连续梁与刚架的結构动力学

V. 柯鲁塞克

科学出版社

连續梁与刚架的結构动力学

V. 柯魯塞克著

张　　琛　譯

科　学　出　版　社

V. KOLOUŠEK

STAVEBNÁ DYNAMIKA SPOJITÝCH
NOSNÍKŮ A RÁMOVÝCH SOUSTAV

1 9 5 0

內 容 簡 介

本书系根据德意志民主共和国萊比錫专业书籍出版社(Fachbuchverlag GMBH Leipzig)出版的威廉·穆尔(Wilhelm Mühl)的德文譯本"連續梁与刚架的結构动力学"(Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen) 1953年第一版譯出．捷克文原书"Stavebná dynamika spojitých nosníků a rámových soustav"出版于1950年，著者是弗·柯魯塞克(V. Koloušek).

本书系統而精辟地分析了連續梁与刚架結构中有关振动的問題．书中研討了能量法和展开固有振动形式的簡化計算，应用形变法处理剪切和轉动慣量的影响以及空間刚架的振动系統等．

连續梁与刚架的結构动力学

V. 柯魯塞克著
张　　琛譯

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1959年11月第一版　书号：1975　字数：273,000
1959年11月第一次印刷　开本：787×1092 1/18
(京) 0001—3,700　印张：11 6/9　插頁：2

定价：1.45元

原　　序

本书处理了結构动力学广大領域中的一部分問題．虽然本书是独立而自成系統的整体，但我仍然尽力使所有的考虑和数学推导能够从力学和弹性理論的基本原理出发．

如果环境許可的話，我愿意另写两本书，使本书能具有完备性．第一本书拟以“結构动力学基础”命名，将包括一个或多个自由度系統的振动理論(特别是适用于单独机器基础的实际計算)，簡单梁的振动理論，簡单的和复杂的振动系統經典解法的分析(首先是 Rayleigh 的能量法)，以及其他基本問題．

第二本书将是解决若干复杂問題的“結构动力学論文选集”，其中包括悬桥、塔楼、长柱、工厂烟囱的振动，弹性間隔层的振动，冲击作用，风和水流的作用及其他类似的問題．

本来应当把“結构动力学基础”一书，安排在这本书前面，在我們捷克的文献中还沒有这一类的教科书．但这类书在国外却很容易找到，并且对于結构动力学的基本問題都有极好的講解．因此，我認为暂时无需做編写基础教科书的工作，并决定先将这本“連續梁与刚架的結构动力学”出版．这本书，正如我所期望的，也許还可以在世界文献中填补一些空隙．

由于教育与科学艺术部和捷克国家調查諮議处的支持，原稿才有可能完成．我乘此机会表示感謝．对于首都布拉格有关方面在 1948 年对我原稿的推崇，我也表示感謝．并感謝交通部給我的关于組織各章节的帮助．在准备本书出版的过去十年当中，我不得不克服許多障碍和困难．对于在这方面、以及其他方面帮助过我的人們，我愿一併致以衷心的謝意．

布拉格，1949 年 6 月

工学博士　弗拉契米尔·柯鲁塞克
(Vladimír Kloušek)

德譯本序言

这部著作是研討連續梁与刚架系統的振动問題，它是結构力学中的一个組成部分.

关于刚架的靜力学問題，尽管早已彻底地研究过，而且还用了各种极其不同的方法使其易于了解和掌握，但是到現在却仍然沒有一个如同此系統之动力学那样的足够精确、切合实用、易于查究的处理方法. 本书的作者是一位世所公認的結构动力学方面的科学家. 他用了系統化的方法，指出各种形式的刚架和連續梁受振动作用的可能性，而且将一些从工程实践中选取出来的例题加以推导，并指出其推导式的应用范围和精确度.

