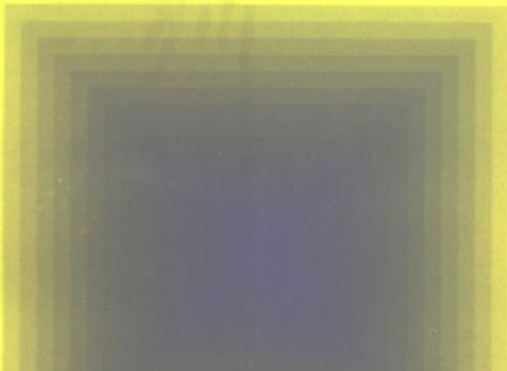
高等学校教学参考书

纵横布局论

——兼谈 VLSI 的布局

刘彦佩 著



中国铁道出版社

高等学校教学参考书

纵横布局论

——兼谈VLSI的布局

刘彦佩　著

中　国　铁　道　出　版　社
1 9 9 7年·北京

（京）新登字063号

图书在版编目(CIP)数据

纵横布局论：兼论VLSI的布局/刘彦佩著. 一北京：中国铁道出版社，1996
ISBN 7-113-02505-6

Ⅰ.纵… Ⅱ.刘… Ⅲ.超大规模集成电路-多层布线-研究 Ⅳ.TN470.597

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第24232号

中国铁道出版社出版发行
（北京市宣武区右安门西街8号）
各地新华书店经售
北京市燕山联营印刷厂印

开本 850×1168 1/32印张：4.125 字数：105千
1997年3月 第1版 第1次印刷
印数：1—2000册 定价：10.00元

前　言

由于电子技术的发展产生了现代的电子数字计算机（简称计算机），由于计算机和其它电子设备的轻便化、小型化以及可靠性的要求，带来了超大规模集成电路（VLSI）的问世和快速更新.

在超大规模集成电路的设计中引出了层出不穷的数学问题.这些数学问题的产生与发展不仅有助于电子技术的改进和提高，开拓计算机的理论与应用的新领域，而且也为数学本身带来了新的生机. 这些已经是近几十年来人们愈来愈清楚的事实.

超大规模集成电路的布局（layout）通常包含两个重要部分：其一为把电子元器件按一定的要求安排到一块板面上，称做定位（placement）问题；其二就是在元器件的位置确定之后，将它们之间的连线划在板面上使得互相不交叉以免出现短路，称为布线（routing）问题. 由于客观要求多种多样，布局的方式也不一而足，这就出现了数学形式上的多样化. 早在60年代，人们就曾对于集成电路布线的一般数学模型作过系统的研究，它被归结为图的平面性与平面分解问题，在数学上已经形成了一种趋于完备的理论.然而，从设计的规范性的要求，人们愈来愈趋向使板面上的线限定沿水平和竖直两个走向. 我们称在这种限制要求之下的布局为纵横布局. 对于纵横布局的理论与方法的研究近十年来正在形成人们所关注的一个中心问题.

本书只从理论和方法上剖析在纵横布局的研究中目前人们比较关心的一些方面，着重于数学的一般形式与解决的方法，同时也考虑到便于在计算机上用好的算法实现.

全书分为六章. 在第一章中，给出了所要讨论的来自 VLSI 的问题的数学形式和为了解决它们所需要的基本知识. 第二章的纵

图与横图是为了在确定出满足要求的线路形式之后提供元件在电路板上具体的定位和布线，即将导线印制在这块电路板上. 从第三章到第六章集中讨论在各种要求之下的线路形式的确定方法. 在第三章中，可以看出在不同的限制条件之下确定线路形式的参数所满足的方程. 它是后两章的理论基础. 第四章是关于在折数和占用面积最小之要求下的一些线路形式的确定. 第五章则是如何求得一种线路形式使得每条导线上所出现的折数都不超过一个给定的值. 最后，在第六章中介绍一些渐近的估计方法以便更有效地解决当元件数充分大时的各种问题. 同时，为了便于读者研究其它有关问题，在每章最后一节均提供了一些注记.

