高等工科院校系列教材

高等数学

（第二版）

陈殿杰　李远东　主编

重庆大学出版社

高等数学

高 等 数 学

（第二版）

陈殿杰　李远东　主编

重 庆 大 学 出 版 社

内容提要

本书根据国家教委颁发的《高等数学》(大专)基本要求和大纲(草案)编写。全书共十章,分别介绍了函数与极限;导数与微分;微分中值定理;不定积分;定积分及其应用;空间解析几何;多元函数微分学;重积分、对坐标的曲线积分;常微分方程;无穷级数。每节后附有精选习题,书后附有习题答案,若干内容编进附录中供不同专业选用。

本书对基础理论课的教学以“必须、够用”为度。行文简明、准确、深入浅出,可用作电类各专业全日制大专生、成人教育、电视大学学生的教材或参考书,也适用于其它专业学生和工科技术人员。

高 等 数 学
(第二版)
陈殿杰 李远东 主 编
责任编辑 韩 洁
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重庆电力印刷厂印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:19.75 字数:493千
1996年6月第2版 1996年6月第3次印刷
印数:12001~22000
ISBN 7-5624-0838-6/O·105 定价:15.80元
(川)新登字020号

序

近年来我国高等专科教育发展很快，各校招收专科生的人数呈逐年上升趋势，但是专科教材颇为匮乏，专科教材建设工作进展迟缓，在一定程度上制约了专科教育的发展。在重庆大学出版社的倡议下，中国西部地区14所院校（云南工学院、贵州工学院、宁夏工学院、新疆工学院、陕西工学院、广西大学、广西工学院、兰州工业高等专科学校、昆明工学院、攀枝花大学、四川工业学院、四川轻化工学院、渝州大学、重庆大学）联合起来，编写、出版机类和电类专科教材，开创了一条出版系列教材的新路。这是一项有远见的战略决策，得到国家教委的肯定与支持。

质量是这套教材的生命。围绕提高系列教材质量，采取了一系列重要举措：

第一，组织数十名教学专家反复研究机类、电类三年制专科的培养目标和教学计划，根据高等工程专科教育的培养目标——培养技术应用型人才，确定了专科学生应该具备的知识和能力结构，据此制订了教学计划，提出了50门课程的编写书目。

第二，通过主编会议审定了50门课程的编写大纲，不过分强调每门课程自身的系统性和完整性，从系列教材的整体优化原则出发，理顺了各门课程之间的关系，既保证了各门课程的基本内容，又避免了重复和交叉。

第三，规定了编写系列专科教材应该遵循的原则：

1. 教材应与专科学生的知识、能力结构相适应，不要不切实际地拔高；

2. 基础理论课的教学应以“必须、够用”为度，所谓“必须”是指专科人才培养规格之所需，所谓“够用”是指满足后续课程之需要。

3. 根据专科的人才培养规格和人才的主要去向，确定专业课教材的内容，加强针对性和实用性；

4. 减少不必要的数理论证和数学推导；

5. 注意培养学生解决实际问题的能力，强化学生的工程意识；

6. 教材中应配备习题、复习思考题、实验指示书等，以方便组织教学；

7. 教材应做到概念准确，数据正确，文字叙述简明扼要，文、图配合适当。

第四，由出版社聘请学术水平高、教学经验丰富、责任心强的专家担任主审，严格把住每门教材的学术质量关。

出版系列专科教材堪称一项“浩大的工程”。经过一年多的艰苦努力，系列专科教材陆续面市了。它汇集了中国西部地区14所院校专科教育的办学经验，是西

部地区广大教师长期教学经验的结晶。

纵观这套教材，具有如下的特色：它符合我国国情，符合专科教育的教学基本要求和教学规律；正确处理了与本科教材、中专教材的分工，具有很强的实用性；与出版单科教材不同，有计划地成套推出，实现了整体优化。

这套教材立足于我国西部地区，面向全国市场，它的出版必将对繁荣我国的专科教育发挥积极的作用。这套教材可以作为大学专科及成人高校的教材，也可作为大学本科非机类或非电类专业的教材，亦可供有关工程技术人员参考。因此我不揣冒昧向广大读者推荐这套系列教材，并希望通过教学实践后逐版修订，使之日臻完善。