魏瑪，1953 年 5 月 21 日

特許工程师 斯·斯佩尔 (S. Speer) 教授
魏瑪高等建筑学校靜力学与建筑結构学主講

目　　录

引　言

在結构力学中，对刚架結构静力学，我們可以找出一系列迅速和明显的解法，其中包括較复杂問題的解法在內. 这一类的解法多半是由形变法演变出来的，它們使刚架的静力学計算趋于完善.

反之，刚架与連續梁上随时間改变的載荷(稳定及移动的机器)，虽然在实际情形里常常出現，但是，有关这种类型的結构动力学的一些問題，过去往往被忽視. 在研究刚架的振动时，著者碰見許多目前尙未根本解决的問題. 为了克服解决这些問題上的困难，暂时只有将预示的解答形式加以展开或寻求完全新颖的方法，才有济于事.

固然，刚架系統振动的可能解法在以前并非沒有：例如在理論上所用的能量法，調和分析法，固有形式展开法，Reissner 或 Hohenemser-Prager 方法等都是过去被采用过的方法. 但是，这些方法即使有可能应用于实际情形，然而在計算上，特别是对于強迫振动和固有振动的高級形式的計算，在許多情形里却是很困难的. 当別的方法不适用于結构动力学的問題时，形变法仍然有效，并且特别能表現它本身的优越性. 著者因此采用了形变法. 据我所知，最早用形变法处理刚架振动問題的有 E. Fliegel 的“桿件动力学第二类弹性方程”(Die Elastizitätsgleichungen zweiter Art der Stabwerkdynamik, Ing. Arch. 1938). 鑑于这篇論文所推出的結論并不完全正确，我曾在 1941 年建筑工程杂誌上发表过“虛位移原理与互換定理在桿件动力学中的应用”，文中曾导出振动刚架的正确的形变方程. 后来，在我的論文“振动的房屋刚架的計算”(見 Stahlbau, 1943) 中，已将此理論予以引伸.

直到最近，我从 N. I. Besuchow “結构动力学”(Die Baudynamik, Verlag Strojisdat, 1947) 一书中，才知道他在 1938 年 (“WIT” Nr. 8) 及 A. A. Belous 在 1939 年 (Sammelwerk Nr. 3 der Bauforschungstheorie, Moskau)，都曾利用形变法計算过刚架的振动. 在目前，与此有关的最新著作則尙未聞悉.

对于縱向静力作用下的振动系統、剪切和轉动慣量的影响、刚架的衰減振动、空間刚架的振动、以及其他問題的計算，本书可以說是継上述各篇論文之后第一次采用形变法的著作. 此外，书中关于用能量法和展开固有振动形式的若干簡化計算，我覚得是成功的. 这样，一系列有关刚架系統和連續梁的振动方面的重要問題，将有可能获得解决.

本书第一章是有关过去几个常用方法的簡短回顧，这里只簡单地提到有代表性的解法而不作全面的列举. 第二章說明計算振动系統的形变法，其中所研究的是等截面和变截面的直桿和曲桿系統的固有諧振动、強迫振动、縱向振动和横向振动. 第三章是关于能量法和按固有振动形式展开法的簡化計算. 第四章討論用形变法和展开法解衰減振动，并且将两种方法所得的結果作了比較. 在第五章里，考虑了剪切、

桿件纵向元素的轉动惯量及纵向静力在振动中的影响，并解决了架型机器基础的振动問題．在第六章里，将振动的解法与纵弯曲的計算作了对比，并提示了这两种問題的密切关系． 第七章是把基本定理（虚功与互换性）应用到振动系統中的方法的推导，及其有别于結构静力学的若干应用方面． 另外还指出定理只适用于具有同一振动频率的系統，并导出纵向静力作用下的互换公式和衰减振动的公式． 移动載荷的作用在第八章解决，其中特别考虑了連續梁形式的鉄道桥梁． 第九章是处理空間刚架系統，其中也解决了旋环对称系統問題．

