半純函数的聚值綫理论

李国平著

科学出版社

中国科学院武汉数学研究室函数論叢書
(一)

半純函数的聚值綫理論

李 国 平 著

科 学 出 版 社
1 9 5 8

內 容 提 要

本書分为五章：I 函数的規則化理論；II 半純函数理論中的兩个基础定理；III 半純函数的聚值綫(I)統一的理論；IV 半純函数的聚值綫(II)个别的理論；V 圓內半純函数的聚值点。

半純函数的聚值綫理論

李国平 著

*

科学出版社出版(北京朝陽門大街117号)

北京市書刊出版業營業許可証出字第061号

科学出版社上海印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1958年9月第一版　書号：1341　字数：250,000

1958年9月第一次印刷　开本：787×1092 1/18

(滬)0001—2184　印張：10 4/9

定价：(10) 1.60元

目　　录

第一章　函数的規則化

导　論

从一个給定的实变量 r 的实函数 $f(r)$ 来作出一个和它紧密联系着的、满足某些条件(A)的函数 $\varphi(r)$，叫做按条件(A)規則化 $f(r)$ 为 $\varphi(r)$。函数的規則化理論在整函数和半純函数論中，在函数之近似法理論和准解析函数論中有着广泛的应用。因此，掌握函数規則化理論在函数論工作上有着重大的意义。

在这里我們先叙述三个啓蒙定理，然后在本章中討論几个特殊的規則化問題作为处理本書中心問題的准备。

1. Du Bois-Reymond 氏定理. 設 $\varphi_n(x)$ 为半开区間 $x_0\leqslant x<+\infty$ 上之正値函数，有界于其存在区間上每一有界区間者 $(n=1,2,\cdots)$，則必有不减函数 $F(x)$ 存在，致

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\varphi_n(x)}=+\infty \quad (n=1,2,\cdots).$$

命

$$f(n)=\mathrm{Max}[\sup_{x_0\leqslant x\leqslant n+1}\varphi_1(x),\cdots,\sup_{x_0\leqslant x\leqslant n+1}\varphi_n(x)]; \tag{1}$$

当 $n\leqslant x\leqslant n+1$ 时，則命

$$f(x)=f(u)+(x-n)[f(n+1)-f(n)]. \tag{2}$$

由(1)，則 $f(n)\leqslant f(n+1)$；由(2)則 $f(x)$ 为 x 之不减函数；又由(1)，則

$$\varphi_p(x)\leqslant f(n) \quad (p\leqslant n,\ x_0\leqslant x\leqslant n+1). \tag{3}$$

如 $n\leqslant x$，則必有一正整数 m 俾 $n\leqslant m\leqslant x<m+1$，由(3)又見 $n\leqslant x$ 致

$$\varphi_n(x)\leqslant f(m)\leqslant f(x).$$

取任一不减函数 $H(x)$ 致 $\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)=+\infty$ 者，命

$$F(x)=f(x)H(x),$$

則

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\varphi_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi_n(x)}H(x)\geqslant\lim_{x\to+\infty}H(x)=+\infty.$$

2. Borel 氏定理. 設 $W(r)$ 为 r 在 $r\geqslant r_0'$ 上之正値不减的單值有限的函数，并命 $W(r)=W(r+0)$，且設 $\lim\limits_{r\to+\infty}W(r)=+\infty$，則不論 α 为如何小之正数必致

$$W\left(r+\frac{1}{\log W(r)}\right)<[W(r)]^{1+\alpha} \tag{1}$$

但須除去区間 $(r\geqslant r_0')$ 上可数多个長度之和为有限的小区間。

命 $k=1+\alpha$. 假設(1)式不完全成立，于 r 充分大时，取相 r_0 当大俾致

$$W(r_0)>1,$$

$$W\left(r_0+\frac{1}{\log W(r_0)}\right)\geqslant[W(r_0)]^k.$$

置 $r_0'=r_0+\dfrac{1}{\log W(r_0)}$，$\Delta_0=r_0'-r_0$. 命 $r\geqslant r_0'$ 上不致(1)式之 r 的最小者为 r_1，則有

$$r_1'=r_1+\frac{1}{\log W(r_1)},\quad \Delta_1=r_1'-r_1,\quad W(r_1')\geqslant[W(r_1)]^k.$$