吴云鹏

1993年

仲夏

第二版前言

本书第一版自 1993 年出版，至今已两年有余，颇获好评。经多所院校同行们的教学实践，积累了一些经验。为了适应当前大学专科、各类成人教育数学教学的新形势，我们吸取了使用过本书的部分教师的宝贵意见与建议，在保留原书简明易学、适应面广等特点的基础上，对原书的部分内容作了适当的调整、修改和订正。在此，我们谨向关心本书和对第一版提出宝贵意见的教师与学生致以诚挚的谢意 。

编者

1995 年 9 月

第一版前言

这本《高等数学》教材是为大学专科层次的学生编写的，可供电类、机类、土木、化工、冶金、采选、地质、管理工程等专业选用。全书共十章，内容包括一元、多元函数微积分，向量代数与空间解析几何，常微分方程和级数。

本书按照国家教委颁发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》(专科适用)进行编写。注意掌握专科层次的尺度，与本科同类教材相比，在理论上有较大的削弱，在内容上只作较少的删改，但同时没有降低对基本概念、基本方法、基本技巧的要求。行文力求简明准确且尽量兼顾推理的严密性，注意加强几何直观，突出实际背景。为了能适应不同层次的学生的需求，对少数内容和证明打上 * 号，供任课教师掌握。每节后面附有一定数量的习题，在书末附有习题答案。估计各专业在 120～160 学时(含习题课)内完成本课程的教学不会有困难。

参加编写的单位有：昆明理工大学、渝州大学、攀枝花大学、宁夏工学院及兰州高等工业专科学校。本书一、二章由李远东执笔；三、四章由孙亮执笔；五、六章由章芸执笔；七、八章由詹金龙执笔；九、十章由刘恒群执笔；陈殿杰主持了整个编写工作。二位主编对全书进行统纂，对有的章节进行了改写。

重庆大学谢树艺教授担任本书的主审，他认真地审查了原稿，提出了许多改进意见，使本书增色不少。在此，我们对他的辛勤工作表示衷心的感谢。

重庆大学出版社的同志们为本书的出版、编辑工作付出了艰辛的劳动，我们也向他们致以诚挚的谢意。

由于成书时间短促，又限于编者水平，错漏难免，恳请专家及读者们批评指正。

编者

1993.5

目　　录

第一章　函数与极限 …… (1)

§1-1　函数的概念 …… (1)

§1-2　初等函数 …… (6)

§1-3　函数的极限 …… (12)

§1-4　无穷小量与无穷大量 …… (18)

§1-5　极限运算法则 …… (20)

§1-6　两个重要极限 …… (23)

§1-7　无穷小量的比较 …… (26)

§1-8　函数的连续性与间断点 …… (28)

§1-9　初等函数的连续性 …… (32)

§1-10　闭区间上连续函数的性质 …… (35)

第二章　导数与微分 …… (36)

§2-1　导数的概念 …… (36)

§2-2　求导法则 …… (44)

§2-3　初等函数的求导问题 …… (49)

§2-4　高阶导数 …… (50)

§2-5　隐函数及参数式函数的导数 …… (52)

§2-6　函数的微分 …… (56)

§2-7　微分在近似计算中的应用 …… (59)

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… (62)

§3-1　微分中值定理 …… (62)

§3-2　罗必塔法则 …… (65)

§3-3　函数的单调性和极值 …… (70)

§3-4　曲率 …… (76)

第四章　不定积分 …… (80)

§4-1　不定积分的概念和性质 …… (81)

§4-2 换元积分法 …………………………………………………………… (84)
§4-3 分部积分法 …………………………………………………………… (93)
§4-4 简单有理函数的积分 ……………………………………………… (95)

第五章 定积分及其应用 …………………………………………………… (102)
§5-1 定积分的定义及性质 ……………………………………………… (102)
§5-2 牛顿-莱布尼兹公式 ……………………………………………… (107)
§5-3 定积分的换元积分法与分部积分法 ……………………………… (111)
§5-4 广义积分 ………………………………………………………… (115)
§5-5 定积分的几何应用 ……………………………………………… (118)
§5-6 定积分的物理应用 ……………………………………………… (124)
* §5-7 定积分的近似计算 ……………………………………………… (128)

第六章 向量代数与空间解析几何 ………………………………………… (130)
§6-1 空间直角坐标系 ………………………………………………… (130)
§6-2 向量的线性运算及向量的坐标 …………………………………… (133)
§6-3 向量的数量积和向量积 …………………………………………… (139)
§6-4 平面及其方程 …………………………………………………… (144)
§6-5 空间直线及其方程 ……………………………………………… (148)
§6-6 常用的空间曲面 ………………………………………………… (151)