在大部分的解法中，都采用了形式随振动的类型而不同的频率函数． 对于簡单的横向振动，这个函数記作 $F(\lambda)$． 当我們考虑剪切、桿件元素的轉动惯量及纵向静力时，函数变得比較复杂，用記号 $F(a,d)$ 表示．在衰减振动的情形，函数变成复数形式，用記号 $F(\Lambda+i\bar{\Lambda})$ 表示． 用形变法求解任一振动問題时，所得的形变方程具有同一形式，只是各个方程式因子表出的函数有所不同而已． 解答的这种統一性是形变法一大优点．第十章中备有函数 $F(\lambda)$ 的五位数字表，利用这个表，会使計算容易得多．

第一章指出，我們只处理随时間改变和由移动載荷所引起的系統的振动，至于冲击問題，因其具有另一种性质，在本书中将不予研究．

記　号　説　明

a	数值，按照(164)。
$a(y)$ $b(y)$ $c(y)$ $e(y)$ $f(y)$ $g(y)$ $h(y)$	公式(285)，(286)中与 Y 軸上的位置有关的数量。
$a^{1,1}_{R[j]}, a^{1,2}_{R[j]}$ $b^{1,4}_{R[j]}$ $c^{1,1}_{R}$	因子，按照(300)。
a b	(56)，(57)中的因子，按照(59)。
$\bar{a}$, $\hat{a}$ $\bar{b}$, $\hat{b}$	因子，如第二章第 7 节 D 所述。
a	点的記号，質量所集中的一点。
b	单位长度上的阻尼因数。
c	載荷在梁上的移动速度。
d	数值，按照(163)。
e	直接作用于节点上的外力的記号，例如 $X^{e}_{g,h}$。
$g=9.81$ 米秒$^{-2}$	重力加速度(落体加速度)。
g h	桿件端点。
$h(x,t)$	代替振动質体作用的連續分布載荷。
hm	不均衡的轉动質量。
$i=\sqrt{-1}$	
j j'	旋环对称系統中基本形式的級的一般記号。
k	支柱的弹性因数。
k k'	固有振动的級的一般記号。
$k^{\times}$	与截面形状有关的因子之一。

k	旋环对称系統中肋的一般記号.
l	跨度.
$m_{(t)}$, $m_{(R)}$	纵弯曲安全度.
$m(x,t)$	基本系統由于单位振幅的諧变静力未知量的作用在位置 x 处及时間 t 时所引起的力矩.
$\tilde{m}(x)$	基本系統由于单位振幅的諧变静力未知量的作用在一任意截面 x 处所引起的静力矩.
n	頻率.
$n_{(k)}$	固有頻率.
n_b	頻率范围内的阻尼因数.
$p(x,t)$	在时間 t 时作用在位置 x 处的載荷.
$p(x)$	諧变載荷的振幅.
$p_{(k)}(t)$	一般化的載荷,按照(79).
$p_{(k)}$	諧变載荷 $p_{(k)}(t)$ 的振幅.
p	函数 $F_p(\lambda)$ 中的一般記号.
p	力 P 的作用点.
q	質体 hm 的重量.
r	慣性半径.
r	力 R 的作用点.
r	旋环对称系統中环的数目.
r	質体重心 hm 与扭轉中心之間的距离.
r_0	极坐标中的半径.
s	旋环对称系統中肋的数目.
t	时間.
$u_{g,h}$	桿件 $\overline{g,h}$ 的 g 点沿 U 軸方向的变位(振幅).
$u(x,t)$	位置 x 处在时間 t 时沿 U 軸方向的变位.
$u(x)$	$u(x,t)$ 的振幅.
$v_{g,h}$ (或 v_g)	桿件 $\overline{g,h}$ 的 g 点沿 V 軸方向的变位(振幅).
$v(x,t)$	位置 x 处在时間 t 时沿 V 軸方向的变位.
$\tilde{v}(x)$	静力撓度, 沿 V 方向.
$v_{(R)}(x)$	纵弯曲撓度, 沿 V 方向.
$w(x,t)$	沿 W 軸方向的变位.
x	截面至桿件左端的距离.
x, y, z	沿坐标軸 X, Y, Z 方向的变位.

