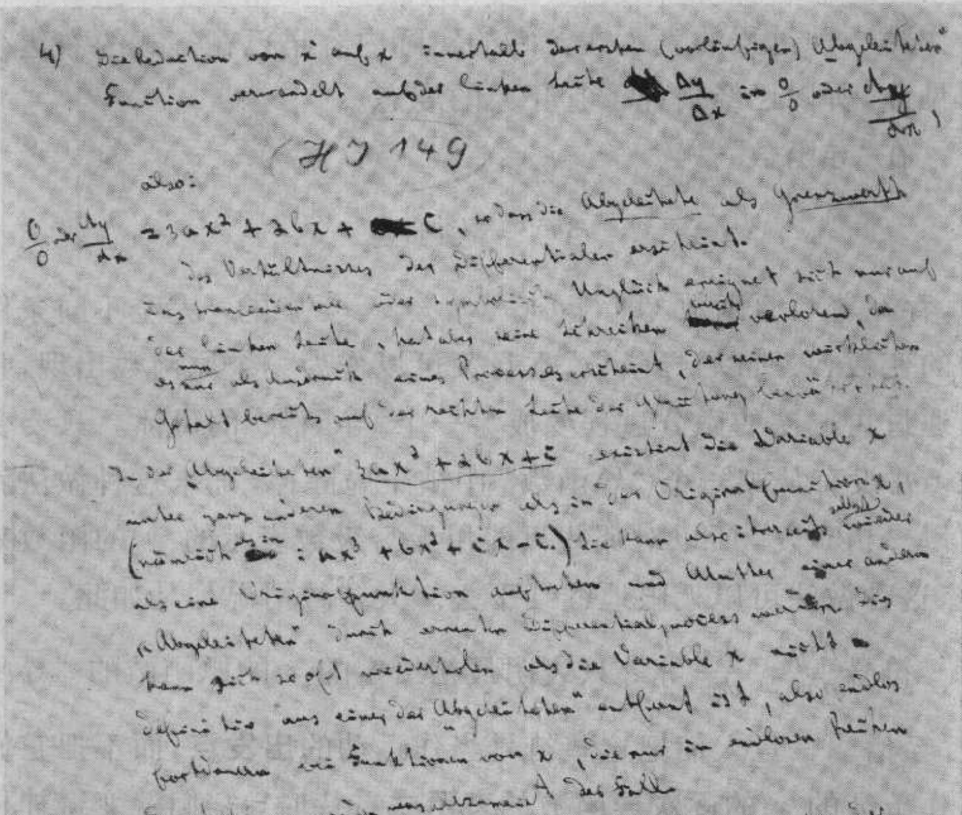
先验的② 或符号性的不幸只发生在左边，但由于它现在只

---

① 在草稿中写着下列句子：

“b) 从 x 的原函数找出‘导函数’的过程是这样进行的：我们先着手建立一个**有限差值**；这给我们提供了一个预先‘导函数’，它是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的**极限值**。我们随后进行的微分过程，就是把这个**极限值减少到它的最小量**。在最初的差值中所引入的量 x_1 并没有消失……”。

② “先验的”一词，原文为 transzendentale。



马克思《导函数的概念》手稿的第四页

是作为一种过程的表示式，它的实际内容早已在等式的右边得到见证,所以已经失掉了它吓人的姿态。

在“导函数”

$$3ax^2+2bx+c$$

中,存在着与原函数（即与 ax^3+bx^2+cx-e）中的 x 完全不同条件下的变数 x。所以“导函数”本身又可以作为一个原函数出现,并且通过再一次的微分过程变成另一个“导函数”的母体。只要变数 x 并没有从某一个“导函数”中被干脆除掉,那末这种做法就可以一再重复,所以对那些只能用无穷级数表示的 x 的函数来说,这种做法可以无限地继续下去。大多数情况都是如此。

符号 $\frac{d^2y}{dx^2}$，$\frac{d^3y}{dx^3}$ 等等只表明最初给定的 x 的原函数的“导函数”系谱。一旦人们把这些符号当作运动的**出发点**,而不把它们当作单纯的 **x 的逐次导函数的表示式**看待时，它们就变得神秘了。这确实显得很奇怪，怎么消失了的量的比值还得重新经历再次的消失呢？但是，譬如象 $3x^2$ 能够同它的母体 x^3 一样经历一次微分过程，那末这就一点也没有什么奇怪了。人们本来就可以从 $3x^2$ 出发,把它当作 x 的原函数看待。

但是**必须注意**，事实上只有象在 I 中 x 仅以一次幂出现的那些等式里，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 才是**微分过程**的结局。可是在这里，正如 I 中所已指出的那样,结果是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a=\frac{dy}{dx}。$$

所以，在这里通过 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所经历的微分过程,实际上并**没有找到新的极限值**；只有当预先“导函数”包含有变数 x 时，因而

只有当$\frac{dy}{dx}$保持为某个实在过程的符号时，才有可能找到新的极限值①。

当然，在微分演算中，这决不妨碍符号$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$等等及其组合也能构成等式的右边。但这时人们也知道，这种纯粹符号的等式，仅仅表明以后对变数的实际函数应进行的那些**运算**。

2）$y=ax^m$。

如果x变到x_1，那末$y_1=ax_1^m$，以及

$$y_1-y=a(x_1^m-x^m)=$$
$$=a(x_1-x)(x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x+x_1^{m-3}x^2+\text{etc.}②，$$
直到$x_1^{m-m}x^{m-1}$这一项）。

因而

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=a(x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x+x_1^{m-3}x^2+\cdots+x_1^{m-m}x^{m-1})。$$