第七章 多元函数微分学 …………………………………………………… (157)
§7-1 多元函数、极限和连续性 ………………………………………… (157)
§7-2 偏导数 …………………………………………………………… (162)
§7-3 全微分 …………………………………………………………… (167)
§7-4 多元复合函数微分法和隐函数微分法 …………………………… (170)
§7-5 微分法在几何上的应用 …………………………………………… (176)
§7-6 多元函数的极值 ………………………………………………… (179)

第八章 重积分、对坐标的曲线积分 ……………………………………… (184)
§8-1 二重积分的概念和性质 …………………………………………… (184)
§8-2 二重积分的计算 ………………………………………………… (188)
§8-3 二重积分的应用 ………………………………………………… (198)
* §8-4 三重积分的概念和计算 …………………………………………… (203)
§8-5 对坐标的曲线积分 ……………………………………………… (208)

§8-6 格林公式及其应用 …………………… (212)

第九章 微分方程 …………………… (219)
§9-1 微分方程的基本概念 …………………… (219)
§9-2 可分离变量的微分方程 …………………… (221)
§9-3 齐次微分方程 …………………… (223)
§9-4 一阶线性微分方程 …………………… (225)
§9-5 可降阶的高阶微分方程 …………………… (229)
§9-6 二阶线性微分方程的解的结构 …………………… (233)
§9-7 二阶常系数线性微分方程 …………………… (237)

第十章 无穷级数 …………………… (244)
§10-1 数项级数 …………………… (244)
§10-2 数项级数的审敛法 …………………… (248)
§10-3 幂级数 …………………… (254)
§10-4 函数展开成幂级数 …………………… (258)
§10-5 付里叶级数 …………………… (264)
§10-6 正弦级数和余弦级数 …………………… (270)
§10-7 以 $2l$ 为周期的周期函数的付里叶级数 …………………… (273)

附录 积分表 …………………… (277)
习题答案 …………………… (285)

第一章　函数与极限

本章的主要内容是函数、极限与连续性，它们是高等数学中最重要、最基本的概念。函数是高等数学研究的对象；极限则是揭示变量的变化趋势的有力工具，又是建立其它基本概念（如导数、定积分等）的基础；函数的连续性与极限概念密切相关，它反映了函数的一种重要性态。

§1-1　函数的概念

一、变量与函数

1. 区间

我们将自然数集记作 N；整数集记作 Z；有理数集记作 Q；实数集记作 R。

设 a、$b \in R$ 且 $a < b$。有限区间被定义为如下数集：

$$\text{开区间}(a,b) = \{x|a < x < b\}$$
$$\text{闭区间}[a,b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$\text{半开区间}[a,b) = \{x|a \leqslant x < b\}$$
$$(a,b] = \{x|a < x \leqslant b\}$$

其中 a 和 b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度。从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段。此外还有无限区间。引进记号 $-\infty$（读作负无穷大）及 $+\infty$（读作正无穷大），无限区间被定义为如下数集：

$$(a, +\infty) = \{x|a < x\}$$
$$[a, +\infty) = \{x|a \leqslant x\}$$
$$(-\infty, b) = \{x|x < b\}$$
$$(-\infty, b] = \{x|x \leqslant b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = R$$

以后如果遇到所作的论述对各类区间（有限或无限；开或闭或半开）都适用时，为了使叙述更简捷，就用“区间 I”来代表它们。

下面介绍邻域的概念。

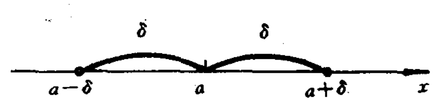

图 1-1

设 a、$\delta \in R$ 且 $\delta > 0$。数集 $\{x||x-a| < \delta\}$ 叫做点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$。因为不等式 $|x-a| < \delta$ 等价于 $a-\delta < x < a+\delta$，所以邻域 $U(a,\delta)$ 就是以点 a 为中心、长度为 2δ 的开区间（图 1-1）：

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$$

有时我们要用到去掉中心的邻域，叫做去心邻域。点 a 的去心 δ 邻域记作 $U(\hat{a},\delta)$：

$$U(\hat{a},\delta) = U(a,\delta)\setminus\{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

即

$$U(\hat{a},\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

2. 常量与变量

当我们考察某个自然现象或技术过程时，常常会遇到许多不同的量，其中有些量在过程进行中始终保持一定的数值，这种量叫做**常量**；另外有些量在过程进行中可以取不同的数值，这种量叫做**变量**。