趁此书出版之际，我不能不感谢所有那些曾直接或间接地对本书的形成和问世作出过贡献的人士. 首先，E. Aparo，P. L. Hammer，P. Marchioro，A. Morgana，R. Petreschi，B. Simeone，颜基义等教授在各自不同的方面的真诚合作为本书提供了丰富的素材，还有刘新（博士）、董峰明、刘莹（博士）、李安平（博士）、欧阳克毅（博士）、黄元秋（博士）、高丽岩等在阅读初稿时查出了不少失误. 也得提到我的女儿刘鹰. 本书几乎全部初稿都是由她打印和整理的. 当然，这些人士中包括那些目前我还不知道，甚至永远也不会知道他（她）们姓名的编辑、出版和印刷者. 另外，本书中的所有理论结果全是在我国国家自然科学基金支持下取得的. 同时，也不能不提到美国国家科学基金和意大利国家研究基金委员会的鼎力相助，以及北方交通大学给予的大力支持.

刘彦佩

1996年10月

于北京上园村

目　　录

第一章 基本问题

§1.1 背　景

在超大规模集成电路(VLSI)的布局设计中出现了种种模型.在这些模型中,通常将元件(泛指逻辑元、存储元、运算元、寄存器、I/O 端口、……甚至它本身也是一个集成块)设想为平面上的点,而元件之间连接的导线设想为平面上的线.这样,将一个电路变成了一个图.因为元件总是放在一块绝缘的平板(即这个平面)上,导线为印制在其上的金属(导体)曲线.为避免短路,这些代表导线的曲线之间不允许交叉.这种要求就是数学上所说的求相应图的平面表示.然而,实际之情形并非任何一个图都有平面表示.反映到电路上就是,并非任何一个电路均可安置在一块板面上,使得印制导线之间不会出现交叉.由于两点之间在平面上的连线方式之多难以数计.即使利用 Jordan 定理对于平面上的 n 个点,讨论连接其中一对点之曲线类也要有 2^{n-2} 种方式之多.若有 m 对点需要连接,就要有 $(2^{n-2})^m$ 种方式,通常 m 满足

$$n\leqslant m\leqslant\frac{n(n+1)}{2}.$$

仅以 10 个点为例,且 $m=n$,我们至少要考虑

$$(2^8)^{10}\approx 1.2\times 10^{24}$$

种情形才能判定一个图是否有平面表示.假若一秒钟就可得到一种情形,则约需

$$3.8\times 10^7$$

即 3800 多万年才能数出所有这些情形.因此,人们不能不对它作纯理性的研究.事实上,判定一个图是否有平面表示的问题,自本

世纪 30 年代初开始研究，至今已经得到了完满的解决. 而且，可以借助现代的计算机实现[刘彦佩. 图的可嵌入性理论. 北京：科学出版社，1994. 或 *Embeddability in Graphs*，Kluwer，London，1995. 第五、七章].

接下去的问题就是并非所有的图都有平面表示，或者说，并不是每一个线路均可印制在一块版面上. 这就引出至少要用多少版面的问题. 就此而论，导致了确定图的厚度的研究. 不管怎样，这个问题在数学上确是很难的. 时至今日，从理论上仍没有取得令人满意的结果[刘彦佩. 图的可嵌入性理论，北京：科学出版社，1994，第十一章].

然而，随着社会需要之扩大，成批生产带来了设计与制造的规范化、自动化之要求. 近十年来，人们愈来愈趋于利用单层双面的模型，即将元件配置在一个板面上后，将它们之间的连线限制沿水平和竖直二个方向走以便将水平走向的线段划在同一面(如正面)上和将竖直走向的全划在另一面(即反面)上. 这样的模型不仅有利于规范化，而且在通常情况下避开了确定最少层数的问题. 当然一般而论，不能保证总可以使得每条连二元件的线均为水平或竖直线段，这就不能不把一些连线表示成由水平和竖直线段组成的折线. 在每条折线上，水平和竖直线段的交汇处，称为孔道(via). 打一孔以便将正、反两面间连接. 其中之孔道在这里被称为折(bend). 在数学上，这种表示被称为纵横浸入. 自然，不是任何一个图均有一个纵横浸入. 不过，可以证明只要一个图在每个点处至多连四条线总能保证有一个纵横浸入. 注意，在这里的图不一定可以表示在平面上，因为在纵横浸入中允许不同连线上水平与竖直线的交叉. 但，当然不允许重叠. 本书则是专门讨论这种模型. 当在一个纵横浸入中，也没有不同连线之水平和竖直线段的交叉，则它就变成了所谓纵横嵌入. 当然，只有可平面表示的图才能有纵横嵌入. 对于这种情形，已经取得了一系列的理论进展[刘彦佩. 纵横嵌

入术.北京:科学出版社,1994].我们在这里则是强调其中一些理论结果的算法实现.

