数学逻辑引论

马振华 编著

清华大学出版社

数学逻辑引论

馬振华　編著

清 华 大 学 出 版 社

内　容　简　介

本书是作者在清华大学多次讲授的基础上写成的。主要介绍数学逻辑中命题演算与谓词演算的基础部分。内容包括：命题与逻辑联结词，真值函数及其等价变换，范式与正则范式，命题演算的演绎理论，定理证明自动化，谓词概念，量词，命题函数及其变换，谓词演算的演绎系统等。本书的特点是从计算机科学的需要出发，以朴素直观的特点，用"半"形式化的方法深入浅出的介绍了广大计算机科技工作者迫切需要掌握的基础理论。

本书可做为计算机软件、硬件，应用数学，自动化，人工智能以及经济信息管理等专业的师生及科技工作者的教材或参考书，亦可作为上述专业人员自学的参考书。

数学逻辑引论
马振华　编著
*
清华大学出版社出版
北京　海淀　清华园
北京海淀草桥印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
*
开本：787×1092 1/32　印张：8 3/4 字数：
1982年12月第一版　1983年1月第一次印刷
印数1—35000
统一书号：15235.60　定价：1.00元

前　　言

由于计算机的使用迅猛发展，日益普及，作为计算机科学理论基础的数学逻辑也越来越成为从事计算机硬、軟件工作者，计算机系的高年级学生，以及广大程序员所必须的理论基础。为此我校计算机系曾举办了每周一次的讲座（1978～1979）本书初稿就是它的产物。其后本书又作为我校应用数学系为研究生班开设“集合论与数理逻辑”课程的教材。（1979～1980）本书是在总结教学实践的基础上，对初稿作了较大的修改而写成的。

本书从计算机科学的需要出发，不作純数学逻辑的研究，而侧重于它在计算机科学方面的应用。其特点是：

1．在论述中不采用完全形式化的方法，而采用“半”形式化的方法。特别着重于对所研究的对象，如何采用形式化的方法以及说明其实际背景。换言之，我们把数学逻辑中的形式化方法作为计算机科学工作者手中的一种工具。

2．在进行形式演算时，我们着重于阐明它的直观背景，而不单純地追求严格性。

3．本书不象传统的数理逻辑教程那样单純地进行純形式的演算，而是不排斥任何一种有用的数学工具，凡是有助于理解的各种方式和方法，我们兼貯并收，不自縛手足。

本书附有大量的例题与习题，希望能对广大自学的同志们提供一些帮助。但因限于编者的水平，欢迎读者批评指正。

在编写的过程中，得到了应用数学系及计算机系许多同

志的支持和鼓励，尤其是康静安，解学书，李大法等同志。李大法同志还校阅了我的大部分手稿，提出了许多宝貴的建议，编者在此表示深深的謝意。

编著者于清华园

1981.10.

目　　录

I　命题演算

§ 1　引言……………………………………………………（1）
§ 2　命题与符号……………………………………………（3）
§ 3　逻辑联结词……………………………………………（7）
§ 4　命题变量与真值函数（命题公式）……………（18）
§ 5　真值函数类……………………………………………（27）
§ 6　真值函数的等价变换（命题公式的等价变换）
—逻辑联结词的互相转化…………………（32）
§ 7　对偶律…………………………………………………（52）
§ 8　永真蕴含………………………………………………（58）
§ 9　真值函数类的势……………………………………（70）
§ 10　其他逻辑联结词……………………………………（77）
§ 11　逻辑联结词的功能完备集…………………………（85）
§ 12　古典命题逻辑中逻辑联结词的总体……………（91）
§ 13　命题演算系统的一个純算术模型及其应用……（94）
§ 14　真值函数的范式与正则范式……………………（108）
§ 15　范式的编码…………………………………………（135）
§ 16　真值函数的各种表示法（波兰式与
逆波兰式）…………………………………………（142）
§ 17　命题演算的演绎理论……………………………（154）
§ 18　定理证明的自动化…………………………………（181）

Ⅲ 谓词演算

§19 引言—命题演算的局限性……………………（196）
§20 命题与謂词……………………………………（197）
§21 命题函数（謂词公式）与量词………………（203）
§22 自由变元与約束变元（或自由变量与
约束变量）……………………………………（224）
§23 有效公式与等价性……………………………（237）
§24 謂词演算的演绎理论…………………………（254）
§25 含有多个量词的謂词公式……………………（265）