$\left.\begin{matrix} A \\ \bar{A} \end{matrix}\right\}$	衰減振动中的数量,按照第五章第 1 节最后一段.
$\left.\begin{matrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{matrix}\right\}$	向量記号.
$\left.\begin{matrix} A(\xi,\xi),A(\xi,\eta) \\ B(\xi,\xi) \\ C(\xi,\xi) \\ D(\xi,\xi) \\ E(\xi,\xi) \\ G(\xi,\xi) \end{matrix}\right\}$	因子,按照(42)与(281).
$\left.\begin{matrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} \end{matrix}\right\}$	常数記号.
B	阻尼因数(第八章第 5 节).
C	弹簧常数,即每单位伸长时的弹簧力.
$\left.\begin{matrix} D \\ \bar{D} \end{matrix}\right\}$	衰減振动的数量,按照第五章第 1 节(最后一段).
E	弹性模量.
F	横截面.
$F(\lambda)$	函数,按照第十章(301)—(304)及表 A, B, C 第 8 行(附录).
$F(a,d)$	函数,按照(185).
G	剪切系数.
H	質量.
$H_{s'}$	装有弹簧部分的質量.
H_s	无弹簧部分的質量.
I	計算扭轉时与截面形状有关的数值.
J	慣性矩.
$\left.\begin{matrix} K \\ \bar{K} \end{matrix}\right\}$	衰減振动情形的支承的弹性因数.
L	功.
M	力矩(振幅).
$M^0_{g,h}$	两端固定的桿件 $\overline{g,h}$ 在有外加載荷时,作用在端点 g 上的力矩.
M^e_g	直接作用在节点上的力矩.
$M(x,t)$	在时間 t 时作用在截面 x 处的力矩.
N	縱向力(振幅).
$N(x,t)$	在时間 t 时作用在位置 x 处的縱向力.

$\widetilde{N}$	纵向靜力.
$\mathbf{N}$	移动着的諧变力的頻率.
$\left.\begin{matrix}P\\R\end{matrix}\right\}$	外力.
Q	横向力(切力、剪力).
R	旋环对称系統中环的一般記号.
R	纵弯曲的級的一般記号.
S	弹簧力.
$\left.\begin{matrix}U\\V\\W\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}U\\V\\W\end{matrix}\right\}$軸方向的力.
$\left.\begin{matrix}X\\Y\\Z\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}X\\Y\\Z\end{matrix}\right\}$軸方向的力.
$\left.\begin{matrix}X^0_{g,h}\\Y^0_{g,h}\\Z^0_{g,h}\end{matrix}\right\}$	两端固定的桿件 $\overline{g,h}$ 在有外加載荷时,作用在端点 g 上的力的分量.
$\left.\begin{matrix}X^e_{g,h}\\Y^e_{g,h}\\Z^e_{g,h}\end{matrix}\right\}$	直接作用在节点 g 上的外力之合力的分量.
$\mathfrak{a}$	数值,按照(169).
$\mathfrak{d}$	数值,按照(168).
$\mathfrak{f}(a,d)$	函数,按照(173),(180).
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{u}_{(k)}(x,t)\\\mathfrak{v}_{(k)}(x,t)\\\mathfrak{w}_{(k)}(x,t)\end{matrix}\right\}$	第 k 个固有振动形式在位置 x 及时間 t 时沿$\left\{\begin{matrix}U\\V\\W\end{matrix}\right.$ 軸方向的变位.
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{C}\\\overline{\mathfrak{C}}\end{matrix}\right\}$	常数.
$\mathfrak{F}(a,d)$	函数,按照表 A,B,C 第 9 行(附录)及(174),(175).
$\mathfrak{M}_g = M^e_g - \sum\limits_{h=1}^{r} Z^0_{g,h}$	自节点 g 向外伸出的各桿件的 M^e 与 M^0 (負值)之和.
$\mathfrak{M}(x,t)$	基本系統在受外加載荷作用时,任一截面处的力矩.
$\mathfrak{S}$	子行列式.
$\mathfrak{X}_g = X^e_g - \sum\limits_{h=1}^{r} X^0_{g,h}$	
$\mathfrak{Y}_g = Y^e_g - \sum\limits_{h=1}^{r} Y^0_{g,h}$	