§1.2 图

一个图就是指一个集合V和其上的一个二元关系R.V被称为节点集,其中之元素为节点.若$u,v\in V$之间有关系R,或记为uRv,则称它们是相邻的.或者说u与v有一边相连.u和v分别称为此边之端点.记$E=\{(u,v)|\forall\ u,v\in V,uRv\}$,称为边集.因此,常记图为$G=(V,E)$.若存在$(v,v)$允许为边,则称之为环边.若还允许$E$中有重复的元素,则称每个重复元素为重边.如图1.2.1所示之图中有环边(v_2,v_2)和重边(v_7,v_9).既无环边也无重边的图被称为是简单的.因为环边或重边通常对研究的问题不起重要作用,我们总是默认凡图均指简单的,除非必要时特别说明应有环边或重边.若V的任何二节点均相邻,则称$G=(V,E)$为一个完全图.记为$K_{|V|}$.其中,$|V|$表示V中所含节点的数目.对于一条边$(u,v)\in E$,可以将它视为由二条半边组成,记$(u,v\rangle$和$\langle u,v)$分别为组成边$e=(u,v)$的半边.称u,v分别与半边$(u,v\rangle$和$\langle u,v)$关联,但不与$\langle u,v)$和$(u,v\rangle$关联.与一个节点v关联的半边的数目被称为v的次,并记为$\rho(v)$.由于所有节点的次之和就是图中半边的数目,即边数之二倍,从而总有关系

$$\sum_{v\in V}\rho(v)=0(\mathrm{mod}\ 2). \tag{1.2.1}$$

若一个节点次为奇数则称之为奇节点;否则,称之为偶节点.根据式(1.2.1),我们还可得:在任何一个图G中,奇节点的数目

$$v_{od}(G)=0(\mathrm{mod}\ 2). \tag{1.2.2}$$

例如,在图1.2.1中,节点v_3,v_5,v_8,v_9为奇节点,共有4个,为偶数.即,服从式(1.2.2)所示之规律.

为了便于利用,对于不同的目的,要将一般的图简化,使得

在不失一般性之条件下最为简单. 首先，我们要引进连通性的概念. 设

$$S(u,v)=ue_1u_1e_2u_2\cdots e_lv$$

是图 $G=(V,E)$ 上的一个节点和边组成的序列并且满足条件：对于 $i=1,2,\cdots,l$,

$$u_i\in V, e_i=(u_{i-1},u_i)\in E, u_0=u, u_l=v,$$

则称 $S(u,v)$ 为 G 上连 u 和 v 的一条 途径. u 和 v 也称为它的 端点. l 为它的 长度.

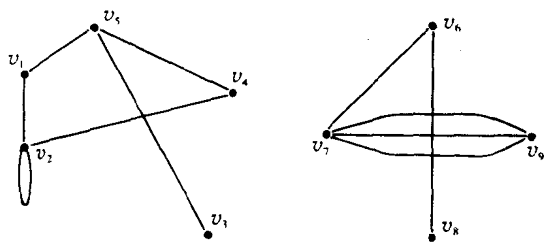


图 1.2.1

由上面条件可知，在 $S(u,v)$ 中允许 $e_i=e_j$, $i\neq j$. 若一个途径中没有任何二边是相同的，则称之为 径. 在径中，虽然不会有边相同但允许有节点 $u_i=u_j$, $i\neq j$, 则为区别这一情形而称那些没有相同的节点的径为 路. 两个端点相同的途径、径和路分别称为 迂、回和 圈. 事实上，在一个图上，若连某二节点有一条途径，则必有连此二节点之径. 若有连二节点之径，则必有连它们的路. 由此可见，连二节点的路是最基本的. 两个节点之间有一条路也称为此二节点是 连通的. 若一个图中任何两个节点都是连通的，则称这个图本身是 连通的.