如果我们现在把微分过程应用到这个“**预先导函数**”上，以致

$$x_1=x\text{ 或 }x_1-x=0,$$

那末

$$x_1^{m-1}\text{ 变为 }x^{m-1};$$
$$x_1^{m-2}x\text{ 变为 }x^{m-2}x=x^{m-2+1}=x^{m-1};$$
$$x_1^{m-3}x^2\text{ 变为 }x^{m-3}x^2=x^{m-3+2}=x^{m-1}$$

而最后

$$x_1{}^{m-m}x^{m-1}\text{ 变为 }x^{m-m}x^{m-1}=x^{0+m-1}=x^{m-1}。$$

---

① 在草稿中上面这句话是这样写的：

“这只能发生在这种地方，那里预先‘导’函数含有变数x，因而也能通过它的运动构成一个真正的新值，因而$\frac{dy}{dx}$是某个实在过程的符号。”

② “etc.”表示“等等”。

这样我们就 m 次地获得了函数 x^{m-1}，因而“导函数”便是 max^{m-1}。

在“预先导函数”中，通过令 $x_1=x$，左边的$\frac{\Delta y}{\Delta x}$就变为$\frac{0}{0}$或$\frac{dy}{dx}$，因而

$$\frac{dy}{dx}=max^{m-1}。$$

微分学的所有运算都可按这种方式来处理，但那是毫无用处的烦琐。不过，这里还是要举一个例子，因为在迄今所举的各例中，差值 x_1-x 在 x 的函数中只出现一次，因而在构成

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

时，它就从右边消失了。在下面的例子中就不是这种情况：

3) $y=a^x$；

如果 x 变到 x_1，那末

$$y_1=a^{x_1}。$$

因此

$$y_1-y=a^{x_1}-a^x=a^x(a^{x_1-x}-1)。$$

$$a^{x_1-x}=\left\{1+(a-1)\right\}^{x_1-x},$$

并且

$$\left\{1+(a-1)\right\}^{x_1-x}=1+(x_1-x)(a-1)+$$

$$+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2+\text{etc。}$$

因而

$$y_1-y=a^x(a^{x_1-x}-1)=a^x\Big\{(x_1-x)(a-1)+$$

$$+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2+$$

$$\left.+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3+\text{etc.}\right\}。$$

$$\therefore \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\left\{(a-1)+\frac{x_1-x-1}{1\cdot 2}(a-1)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3+\text{etc.}\right\}。$$

如果现在 $x_1=x$，因而 $x_1-x=0$，那末我们便得到“**导函数**”

$$a^x\left\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc.}\right\}。$$

因而

$$\frac{dy}{dx}=a^x\left\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc.}\right\}。$$

如果我们称花括号中的常数之和为 A，那末

$$\frac{dy}{dx}=Aa^x;$$

但是这个 $A=$ 底数 a ①的耐普尔对数，所以

$$\frac{dy}{dx}\text{，或当用 } y \text{ 的值代入时 } \frac{da^x}{dx}=\log a\cdot a^x$$

以及

$$da^x=\log a\cdot a^x dx。$$

补充

1）以前曾经研究过这样的情况：因子 (x_1-x) 在“**预先导函数**”中，即在有限差值等式中只出现一次。所以通过两边除以 x_1-x 构成

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

---

① 这里的“底数 a”表示 a 是指数函数 $y=a^x$ 的底数。

这个因子便从 x 的函数中被消去了。

2）（在例子 $d(a^x)$ 中）研究过这样的情况：在构成$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之后，因子$(x_1-x)$还保留在 x 的函数中。

3）还要研究一下这种情况：因子 x_1-x **不是直接**从（“预先导函数”的）最初差值等式中演化出来的。

$$y=\sqrt{a^2+x^2},$$

$$y_1=\sqrt{a^2+x_1^2},$$

$$y_1-y=\sqrt{a^2+x_1^2}-\sqrt{a^2+x^2};$$

我们用 x_1-x 去除 x 的函数，因而也用它去除左边。于是

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\left(\text{或}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{\sqrt{a^2+x_1^2}-\sqrt{a^2+x^2}}{x_1-x}。$$

为了把根式从分子中消掉，分子和分母都用 $\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2}$ 去乘，得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^2+x_1^2-(a^2+x^2)}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}=$$

$$=\frac{x_1^2-x^2}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}。$$

但是

$$\frac{x_1^2-x^2}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}=$$

$$=\frac{(x_1-x)(x_1+x)}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}。$$

论　微　分

I

1）设要加以微分的是 $f(x)$ 或 $y=uz$。u 和 z 是自变数 x 的两个函数；而相对于依赖它们的函数 y 来说，它们又是自变数。因此 y 也依赖于 x。

$$y_1=u_1z_1,$$

$$y_1-y=u_1z_1-uz=z_1(u_1-u)+u(z_1-z),$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=z_1\frac{u_1-u}{x_1-x}+u\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{z_1\Delta u}{\Delta x}+\frac{u\Delta z}{\Delta x}。$$

如果在右边 x_1 变为 $=x$，因而 $x_1-x=0$，那末 $u_1-u=0$，$z_1-z=0$，所以 $z_1\dfrac{u_1-u}{x_1-x}$ 中的因子 z_1 也就变为 z，最后在左边 $y_1-y=0$。因此：

$$\text{A)}\quad \frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}。$$

用各项的公分母 dx 乘这个等式，它就变为

$$\text{B)}\quad dy\text{ 或 }d(uz)=zdu+udz。$$

2）先来研究等式 A)：

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}。$$

在只有一个依赖于 x 的因变数的那些等式中，最后结果总是

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$