依此进行，設 r_{n-1} 之意义已定，則命 $r_{r-1}'=r_{r-1}+\dfrac{1}{\log W(r_{r-1})}$，并令 $(r\geqslant r_{r-1}')$ 上不致(1)式之 r 的最小者为 r_r，則有

$$r_r'=r_r+\frac{1}{\log W(r_r)},\quad \Delta_r=r_r'-r_r,\quad W(r_r')\geqslant[W(r_r)]^k.$$

这样，不致(1)式之 r 除包含在 $(0\leqslant r\leqslant r_1)$ 上之部分区間上者外全部均在一串区間

$$[r_r,\ r_r']\qquad(r=1,\ 2,\ \cdots)$$

上. 現在可以証明这些区間的長度总和 $\sum\limits_{r=1}^{+\infty}\Delta_r$ 为有限.

由

$$W(r_r)\geqslant W(r_{r-1}')\geqslant[W(r_{r-1})]^k,$$

則

$$W(r_r)\geqslant[W(r_0)]^{k^r}.\tag{2}$$

故

$$\Delta_r=\frac{1}{\log W(r_r)}\leqslant\left(\frac{1}{k}\right)^r\frac{1}{\log W(r_0)}.$$

$$\therefore\quad \sum_{r=1}^{+\infty}\Delta_r\leqslant\frac{1}{\log W(r_0)}\sum_{r=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^r.$$

定理得証. 注意：由(2)可見 $\lim\limits_{r\to+\infty}W(r_r)=+\infty$，随之也見 $\lim\limits_{r\to+\infty}r_r=+\infty$.

3. Nevanlinna 氏定理. $W(r)$ 之定义同前述 Borel 定理. 設 $\varphi(r)$ 为 r 在 $(r\geqslant r_1')$ 上不增的正值函数，可积分于每一有限区間內，設

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t\log t}\,dt<+\infty,\tag{1}$$

則不論 α 为如何小之正数，必致

$$W(r+\varphi[W(r)])<[W(r)]^{1+\alpha},\tag{2}$$

但須除去区間 $(r\geqslant r_0^0)$ 上可数多个区間其長的总和 L 致

$$L\leqslant\varphi(W_0)+\frac{1}{\log(1+\alpha)}\int_{W_0}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t\log t}\qquad(T_0=W(r_0)>e)$$

者. 反之，設

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t\log t}\,dt=+\infty,$$

則必有 $W(r)$，致

$$W(r+\varphi[W(r)])\geqslant[W(r)]^{1+\alpha}.$$

就此定理，命

$$\varphi(t)=\frac{1}{\log t}\quad(t>1),$$

则此定理即是 Borel 定理.

現在来寻求 $\varphi(r)$ 所应满足之条件，俾致

$$W(r)+\varphi[W(r)]\geqslant W(r)+1 \tag{3}$$

之 r 如果存在必在可数多个長度之和为有限的区間内.

$W(r)$ 及 $\varphi(r)$ 均为單調函数，其間断点都是第一类間断点，这些点成一可数集合. 假設在間断点上 $W(r)=W(r+0)$，$\varphi(r')=\varphi(r'+0)$.

下面用 W_r 表 $W(r_r)$.