I 命题演算

§1 引 言

什么是数学逻辑学？用数学家 D.Hilbert(1862～1943)的话来说："它是把数学上的形式化的方法，应用到逻辑领域的结果。"因此它是一门纯数学，同时也是一门应用数学，一门边缘性的科学；它既可以认为是数学逻辑，也可以认为是逻辑数学，在研究当中数学与逻辑是相互渗透的。这一点正好也是二十世纪许多科学的共同特点。

近年来数学逻辑学与计算机科学之间亦相互渗透，数学逻辑的大量方法开始运用于计算机軟件的理论研究中，使得数学—逻辑—计算机科学之间的关系越来越密切，对这门科学的发展起了很大的推动作用，使得它蓬勃地发展起来。

关于它的发展历史，简略说来大体上可分为三个阶段：

1. 用数学方法研究逻辑问题

一般认为是由 G.W.Leibnitz (1646～1716)首先提出的一般文字学设想开始，他提出过有关思维演算的想法。他曾说过："我们需要的是，它能使人们的推理不依赖于对推理过程中的命题的含义内容的思考，正象近代数学使得广义的计算也可以不依赖于对计算中出现的符号和含义的内容的思考。"然而他的这种先驱性的思想没有得到应有的发展，淹没了约一个世纪之久，直到十九世纪英国的两个数学家 A.De-Morgan (1806～1878)和 G.Boole (1815～1864)用代数的

方法，建立了逻辑代数。但 G.Boole 的逻辑代数与 Aristotas（384～322B.C.）的形式逻辑本质上是相似的。

1879年德国数学家 G.Frege 建立了命题演算与一阶謂词演算，完成了初等逻辑的两个演算，产生了质的飞跃，比 Aristotas 的形式逻辑更丰富了。

1930年奥地利数学家 K.Gödel（1906～1978）证明了命题演算与一阶謂词演算的完全性，表明这两个演算已完全地反映了演绎推理的规律，说明运用这些推理规则是可靠的，是不会产生逻辑矛盾的。

2. 研究数学中的逻辑问题

通过研究数学中的逻辑问题，既丰富了逻辑学也促进了数学的发展，它逐步地形成：

1 公理集合论：是利用公理化的方法对集合论加以研究，它既可以看作是关于集合的数学理论，又可以了解为外延逻辑的数学理论。

2 证明论：研究数学证明的理论。

3 递归论：研究可计算性理论，给出算法的精确定义；研究可证明性与可计算性之间的关系。

4 模型论：分析形式系统中“真”的概念的可定义性，研究形式系统和数学模型之间的关系。

5 数学基础：研究数学基础问题以及数学与哲学之间的关系。

6 逻辑与计算机：研究逻辑在计算机科学中的应用及其相互关系问题。

3．研究各学科中的逻辑问题以及非古典逻辑

随着近代科学的发展，各学科之间的互相渗透，使数学逻辑有了更大的发展，现在不仅仅有古典二值逻辑，还产生了多值逻辑以至于无穷多値逻辑（即 Fuzzy 逻辑），不仅仅有演绎逻辑，还产生了归納逻辑，概率逻辑以及模态逻辑；不仅仅有静态的逻辑，还有动态的时序逻辑，以及为各种特殊问题制定的特定逻辑，如算法逻辑，程序逻辑；不仅仅有必然推理的逻辑，还有或然推理的逻辑。

近来还有人探讨发明的逻辑。

本书主要限于数学逻辑的基本部分：命题演算与一阶謂词演算，因为它是现代数学逻辑的基础。

§2　命题与符号

大家知道自然语言是人们交流思想的工具，它一方面能够表达极其精细而深刻的思想，另一方面它又能表达那些模棱两可糊涂而又含混的观念，这在交流思想方面是非常合适的，然而对于我们进行严格的推理是很不利的。为此我们要建立一种严格的人造语言，一种形式化的语言。为了与自然语言相区别，我们把这种语言称之为**对象语言**，而把自然语言称为**元语言**。在我们的对象语言中，我们要引进一种类似于元语言中“语句”的基本单元—命题。（proposition）