$З_g = Z_g^e - \sum_{h=1}^{r} Z_{g,h}^0$	
α	旋环对称系統中肋的角度.
α	数値,按照(188).
β	阻尼因数,按照第四章第4节.
$\gamma(x,t)$	截面 x 在时間 t 时的扭轉角.
γ_g	节点 g 的扭轉角(振幅).
δ	数値,按照(189).
$\left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \bar{\varepsilon}\end{matrix}\right\}$	簡写記号[見(237)].
ζ	与 Z 軸之間的角度.
η	与 Y 軸之間的角度.
$\vartheta = l\sqrt{\frac{\chi\omega^2}{GI''}}$	数値,按照第九章第2节.
κ	在扭轉时支承的弹性因数.
$\bar{\kappa}$	数値,按照(182).
λ	按照(9).
μ	每单位长度的质量.
ξ	与 X 軸之間的角度.
σ	极坐标系統中的角度.
φ	相位差.
χ	扭轉振动时每单位长度的质量慣性矩,按照第九章第2节.
ψ	按照(18).
$\bar{\psi}$	$= \frac{v_h - v_g}{l}$.
ω	振动的角速度或圓周频率.
$\omega_{(k)}$	第 k 个固有圓周频率.
$\bar{\omega}_{(k)}$	考虑纵向静力及剪切的作用时的第 k 个固有圓周频率.
$\Gamma(\alpha)$	函数,按照表 A,B,C 第6行(附录).
$\bar{\Gamma}(\delta)$	函数,按照表 A,B,C 第7行(附录).
$\left.\begin{matrix}\Delta\\ \bar{\Delta}\end{matrix}\right\}$	行列式.
Δ_1, Δ_2	数字表中第一阶与第二阶的差分.
$\left.\begin{matrix}\Theta\\ \bar{\Theta}\end{matrix}\right\}$	按照(276).
$\left.\begin{matrix}\Lambda\\ \bar{\Lambda}\end{matrix}\right\}$	按照(113).

$\Xi=\dfrac{\mu\omega^2}{EJ}r_0^4$	数值,按照第二章第10节.
Σ	总和符号.
$\Phi(\lambda)$	函数,按照(84),(86),(88),(90).
$\left.\begin{matrix}\Psi\\ \overline{\Psi}\end{matrix}\right\}$	按照(127).
Ω	移动着的諧变力的圆周频率.

由上面的說明可以看出,要在一本包有动力学、静力学及由弹性理論得出的不同解答的书里,引进一个統一的記号系統是很困难的. 在力学的不同部門中,人們經常用同一記号代表不相同的概念;例如字母 M 有时表示力矩,有时又表示质量. 因此,在本书中质量的記号就改为 H. 同样,人們也常用 x 表示水平軸的坐标或由桿件左端算起的距离. 我們将用 x 表示截面,并且引进 x 来表示沿水平軸 X 方向的位移分量.