命 r_1 为 r 之最小値，致

$$W(r_1+\varphi[W(r_1)])\geqslant W_1+1$$

者；以 $r(W)$ 表示 $W(r)$ 之反函数，则

$$r_1+\varphi(W_1)\geqslant r(W_1+1).$$

致

$$\Delta_1=r(W_1+1)-r_1\leqslant\varphi(W_1).$$

命 r_2 为 r 在区間 $(r\geqslant r(W_1+1))$ 上之最小値，致

$$W(r_2+\varphi(W_2))\geqslant W_2+1$$

者，则

$$\Delta_2=r(W_2+1)-r_2\leqslant\varphi(W_2),\quad r_2\geqslant r(W_1+1).$$

准此，可用数学归納法定出 $r_3, r_4, \cdots$，使致

$$r_0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_r\leqslant\cdots,$$

$$\Delta_r=r(W_r+1)-r_r\leqslant\varphi(W_r), \tag{4}$$

$$r_{r+1}\geqslant r(W_r+1)=r_r+\Delta_r, \tag{5}$$

在这里 r_{r+1} 为 r 在区間 $(r\geqslant r(W_r+1))$ 上之最小値，致

$$W(r_{r+1}+\varphi(W_{r+1}))\geqslant W_{r+1}+1$$

者. 容易看見(3)式在 $r_r+\Delta_r\leqslant r<r_{r+1}$ 上不成立，其反面成立:

$$W(r+\varphi[W(r)])<W(r)+1,\quad r_r+\Delta_r\leqslant r<r_{r+1}.$$

如 r_n 有無限多个，则必 $\lim r_n=+\infty$. 若果 $\lim r_n=r_\infty=R<+\infty$，则从

$$W(r_\infty)\geqslant W(r_n)\geqslant W+n-1\quad(\text{不論 } n \text{ 为如何大})$$

立得一个矛盾. 又从次式:

$$\sum_{r=1}^{n}\Delta_r\leqslant\sum_{r=1}^{n}\varphi(W_r)\leqslant\sum_{r=1}^{n}\varphi(W_0+n-1)<\varphi(W_0)+\int_{W_0}^{W_n}\varphi(t)\,dt$$

亦見 Δ_r 之和随 $\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt<+\infty$ 而为有限. 故得:

I. 設 $\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt<+\infty$，则 r 之値致不等式

$$W(r+\varphi[W(r)])\geqslant W(r)+1$$

者必在可数多个区間内其長之和小于

$$\varphi(W_0)+\int_{W_0}^{W}\varphi(t)\,dt.$$

由此結果出發，立可推得定理之前段.

如果(2)式成立，則令 $k=1+\alpha$，应有

$$\frac{\log\log W(r+\varphi[W(r)])}{\log k}<1+\frac{\log\log W(r)}{\log k}.$$

令
$$W_1(r)=\frac{\log\log W(r)}{\log k},\quad \varphi_1(W_1)=\varphi(W).$$

則上式化为下式:

$$W_1(1+\varphi(W_1))<1+W_1(r). \tag{6}$$

反之，如此式成立，則得(2)式. 又

$$\int_{W_0}^{\infty}\varphi_1(W_1)=\int_{W_0}^{\infty}\varphi(W)\frac{dW_1}{dW}\,dW=\int_{W_0}^{\infty}\frac{\varphi(W)}{\log k}\,\frac{dW}{W\log W}<+\infty,$$

此由(1)式可見. 因此 I 之結果可应用于函数 $W_1(r)$ 及 $\varphi_1(t)$ 定理前段得証.

現在来証明定理之后段.

命 $\varphi(t)$ 为不增函数致 $\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=+\infty$ 者，則

$$r=r(W)=\int_0^W\varphi(t)\,dt$$

之反函数 $W=W(r)$ 为不減函数，$r\to+\infty$ 致 $W(r)\to+\infty$.

但

$$W(r+\varphi[W])=W(r)+W'(r+\theta\varphi)\varphi(W),\ (0<\theta<1)=$$
$$=W(r)+\frac{\varphi(W)}{\varphi(W[r+\theta\varphi])}\geqslant W(r)+1,$$

故得:

II. 設 $\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=+\infty$，則必有不減函数 $W(r)$ ($r\to+\infty$ 致 $W(r)\to+\infty$) 致 $W(r+\varphi[W(r)])\geqslant W(r)+1$ 者存在.

据此結果施用前段的轉化，則得定理后段之証.