我们知道，事物的运动是绝对的，而静止是相对的，因此，说某个量是常量，总是相对于一定的问题或在一定的条件下讲的。比如飞行中的飞机的海拔高度 h 一般是个变量，但如果飞机作严格的水平飞行，那么量 h 就成了一个常量。还有，如果一个量在所讨论的问题中变化极微，而这种变化所产生的影响又可以忽略，为了使问题简化，我们就宁可把它当作常量处理。由于常量的相对性和变量的绝对性，今后我们常把常量当作一种特殊的变量来看待。

通常我们用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量。

一个变量能取到的全体数值组成的集合，叫做这个变量的**变化范围**或**变域**。

3. 函数概念

在自然现象或技术过程中往往会出现多个变量，它们之间相互联系，相互依赖。我们首先来讨论两个变量之间的一种确定的数值依赖关系，即所谓函数关系。

定义 1 设 x、y 是两个变量，x 的变域是 D，如果对于每一个数 $x \in D$，变量 y 按照某一法则 f 都有确定的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$。数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**。

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。全体函数值组成的集合

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**。

函数 $f(x)$ 中的字母 f 反映自变量与因变量的对应法则。对应法则也常用字母 φ、g、F 等来表示，相应地，函数就记作 $\varphi(x)$、$g(x)$、$F(x)$ 等。在同一问题中为避免混淆，不同的对应法则要用不同的字母来表示。有时为了简化记号，函数关系也可记作 $y = y(x)$，这时，等号左边的 y 表示因变量，右边的 y 表示对应法则。

例 1 物体在时刻 $t = 0$ 从高度为 h 处自由下落（空气阻力忽略不计），设在时刻 t 下落的距离为 s，则 s 是 t 的函数：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1-1}$$

其中 g 为重力加速度（是常数）。物体到达地面的时间为 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$，所以这个函数的定义域为闭区间 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$。

例 2 圆面积 A 是圆半径 r 的函数：

$$A = \pi r^2$$

其定义域为$(0, +\infty)$。

例 3　设$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$,求$f(-\dfrac{1}{2})$,$f(x+h)$,$f(\dfrac{1}{x})$,$f[f(x)]$。

解　$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

$$f(x+h) = \frac{1}{1-(x+h)} = \frac{1}{1-x-h}$$

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} \quad (x \neq 0, x \neq 1)$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0, x \neq 1)$$

由函数的定义我们可以看出函数关系包含下面两个要素:

(1)　自变量的变化范围即函数的定义域;

(2)　自变量与因变量的对应法则。

由于函数的值域由函数的定义域及对应法则所确定,所以函数的值域不构成函数的要素。两个函数当且仅当它们的定义域及对应法则都相同时,它们是相同的函数。至于用什么字母来表示自变量和因变量,则仅仅是一个形式问题。

在实际问题中,函数的定义域要根据问题的实际意义来确定。如例 1 中,虽然式(1-1)对任何实数t都有意义,但函数的定义域为$[0, \sqrt{\dfrac{2h}{g}}]$。在数学中,我们通常仅考虑用算式来表达的函数,这时我们约定:函数的定义域是使该算式有意义的全体自变量值所组成的实数集。例如函数$y = \dfrac{1}{x^2-1}$的定义域为$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;函数$y = \sqrt{x^2-3x+2}$的定义域为$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$;函数$y = \dfrac{1}{\lg(2x-3)}$的定义域为$(\dfrac{3}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$。

如果自变量取定义域内的任一数值时,对应的函数值都只有一个,这样的函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**。今后若无特别声明,我们所提及的函数都是单值函数。

设有函数$y = f(x)$,$x \in D$。以自变量的值x作为横坐标,对应的函数值$f(x)$作为纵坐标,我们得到xOy平面上的一个点$(x, f(x))$,当x遍取D上的所有数值时,就得到xOy面上的一个点集C:

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

点集C称为函数$y = f(x)$的**图形**。

有时,我们会遇到这样的函数:在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同的公式来表示,这种函数叫做**分段函数**。

例 4　设$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$

求$f(-1)$、$f(0)$、$f(2)$,并作出$y = f(x)$的图形。

解　$f(-1) = (x+1)|_{x=-1} = 0$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = (x - 1)|_{x=2} = 1$$