什么叫做**命题**？

我们对它不作公理的陈述，而是从朴素直观的立场加以说明。从逻辑上说命题就是判断，从思维形式对客观现实的反映来看，它具有表述、报道的作用，而且通过表述报道，

显示一种肯定与否定的功能。它总是要指明对某事物的认识和理解是对的，或是错的。

判断在自然语言中总是用语句来表示的，通常总是用陈述句（Declarative Sentence）来表示的。因此，我们常说：一个陈述句是一个命题，而感叹句与疑问句都不是。不过这句话还需要解释：

一个陈述句，对于它所表述的内容，可以断定是“真”的还是“假”的，但不能是含糊不清的。只有这样的句子，才表示一个命题。

例 2.1 下面诸语句是否都表示命题？

1）加拿大是一个国家。
2）莫斯科是西班牙的首都。
3）3＋3＝6。
4）2是偶数而5不是偶数。
5）1＋101＝110。
6）北京是一座古城。
7）椅子在桌子的右边。
8）人们将在1999年登上火星。
9）平面图形的“四色猜想”是正确的
10）“哥德巴赫猜想”是正确的。
11）上校的命令已被执行。
12）我喜欢贝多芬的音乐。
13）哎呀，那还得了！
14）请把门关上！
15）X＝0？

现在，我们来分析上面这些语句，看看它们是不是都表示命题。

很明显1)是一个命题，而且是一个“真”命题。2)也是一个命题，它是一个“假”命题。同样，3)与4)都表示命题，虽然3)不是用语句而是用数学公式表示的，但它们都表示“真”命题。至于5)这个语句则与它的上下文有关，即与该语句所处的环境有关，如果我们在十进位系统中讨论它，那么它是一个“假”命题；如果我们在二进位系统中讨论它，那么它显然是一个“真”命题。

要考查语句6)是不是一个命题，就要对语句6)所表示的判断内容加以检验，看看它是否与实际相符合。经过检验，我们说北京的某些部分是古老的，另一些部分是新的。因此对于它的某些部分来说，这个语句是一个“真”命题，对于另一部分而言，这个语句是一个“假”命题。语句7)根据当时的环境就可以判断它的真假性，它当然是一个命题。同样，语句8)也是一个命题，虽然它的真假性要到1999年才能知道。语句9)是1852年提出的一个数学命题，但它的真假性，一直到1976年，才由美国数学家 K.Appel, W.Haken, J.Koch 利用电子计算机，证明它是一个“真”命题。

语句10)是一个到如今都没有办法断定其真假性的命题。

语句11)与12)虽然是带有命令或感情的色彩，但是它们也都是命题，其原因就在于它们都表达了某种判断。在特定的环境里都可以检验它们的真假性。

语句13)是感叹句，语句14)是純粹的祈使句，所以它们都不是命题。

语句15)是一个包含变量 X 的数学公式，当变量 X 的

值未确定之前，我们是无法断定它是“真”或“假”的，因此它不是命题。

由上面的例 2.1可以看出命题是通过语句表达的。为了判明某一个语句是否表示命题，必须弄清楚在语句中是否直接肯定着什么或否定着什么，如果有这种肯定或否定，那么这个语句就表示命题；如果没有，它就不表示命题。此外，我们还应该注意，在某个语句中有疑问或有感叹的成分时，它本身并不就意味着这个语句就不表示命题。当然純粹祈使句和疑问句，它们并不表示命题，而仅仅表示祈求和疑问而已。

在研究复杂的命题之前，我们首先研究一种最簡单的命题。例如例 2.1中所举出的最簡单的陈述句1)，2)，3)，5)～12）中所列出的命题。我们称之为**原子命题**，（Atomic Statement）或称**原始命题**。（Primary/Primitive）在对象语言中对于原子命题我们要用符号加以表示。通常以大写的或带有下标的拉丁字母来表示：A，B，C，…，P，Q，R，…，A_1，B_1，C_1，…，P_1，Q_1，R_1，…，等等。

注 在原子命题中，我们所用的“原子”这个词，是用它本来的意思，即“不可分割”的意思。而不是近代基本粒子理论中所说的原子。

注 在原子命题中，尽管它们有主语与謂语的结构，但我们都不去进行分析，而是把它们看作是一个整体(看成是一个“层次”)，在整个命题演算中，我们都是这样看待命题的，只是到了謂词演算的时候，我们才对命题作进一步的分析。