本　論

I. Blumenthal 氏函数型

1. 在前述 Borel 氏定理之証法中已經得出如次之結果: 設 $W(x)$ 为 x 在 $(x\geqslant x_0')$ 上之正値不減的單値有限的函数，$W(x)\to+\infty$ 当 $x\to+\infty$ 时; α 为任何正数，則在 $x\geqslant x_0\,(x_0\geqslant x_0')$ 上不致

$$W\left(x+\frac{1}{\log W(x)}\right)<[W(x)]^{1+\alpha} \tag{1}$$

之 x 必在一串其長之和 $L<\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\log W(x_0)}$ 的間隔上，但 x_0 相当大致 $W(x_0)>1$.

現在我們来推广这个結果作为制作 Blumenthal 氏函数型的論据.

为簡化用語起見,本章一律用無穷小一辞来表示不增的連續正函数 $\varepsilon(x)$, $\eta(x)$, $\cdots$ 等等,此皆随 $\frac{1}{x}$ 而趋进于 0, 虽然这个名称在微积分中的意义比較广泛. 这些無穷小量 $\varepsilon(x)$, $\eta(x)$, $\cdots$ 有时亦簡写为 ε, η, $\cdots$. 但 α, β, $\cdots$ 則用以表示正常数.

想用無穷小 $\varepsilon(x)$ (簡写为 ε) 代换 (1) 式之 α, 則可添加次列条件:

(E_a) εe^x 为不減函数;

(F) $\varepsilon \log W(x)$ 为不減函数且 $\lim \varepsilon \log W(x) = +\infty$.

試取 x_0 为相当大之值不致次式:

$$(1_a)\qquad W(x') < W(x)^{1+\varepsilon}, \quad x' = x + \frac{1}{\log W(x)},$$

而致 $\varepsilon_0 \log W(x_0) > 1$ $(\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0))$ 者,試求 $x_0 \leqslant x \leqslant X$ $(X = x_0 + 1)$ 間不致 (1_a) 之 x 所在区間之長度和! 由 (E_a) 可見 $x_0 \leqslant x \leqslant X$ 必致

$$\varepsilon \geqslant \frac{\varepsilon_0 e^{x_0}}{e^x} \geqslant \frac{\varepsilon_0 e^{x_0}}{e^x} = \frac{\varepsilon_0}{e}.$$

如果用 $\frac{\varepsilon_0}{e}$ 代替 (1) 式之 α, 則其例外間隔之長度和小于

$$\eta_0 = \frac{1}{\log W(x_0)}\left(1 + \frac{e}{\varepsilon_0}\right), \quad \eta_0 \text{ 表 } \eta(x_0),$$

在这里, $\eta(x) = \frac{1}{\log W(x)}\left(1 + \frac{e}{\varepsilon_0}\right)$ 为一無穷小 $(x \geqslant x_0)$. 因此 (x_0, X) 間致 (1_a) 之区間(簡称 (1_a) 之常区間)的長度之和大于 $1 - \eta_0$, 于是得:

补題 1. 在 $[x_0, x_0+1]$ 上 (x_0 不致 (1_a) 之 x 且致 $W(x_0) > 1$ 者) (1_a) 之常区間之長度和与 (1_a) 之例外区間之長度和二者之比其極限随 x_0 而趋近于 $+\infty$. (此补題就 x_0 之集不为有界者而論,如充分大的 x 皆致 (1_a) 則不須此).

現在来精密化此判断的內容. 設 m 为在 $[x_0, x_0+1]$ 上 (1_a) 之例外区間 (此处指的是 Borel 定理的証法中的例外間隔) 的个数,这些間隔可用以下符号标明之:

$$[x_0, X_0], [x_1, X_1], \cdots, [x_{m-1}, X_{m-1}],$$

則必至少有一整数 i, $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ 致

$$x_{i+1} - X_i > \frac{1-\eta_0}{\eta_0}(X_i - x_i), \quad \eta_0 = \frac{1}{\log W(x_0)}\left(1 + \frac{e}{\varepsilon_0}\right). \qquad (2)$$

否則 $[x_0, x_0+1]$ 之長將小于 1, 此不可能.