指　　标

对于力和形变等,不带括弧的下标表示位置与桿件,下标为两个字的指同一桿件,其中第一个字表示位置,例如 $M_{g,h}$ 是作用在桿件 $\overline{g,h}$ 的 g 点上的力矩. 下标为一个字的表示节点,例如 γ_h 表示节点 h 的轉角. 带有圆括弧的下标或上标表示固有振动的級或縱弯曲变位的級(用阿拉伯字),例如 $n_{(1)}$ 是固有振动第一个频率,$\gamma_1^{(1)}$, $v_1^{(1)}$各为固有振动第一形式的轉角和位移[1]. 另一种指标表示空間旋环对称系統中形变的基本形式(上前方的阿拉伯字)和級(下边方括弧內的数字),这与由剪切引起的截面的变位因数(上前方的罗馬字 Ⅱ)有所不同. 上前方的字母 A 与 B 是諧振动中 sin 与 cos 的因子,其余类推. 对于随位置和时間改变的数量,采用力或形变的相应記号并附以圆括弧表示(其中包括截面記号和时間),例如 $M(x,t)$. 有关各指标的意义,在书中也有說明.

数量上方加一个 ～ 記号表示静力数量,例如 $\widetilde{N}$ 表示不随时間改变的縱向力,但在不致引起混乱的情况下,也可以将 ～ 省略.

正　负　号

当弯矩 $M(x)$, 剪力 $Q(x)$ 及法向力 $N(x)$ 的方向如图1中箭头所示时,其数值为正号. 这些力常成对出現.

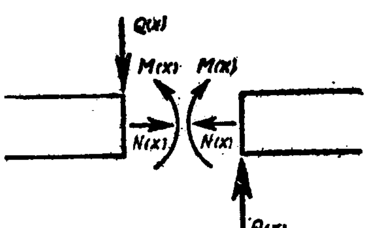

图　1

桿端力矩和力在图 3a 中将有所說明,其方向的規定也見图 3a.

空間系統的位移和力分量的正方向都同軸的正方向一致. 轉角和力矩的分量,如果由其轉軸正方向看过去是順时針方向的,那就是正的数量.

1)固有形式的記号,除了指标以外我們还采用草体字,如 $\mathfrak{v}_{(k)}(x,t)$.

第一章　計算固有振动与强迫振动的几个常用方法

1. 用瑞来(Rayleigh)能量法計算最低的固有頻率

在引用新的方法解桿件系統的振动問題之前，我們先簡短地介紹一下在这个問題上最常用的一些方法．首先是計算第一个固有頻率(基頻)所用的能量法．能量法建立在这样的事实上：在不发生衰減的条件下，自由振动系統中的能量是守恆的；就是說，动能和势能(等于形变能)的总和对于时間并不改变．在定常的諧振动中，动能在最大变位之处消失，而形变能則在系統桿件上的点經过零点位置的瞬时等于零．系統在最极端位置时的形变能必須等于它在零位置时的动能．当我們只考虑横向振动时，这种关系可以用下式表示：

$$\Sigma\int_0^l \frac{1}{2} EJv_{(1)}''^2(x)dx = \Sigma\int_0^l \frac{1}{2} \mu\omega_{(1)}^2 v_{(1)}^2(x)dx, \tag{1}$$

其中 $\omega_{(1)}$ 是第一个固有圓周頻率，$v_{(1)}(x)$ 是第一固有振动形式的变位，Σ 則表示系統中所有桿件的总和．如变位 $v_{(1)}(x)$ 为已知，則最低的固有頻率可由(1)式求出．因为 $v_{(1)}(x)$ 并非已知，需用近似值 $v(x)$ 进行計算．通常我們选 $v(x)$ 为由于一任意載荷所产生的靜力撓度．因此

$$\omega_{(1)}^2 \approx \frac{\Sigma\int_0^l EJv''^2(x)dx}{\Sigma\int_0^l \mu v^2(x)dx}. \tag{2}$$

选定的变位 $v(x)$ 愈接近第一固有振动形式，公式(2)的精确度就愈大．

通常作数值計算时，我們将每一桿件分成 n 段，并且在每段的中点决定其撓度 $v(x_k)$．用和式 $\sum_{k=1}^{n} \mu v^2(x_k)\Delta x$ 代替式中分母的积分式．式中的分子是桿件系統形变能的两倍．一般說来，計算形变的功要比計算外力在其移动的作用点上所作的功更为方便．