§3 逻辑联结词

为了研究复杂的逻辑思维规律，首先我们要对自然语言进行分析，把其中带逻辑成分的联结词提取出来。从历史上看是经历了漫长的岁月才得到这些逻辑联结词，这些词可以看作是自然语言中联结词的一种抽象，一种模型。

由原子命题，通过**逻辑联结词**就能够构成复杂的命题，这些命题统称为**分子命题**（Molecular Proposition）或**复合命题**。（Compound Proposition）

下面我们分别加以讨论：

1．**否定词**（Negation/**否定运算**/**非运算**/**否定算子**）①

设P是一个命题。那么下面的命题：

非P.

不是P.

P **不成立**.

not P.

是一个复合命题，我们表示为：$\neg$P.($\overline{P}$/~P)而把联结词"**非**"，"**不是**"，"not"表示成"$\neg$"（"—"/"~"）称为**否定词**。

例 3·1 设命题

P：London is a city.

于是 $\neg$P：It is not the case that London is

① 我们用斜线"/"表示"或"的意思例如：否定词/否定算子。

a city.

$\neg$P: London is not a city.

上面两个英语句子虽然不同，但它们的逻辑意义是相同的。这就是说，我们要着重于语句中所表达的逻辑意义，而不仅仅看它的语法结构。

例 3.2 设命题

P: I went to my class yesterday.

那么 $\neg$P: I did not go to my class yesterday.

: I was absent from my class yesterday.

: It is not the case that I went to my class yesterday.

例 3.3 设命题

P: 2是一个素数。

那么 $\neg$P: 2不是一个素数。

: 2是一个合数。(Composite number)

例 3.4 设命题

P: 塑料不是金属。

那么 $\neg$P: 塑料不是不是金属。

: 塑料是金属。

注 上面的例子说明了命题是通过陈述句的形式来表达的，但不是由陈述句所唯一确定的。不同形式的陈述句可能只确定同一个命题。

2. 合取词(Conjunction/合取运算/积运算/合 取算子)

设 P, Q 是两个命题，那么下面的命题：

P **并且** Q.

P **和** Q.

P **及** Q.

P and Q.

是一个新的复合命题，我们表示为：$P\wedge Q$. 并把其中的联结词“**并且**”，“**而且**”，“and”表示成“$\wedge$”称为**合取词**。

例 3.5 设命题

P：今天下雨。

Q：教室里有20张桌子。

R：$2+2=4$.

于是 $P\wedge Q$：今天下雨**并且**教室里有20张桌子。

$P\wedge R$：今天下雨**并且**$2+2=4$.

注 在自然语言中，联结词“并且”，“and”多半用来表示两种同类事物的并列，象上面的 $P\wedge Q$, $P\wedge R$ 却有点使人奇怪。它们的两个并列子句，在意义上是毫不相干。而我们之所以要举上面的例子，正是想着重指出，我们现在只考虑命题与命题之间的形式关系，而不去顾及它的**含义**（内容）。正如我们在研究语言的语法规则时，根本不去考虑词的意义是一样的。

例 3.6 把下面的命题形式化

R：**杰克同吉尔一起登上了山峰。**

我们把上面的命题改写成：

R： 杰克登上了山峰**并且**吉尔也登上了山峰。

再令　P： 杰克登上了山峰。

Q： 吉尔登上了山峰。

所以，所给的命题是 R：$P\wedge Q$.

例 3.7 分析下面的例子。

1) Roses are red **and** violets are blue.
2) He opened the book **and** started to read.
3) Jack **and** Jill are cousins.
4) Mark is poor **but** happy.

现在，我们来分析。

1)中的"and"相当于我们的合取词。这是因为我们如果设：

P：玫瑰花是红色的。

Q：紫罗兰是兰色的。

那么1)中的命题就是 $P\wedge Q$.

2)中的"and"相当于"and then"，它不相当于我们的合取词，这是因为我们如果设：

P：他打开书。

Q：他开始阅读。

那么，$P\wedge Q$ 与 $Q\wedge P$ 就不一样了。（以后我们会知道 $P\wedge Q$ 与 $Q\wedge P$ 应该是一样的）

3)中的"and"不相当于我们的合取词。

4)中根本没有出现"and"，但是如果我们设：