由 Borel 氏定理之証法, 則知 $[x_j, X_j]$ 至少含 $[x_j, x_j']$ $\left(x_j' = x_j + \frac{1}{\log W(x_j)}\right)$, $(j = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$, 故由 (2) 式得出

$$x_{i+1} - X_i > \frac{1-\eta_0}{\eta_0} \frac{1}{\log W(x_i)}. \qquad (3)$$

Borel 氏定理之推广一. 設無穷小 $\varepsilon(x)$ 致 (F) 及次列条件:

(E_b) εx 为不減函数;

$W(x)$之意义同前，則在区間$[x_0, ex_0]$上次式：

$$(1_b)\qquad W(x') < W(x)^{1+\varepsilon}, \quad x' = x\left[1+\frac{1}{\log W(x)}\right]$$

底例外区間的長度和与原区間長度之比随$\frac{1}{x_0}$而趋近于0，在这里x_0为(1_b)之例外值（如x_0之集为有界則不須此）.

把(1_a)写成如次形式：

$$U(y') < U(y)^{1+\varepsilon}, \quad y' = y + \frac{1}{\log U(y)};$$

它在$[y_0, y_0+1]$上例外区間之長度和小于

$$\left(1+\frac{e}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{\log U(y_0)},$$

在这里，$\varepsilon=\varepsilon(y)$，而$\varepsilon e^y$为不减函数，然后令

$$y=\log x, \quad U(y)=U(\log x)=W(x),$$

則得

$$(1_{a'})\qquad W(x') < W(x)^{1+\varepsilon}, \quad x' = xe^{\frac{1}{\log W(x)}},$$

$(E_b)\qquad \varepsilon x$为不减函数，$\varepsilon=\varepsilon(\log x)$；

其例外区間尚待討論.

因 $$e^{\frac{1}{\log W(x)}} > 1+\frac{1}{\log W(x)}, \quad (W(x)>1\text{ 时}).$$

由$(1_{a'})$得

$$(1_b)\qquad W(x') < W(x)^{1+\varepsilon}, \quad x' = x\left[1+\frac{1}{\log W(x)}\right],$$

其例外区間尽含于$(1_{a'})$之例外区間内.

$(1_{a'})$之例外区間在$[x_0, \overline{X}]$ $(\overline{X}=ex_0)$，上者設为

$$[x_0, X_0], [x_1, X_1], \cdots, [x_{m-1}, X_{m-1}],$$

則由前述知必有

$$(\log X_0-\log x_0)+(\log X_1-\log x_1)+\cdots+$$
$$+(\log X_{m-1}-\log x_{m-1}) < \left(1+\frac{e}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{\log W(x_0)},$$

x_0充分大且为$(1_{a'})$之例外值.

由中值定理，$\frac{dx}{d\log x}=x$，則

$$(x_i, X_i) = X_i - x_i = \xi_i(\log X_i - \log x_i)\ (x_i<\xi_i<X_i).$$

故$\xi_i<\overline{X}$，得出

$$(x_0, X_0)+(x_1, X_1)+\cdots+(x_{m-1}, X_{m-1}) <$$
$$<\left(1+\frac{e}{\varepsilon_0}\right)\overline{X}\ \frac{1}{\log W(x_0)} = \frac{e}{e-1}\left(1+\frac{e}{\varepsilon_0}\right)\frac{\overline{X}-x_0}{\log W(x_0)}.$$

据此，計及(F)，則見$(1_{a'})$及$(1_{b'})$在$[x_0, \overline{X}]$上之例外区間的長度和与常区間的

長度和之比随 $\frac{1}{x_0}$ 而減少，并以 0 为極限.

上述 Borel 氏定理之推广一得証.

注意，(2)式轉換为次形：

$$(2_b)\qquad \log x_{i+1}-\log X_i>\frac{1-\eta}{\eta}(\log X_i-\log x_i),$$

$$\eta_0=\left(1+\frac{e_0}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{\log W(x_0)};$$

(3)式轉化为次形：

$$(3_b)\qquad \log x_{i+1}-\log X_i>\frac{1-\eta}{\eta}\frac{1}{\log W(x_i)},$$

在这里 i 为某一固定指标 $(0\leqslant i<m)$.