所谓一个图 $G=(V,E)$ 的一个 子图，记为 $G_S=(V_S,E_S)$，即指 G_S 也是一个图而且满足 $V_S\subseteq V$, $E_S\subseteq E$. 由此，与集合中子集之表示一样，也用 $G_S\subseteq G$ 表示 G_S 是 G 的一个子图. 有两类子图经常遇

到. 一类称为 导出子图. 对于任何 $V_S \subseteq V$，记 $G[V_S]=(V_S,E_S)$，其中 E_S 是由 E 中所有那些由 V_S 中二节点所形成的边组成的集合. 自然，$E_S \subseteq E$. 称 $G[V_S]$ 为 G 的 节点导出子图. 对任何 $E_S \subseteq E$，记 $G[E_S]=(V_S,E_S)$，其中 V_S 为所有与 E_S 中的边关联的节点的集合，自然，$V_S \subseteq V$. 称 $G[E_S]$ 为 G 的 边导出子图. 例如，在图 1.2.1 所示的图中，由节点集 $V_S=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 所得的节点导出子图的边集 $E_S=\{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_2, v_2)\}$ 由边集 $E_S=\{(v_3, v_5), (v_6, v_8)\}$ 所得的边导出子图的节点集 $V_S=\{v_3, v_5, v_6, v_8\}$. 另一类称为 支撑子图，即 $G=(V,E)$的这样的一个子图 $G_S=(V,E_S)$，其中 $E_S \subseteq E$. 注意，这里 G 与 G_S 有相同的节点集.

若根据二个节点是否连通决定它们是否等价，$G=(V, E)$ 的节点集可以分成若干等价类：V_1，V_2，…，V_k. 这时，总有关系

$$G=G[V_1]+G[V_2]+\cdots+G[V_k]. \tag{1.2.3}$$

其中，$G[V_i]$，$i=1, 2, \cdots, k$，全是连通的. 并且，称它们为 G 的分图，或者说 连通片. 由此可见，我们只要研究连通图就够了. 例如，图 1.2.1 所示的图有二个分图.

含边数量少的连通图被称为 树，常用 T 表示. 可以证明凡树皆无圈. 而且，进而还有

定理 1.2.1 一个图是树，当且仅当它是连通的而且没有圈.

若用 $\nu=\nu(G)=|V|$表示 G 的节点数，或称 G 的 阶；用 $\varepsilon=\varepsilon(G)=|E|$为它的边数，也称为 G 的 度，则任何树 T 均有

$$\varepsilon(T)=\nu(T)-1. \tag{1.2.4}$$

也就是说，树的度总比阶少 1.

一个图 $G=(V, E)$，如果它的节点集可以划分为二个部分 V_1 和 V_2，使得 E 中每一边的二个端点均一个在 V_1 中，另一个在 V_2 中，则称它为 二部图，也记为 $G=(V_1,V_2;E)$.

定理 1.2.2 一个图 G 是二部图，当且仅当在 G 中没有奇长

圈.

依这个定理可知凡树皆二部图.

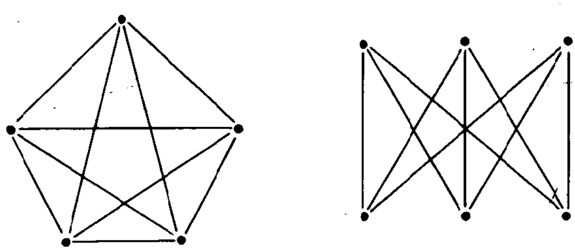
在二部图 $G=(V_1,V_2;E)$ 上的一个边的集合 $M\subseteq E$，若 M 中的任二边均无公共端点，则称 M 为 G 上的一个 对集. 若 M 是 $G=(V_1,V_2;E)$ 上的一个对集，使得任何 $v\in V_1$ 或 V_2 均与 M 的某一边关联，则称它为 完美对集.

定理 1.2.3 一个二部图 $G=(V_1,V_2;E)$ 有完美对集，当且仅当对任何 $X\subseteq V_1$ 和 $Y\subseteq V_2$ 均有

$$|X|\leqslant|V_2(X)|\text{和}|Y|\leqslant|V_1(Y)|. \qquad (1.2.5)$$

其中，$V_i(Z)$ 为所有 V_i 中那些与 Z 中某节点相邻的节点的集合，$Z=X$ 或 Y，$i=1$，2.

从条件（1.2.5）直接可知，若 $G=(V_1,V_2;E)$ 有完美对集，则必有 $|V_1|=|V_2|$. 满足这个条件的二部图被称为是 平衡的. 若 V_1 中的任何一个节点与 V_2 中的任何一个节点相邻，则称它为 完全二部图，记为 $K_{|V_1|,|V_2|}$. 例如，在图 1.2.2 中，(a) 所示的为 5 阶完全图和（b）为 6 阶平衡的完全二部图.