2. 固有振动問題的逐步逼近法

逐步逼近法和能量法有些相似．它不仅可以用逐步逼近的方式、以任意的精确度确定振动系統的基頻，而且可以同样地确定高級的固有頻率及所有的固有振动形式．如前节所述，我們选择撓度 $v_{(1),1}(x)$，借以得到第一級的固有振动．由載荷 $\mu v_{(1),1}(x)$ 决定撓曲綫 $v_{(1),2}(x)$，然后由載荷 $\mu v_{(1),2}(x)$ 决定曲綫 $v_{(1),3}(x)$．重复这样的过程，直到最后的 $v_{(1),n}(x)$ 在形式上同前一个 $v_{(1),n-1}(x)$ 实际上无所差別时为止．这

时，就可以将 $v_{(1),n}(x) = \mathfrak{v}_{(1)}(x)$ 作为固有振动的第一个形式．由此得到計算第一个固有頻率的公式如下：

$$\omega_{(1)}^2 \approx \frac{v_{(1),n-1}(x)}{v_{(1),n}(x)}. \tag{3a}$$

当我們知道了第一个固有形式，第二个固有頻率及其所屬的形式，就可以选定近似的第二个形式 $v_{(2),1}(x)$，在連續載荷

$$\mu\left[v_{(2),1}(x) - \mathfrak{v}_{(1)}(x)\frac{\sum\int_0^l v_{(2),1}(x)\mathfrak{v}_{(1)}(x)\mu\,dx}{\sum\int_0^l \mu\mathfrak{v}_{(1)}^2(x)\,dx}\right]$$

的作用下，决定挠度 $v_{(2),2}(x)$；然后在載荷

$$\mu\left[v_{(2),2}(x) - \mathfrak{v}_{(1)}(x)\frac{\sum\int_0^l v_{(2),2}(x)\mathfrak{v}_{(1)}(x)\mu\,dx}{\sum\int_0^l \mu\mathfrak{v}_{(1)}^2(x)\,dx}\right]$$

的作用下，决定挠度 $v_{(2),3}(x)$；这样継續下去，直到挠度 $v_{(2),n-1}(x)$ 与 $v_{(2),n}(x)$ 实际上已无甚差別时为止．

因此，計算第二个固有頻率的公式可以写成：

$$\omega_{(2)}^2 \approx \frac{v_{(2),n-1}(x)}{v_{(2),n}(x)}. \tag{3b}$$

关于这个方法的論証，可查閱有关文献[1]．另外，在計算振动的較高頻率时，也可用其他与能量法有关的方法，例如李滋 (Ritz) 方法，伽辽金 (Galerkin) 方法等．

3. 用节点固定法解高級固有振动頻率与形式的問題

另一种計算固有振动的較高頻率与形式的方法，是振动节点固定法． 振动的高級形式，就是在系統的一定点上形成变位振幅等于零的振动节点． 节点的数目按照固有頻率的級数而遞增． 例如在决定第二个固有形式时，我們是这样来固定振动节点的位置的：設想桿件系統就固定在这一点上，因而决定出这个新的系統的第一个固有頻率．然后换一个节点位置，并重新决定系統的固有頻率． 那些产生最高頻率的位置，就是眞正的振动节点[2]．

4. 强迫振动的計算

如果固有形式和固有頻率为已知，則按固有形式展开之后，計算一个任意桿件系統的強迫振动是可能的． 将作用在桿件系統上的外加載荷分成几个部分，使每一部分只能引起一个确定的固有振动形式．然后单独研究各个部分的振动，并根据迭加原理将各部分的結果加在一起．在第三章里，我們还要討論这个問題．

我們也可以直接用賴斯那尔 (Reissner) 方法解強迫振动問題． 此法曾經由賀恆

1) Hohenemser-Prager: Dynamik der Stabwerke, Berlin 1933, 第 107 頁, 220 頁.

2) 同上.