$y = f(x)$ 的图形如图 1-2 所示。

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

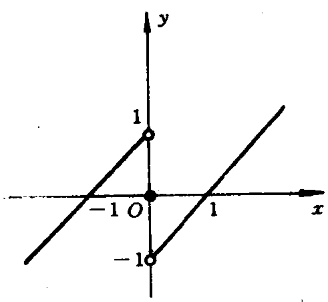

图 1-2

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义。若存在正数 M，使不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任何 $x \in I$ 都成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**。

例如，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$，都有 $|\sin x| \leqslant 1$（取 $M = 1$）；函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上有界，因为对任何 $x \in [2, +\infty)$，都有 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}$（取 $M = \frac{1}{2}$）；但是 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，因为对任意的正数 M，不等式 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 不可能对所有 $x \in (0,1)$ 都成立。

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。如果对于任意的 x_1、$x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**(或**单调减少**)的。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。

一般地，单调增加(或单调减少)的函数的图形是一条沿 x 轴正向上升(或下降)的曲线。

例如，$y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的；$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，因而在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的。

3. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。若对于任一 $x \in D$，都有

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = -f(x))$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**)。

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的的图形关于原点对称。

例如，$y = \cos x$ 是偶函数；$y = x^3 + \sin x$ 是奇函数；$y = \sin x + \cos x$ 既非偶函数，也非奇函数。

4. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D。若存在常数 $l \neq 0$，对任何 $x \in D$，都有

$$f(x \pm l) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数。满足上述等式的最小正数 $l = T$ 叫做 $f(x)$ 的周期。

周期函数的图形具有以下特点：图形上横坐标之差为周期的整数倍的所有点的纵坐标相

等。因此，在这函数定义域内每个长度为T的区间$[a+kT, a+(k+1)T)$ $(k\in Z)$上，函数图形有相同的形状。

例如，$y=\sin x$是以2π为周期的周期函数；$y=\mathrm{tg}x$是以π为周期的周期函数。

三、反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为W。那么，对任一$y\in W$，均可确定$x\in D$，使关系式$f(x)=y$成立。于是按照函数的定义，x成为y的函数：$x=\varphi(y)$，它的定义域为W，值域为D。这个函数叫做$y=f(x)$的**反函数**。相对于反函数$x=\varphi(y)$来说，原来的函数$y=f(x)$叫做**直接函数**。

我们指出，如果对某些$y\in W$，由关系式$f(x)=y$可以确定多个$x\in D$，则反函数$x=\varphi(y)$是多值的。例如$y=x^2$，它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=[0,+\infty)$。在W上任取数值$y\neq 0$，适合关系式$x^2=y$的数值x有两个：$x=\pm\sqrt{y}$，所以这个函数的反函数是多值的。但是不难证明：如果$y=f(x)$是单调函数，则它的反函数必单值。因此，如果限制$x\in[0,+\infty)$，则$y=x^2$是单调增加的，因而它的反函数是单值的，即$x=\sqrt{y}$，我们称它为$y=x^2$的反函数的一个**单值分支**。另一个单值分支为$x=-\sqrt{y}$。

习惯上我们常把自变量记作x，因变量记作y，因此我们把反函数$x=\varphi(y)$改记作$y=\varphi(x)$。这两个函数的定义域都是W，对应规则都是φ，它们是相同的函数，故$x=\varphi(y)$和$y=\varphi(x)$都是$y=f(x)$的反函数。

若在同一坐标平面上作出直接函数$y=f(x)$和反函数$y=\varphi(x)$的图形，则这两个图形关于直线$y=x$是对称的（图1-3）。

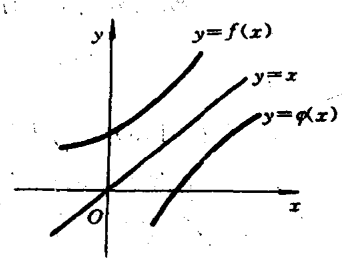

图 1-3

例5 求函数$y=5x+3$和$y=\sqrt{x-1}$的反函数。

解 从以上两式中解出x，求得反函数分别为

$$x=\frac{1}{5}(y-3) \text{ 和 } x=y^2+1$$

再改记为

$$y=\frac{1}{5}(x-3) \text{ 和 } y=x^2+1$$

习 题 1-1

1. 设$f(x)=e^x-1$，求$f(0)$，$f(a)$，$f(\ln x)$。
2. 设$\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$\varphi(-x)$，$\varphi(x)+1$，$\varphi(\dfrac{1}{x})$，$\varphi[\varphi(x)]$。
3. 设$f(x+1)=x^2-3x+1$，求$f(x)$。
4. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\leqslant x<0\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$求$f(x)$的定义域$D$及函数值$f(1)$，$f(-\dfrac{\pi}{4})$，$f(4)$，