(a) K_5 (b) $K_{3,3}$

图 1.2.2

还有一类对于我们这里十分重要的图需要特别说明. 如图 1.2.1 和图 1.2.2 所示，我们常将图划在平面上. 在这些图例中，为了区别节点和表示边的线段之间的交点，我们将节点用在周围

小区域中不与表示边的线直接连接的点表示．当然，如果能将一个图划在平面上，使得表示边的任何两条线都不相交，即无公共点，就不必作如上区别了．图的这样一种表示被称为 *平面表示*．在图 1.2.1 所示之图中有二个分图，它们均不是平面表示．因为在左边的分图中有边（v_2，v_4）与（v_3，v_5）交叉，在右边的分图中有（v_6，v_8）与（v_7，v_9）交叉．不过，我们可以根据 Jordan 定理求得它们的一个平面表示．

定理 1.2.4（Jordan，1905）　*在平面上的任何一条不自交的连续闭曲线 C 将平面划分为二个连通的区域，记为 C_{in}（不含无限点的那个）和 C_{out}，分别称为 内部 和 外部，使得连其中一个区域中的任一点与另一区域中的任一点的任何连续曲线都必须通过 C 上的点．而且，假若曲线间之公共点只限于十字交叉点，则这条曲线与 C 的交叉点数总为奇的．*

例如，根据这个定理，我们可以将图 1.2.1 的左分图变为平面表示．事实上，只要再划一个连 v_2 和 v_4 的不与任何其它表示边的线段交叉的连续曲线 L 使得与表示（v_2，v_4）的线形成一个闭曲线，并且 v_3 以及从 v_3 沿（v_3，v_5）到与（v_2，v_4）的交点的线段落在这个闭曲线的内部区域，即 C_{in} 内．然后，用 L 表示（v_2，v_4）而将原来的表示曲线去掉，就得到了一个平面表示．为方便，我们称这种运算为 Jordan *变换*．同样地，用 Jordan 变换可以得到图 1.2.1 之右分图的平面表示．可以证明，只要一个图存在一种平面表示，则总可以从它的任何一种表示（自然非平面的）出发通过 Jordan 变换而得到．然而，并不是每个图都有平面表示．例如，在图 1.2.2 中所示的那两个图，无论怎样用 Jordan 变换也得不到平面表示．因此，我们将那些存在平面表示的图称为 *可平面图*；否则，称为 *非可平面图* 或简称 *非平面图*．

正如 § 1.1 中所述，用 Jordan 变换找一个图是否有平面表示是不现实的，即使借助现代的计算机也是无能为力的．

将图的一边用一条长度大于 1 的路代替的运算称为*细分*. 它的逆自然就是将图中的一条除两端可能例外其它节点在图中之次均为 2 的路用一条连此二端之边代替. 一个图，如果经过一系列的细分及其逆，可以从其中之一变换到另一个，则称此二图是*同胚的*，或者说*拓扑等价*. 由此，可以导出判定一个图是否为可平面的准则.

定理 1.2.5(Kuratowski, 1930)　一个图是可平面的，当且仅当它没有一个子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚.

虽然，用这个定理比直接用 Jordan 变换好多了，但找一个图的所有子图仍然令人乏味，其计算量仍然是很可观的. 因此，直接用这个定理仍然是不现实的. 不过，这个定理之形式十分简单. 而且，对于不大的图可以试用. 特别是在理论上用来找非平面图时还是较方便的. 不管怎样，研究既实际可行又便于利用计算机判定图是否可平面的准则乃是至关重要的.

§1.3　嵌　　入

对于任何一个图 $G=(V,E)$，我们可以将每个节点 $v\in V$ 所关联的半边规定一个循环次序并称之为节点 v 处的*旋*，记为 $\sigma(v)$. 所有节点处旋的集合被称为图 G 的旋，记为 $\sigma(G)=\{\sigma(v)\forall\ v\in V\}$.

可以证明，对一个给定图 $G=(V,E)$的任一给定的旋 $\sigma(G)$，我们总能将 G 划在平面上使节点为点，两点之间的连续曲线为边，使得每一条代表边的曲线均除端点外不通过任何代表节点的点，并且在每个节点附近的充分小的邻域中沿顺时针方向绕此节点所确定的与它关联半边的循环序，就是给定的旋. 我们称图的这种表示为它的一个*浸入*(确切地，*平面浸入*). 容易看出，对于给定的旋，一般而言，图的浸入不是唯一的，它不仅依赖代表节点的位置的选择，而且还依赖代表边的曲线的取法.

假若在图 G 的一个浸入中，所有代表边的曲线间除端点可能公共外无其它的公共点，则称它为 G 的一个 嵌入（确切地，平面嵌入或 平面图）. 一个嵌入对于全平面的补的每一个连通区域被称为它的 面. 若记 ν，ϵ 和 ϕ 分别为嵌入中节点数、边数和面数，则可以证明总有

$$\nu-\varepsilon+\phi=2. \tag{1.3.1}$$

这就是所谓的 Euler 公式.

定理 1.3.1　任何树对于任意给定的节点处之旋均存在一个嵌入，使得在每个节点处关联半边沿顺时针走向的循环序就是给定的旋.

由这个定理，我们就可以先求得图 G 的一个支撑树 T，并且把 T 嵌入到平面上. 然后，再添其它不在树上的边以得到 G 的一个浸入. 当然，根据 Jordan 定理，我们可以只考虑两条线有奇数个交叉点的情形. 甚至，可以假设至多有一个交叉点. 如图 1.3.1 所示，在 (a) 中有 6 个交叉点可变为 (b) 无交叉点. 如果两边有公共端点，依相仿的理由，也总可以使得它们无交叉点.

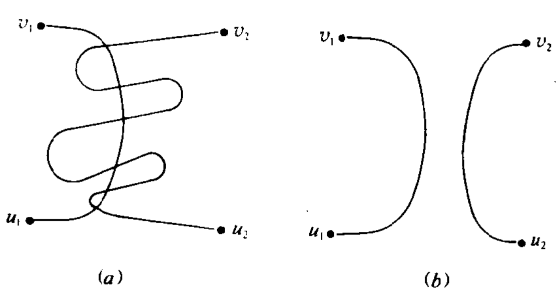


图　1.3.1

设 T 为图 $G=(V,E)$ 上的一个支撑树，则

$$T^*=(V,\ E\backslash E(T))$$

被称为 G 的 上树. 对于 T^* 的任何一边 α，$T+\alpha$ 中恰形成一个圈，

称之为G上对于T的**基本圈**，常记C_α. 因为T^*有$\varepsilon-\nu+1$条边，从而，G共有$\varepsilon-\nu+1$个基本圈. 这个数目不依赖T的选择. 若$S\subseteq V$，且$G[S]$和$G[V-S]$同是连通的，则所有那些只有一端点为S中节点的边组成集合被称为**上圈**. 对于T上的任一边e，T^*+e恰含一个上圈，被称为G对于T的**基本上圈**，且记为C_e^*. 当然，由于T上有$\nu-1$条边，故只有$\nu-1$个基本上圈. 这个数也不依赖树T的选择.

若G有一个节点，记为o，使得树T的边都规定为那个从o出发沿T通过这条边的方向，并且可以使每个对T的基本圈全是有向圈，即其上所有边均同向，则称T为G上的一类**确向树**. 图G连同这样的对边之定向被称为**确向图**.

定理 1.3.2 任何一个图$G=(V,E)$，当然是连通的，都存在对于其上边的定向使得它变为确向图.

事实上，可任选一个节点为o，或称为根，并任选一条与o关联的边e_0起步，依如下旅行规则

旅行规则 从o沿e_0起到另一端. 每到一节点，如果它第一次达到，则在此处旋之下沿下一边走. 如果这个节点已走过，则只要恰达到的边的反向尚未走过就沿之返回（称为反射），并把此边从此节点的旋中除去；否则，沿此旋之下的下一条边走.

直到每边的两个方向均恰走一次.

自然，这时必返回到o. 这样，所有未反射的边就形成了G的一个支撑树. 将每一边选定为第一次通过的方向. 由连通性，所得的就是一个确向图.

由这个定理和定理 1.3.1，我们总可以首先将一个确向树T嵌入到平面上. 然后，画T^*中的边使得任何两条代表T^*二边的曲线，若有公共端就不会交叉，而且任何代表T^*边的曲线均不与T交叉，这样得到的一个图的浸入被称为**确向浸入**，常记为$\tau(G)$，或更确切地$\tau(G;T)$. 那些在树T上次为1的节点也称为T的**端**