并作出它的图形。

5. 在下列各题中，各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$　　(2) $f(x)=1, g(x)=\sin^2x+\cos^2x$

(3) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$　　(4) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$

(5) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{\ln(x-1)}$　　(2) $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$　　(3) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$

(4) $y=\sqrt{\cos x}$　　(5) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

7. 考查下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^2-5\cos x$　　(2) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

(3) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$　　(4) $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0, a\neq 1)$

(5) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　(6) $f(x)=\cos x-\sin x$

8. 下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，求出它的周期。

(1) $y=3\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$　　(2) $y=|\sin x|$

(3) $y=x\sin x$　　(4) $y=\sin x+\cos\frac{1}{2}x$

9. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & -1\leqslant x<0\\ -x+1, & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

写出 $f(x)$ 在 $[1,3)$ 上的表达式，并作出 $f(x)$ 在 $[-1,3)$ 上的图形。

10. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{2x-1}$　　(2) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$　　(3) $y=1+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

§1-2　初等函数

一、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**。这些函数在中学数学中都已学过，我们仅作扼要的复习。

1. **幂函数**

函数 $y=x^\mu(\mu\in R)$ 叫做**幂函数**。

幂函数的定义域可能因 μ 的数值的不同而不同，但不论 μ 为何值，幂函数 $y=x^\mu$ 在(0,

$+\infty$）内总有定义，而且图形都通过点(1,1)。

例如：

$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$；

$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$（它是 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上的反函数）的定义域为$[0,+\infty)$；

$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

以上幂函数的图形如图 1-4 所示。

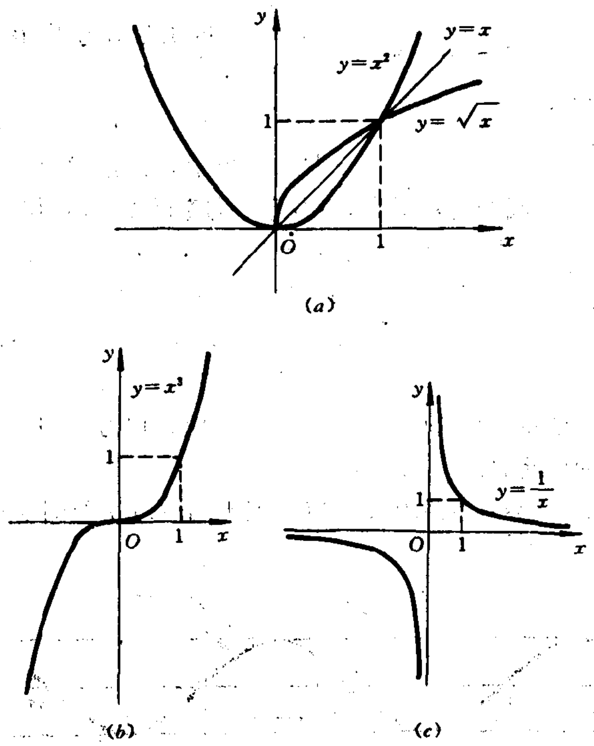

图 1-4

2. **指数函数**

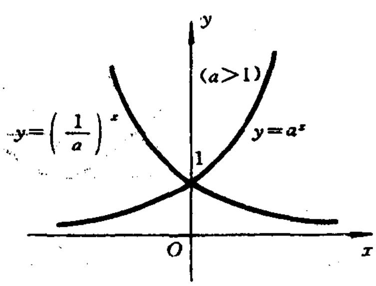

图 1-5

函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 叫做**指数函数**。它的定义域是$(-\infty,+\infty)$。对任何 $x\in R$ 都有 $a^x>0$ 且 $a^0=1$，所以 $y=a^x$ 的图形在 x 轴上方且通过点(0,1)。它的值域是$(0,+\infty)$。

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是单调减少的。$y=a^x$ 和 $y=(\dfrac{1}{a})^x=a^{-x}(a>1)$ 的图形如图 1-5 所示，它们是关于 y 轴对称的。

在科技中经常用到以常数 e 为底的指数函数 $y=e^x$，常数 e 的意义将在 §1-6 中说明。

3. **对数函数**