应用上面的結果于 $U(y)$，然后令 $y=\log x$, $U(y)=W(x)$，則得：

Borel 氏定理之推广二. 設 $W(x)$ 为 x 在 $x\geqslant x_0'$ 上之正值不減的單值有限的函数致 $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x)=+\infty$ 者；設 $\varepsilon(x)$ 为無穷小致次列条件：

(F) $\varepsilon(x)\log W(x)$ 为不減的函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)\log W(x)=+\infty$;

(E_c) $\varepsilon(x)\log x$ 为不減函数

者. 則必

$$W(x')<W(x)^{1+\varepsilon},\quad x'=x^{1+\frac{1}{\log W(x)}};$$

但若存在有充分大的例外值 x_0，則在 $[x_0, x_0^e]$ 上必有一常区間 $[X_i x_{i+1}]$ 及一例外区間 $[x_i, X_i]$ 致次列关系：

$$(2_c)\qquad \log\log x_{i+1}-\log\log X_i>\frac{1-\eta}{\eta}(\log\log X_i-\log\log x_i),$$

$$\eta=\left(1+\frac{e}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{\log W(x_0)};$$

$$(3_c)\qquad \log\log x_{i+1}-\log\log X_i>\frac{1-\eta}{\eta}\frac{1}{\log W(x_i)}.$$

以后所用催此定理，讀者留意！

2. Blumenthal 氏定理 A. 設 $W(r)$ 为 r 在 $r\geqslant r_0\geqslant 0$ 上之正值不減的連續函数，且 $\lim\limits_{r\to+\infty} W(r)=+\infty$; 設 $\eta(r)>\frac{4}{\log W(r)}$ 为一無穷小，以致必有另一無穷小 $\varepsilon(x)$ 致如次之条件者存在：

(A) $\varepsilon(r)\leqslant\eta(r)-\frac{4}{\log W(r)}$，此卽 $W(r)^{\eta(r)}\geqslant e^4 W(r)^{\varepsilon(r)}$;

(B) $\varepsilon(r)\log r$ 及 $\varepsilon(r)\log W(r)$ 均为不減的;

(C) $\varepsilon(r)W(r)^{\frac{\varepsilon(r)}{2}}>\log W(r)$, 当 $W(r)>1$ 时.

則必存在函数 $U(r)$，滿足次列条件：

1° $U(r)$ 为 $r\geqslant r_0$ 上之正值不減的連續函数，$\lim\limits_{r\to+\infty} U(r)=+\infty$;

2° 当 r 充分大时，必致 $U(r)\geqslant W(r)$；

3° 至少有一串 $\{r_n\}\to\infty$ 致 $U(r_n)=W(r_n)$；

4° 当 r 充分大时，必致 $U\left(r^{1+\frac{1}{U(r)^{\eta}}}\right)\leqslant U(r)^{1+\eta}$；

5° $\lim\limits_{r\to+\infty} U(r)^{\eta(r)}=+\infty$.

此定理中之函数 $U(r)$，乃按照条件 1°—5° 来規則化 $W(r)$ 而得之函数. 定义为关于函数 $W(r)$ 及無穷小 $\eta(r)$ 之(B)——函数型.

定理中之 5° 可由(A)，(C)及 1°，2° 得出，茲先証明之如次：

命
$$F(X)=\frac{\varepsilon(r)X^{\frac{\varepsilon(x)}{2}}}{\log X},$$

則得
$$F'(X)=\frac{\varepsilon X^{\frac{\varepsilon}{2}-1}(\varepsilon\log X-2)}{2(\log X)^2}.$$

当 $W(r)>1$ 时，由(C)得
$$\log\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\log W>\log\log W,$$

因之又得
$$\varepsilon\log W-2>\log\log W-\log\varepsilon-2.$$

則当 r 充分大时，$\varepsilon(r)$ 充分小，故 $-\log\varepsilon-2>0$，而
$$\varepsilon\log W-2>0.$$

但 $U\geqslant W$ 致
$$\varepsilon\log U-2\geqslant\varepsilon\log W-2,\ \text{故亦致}$$
$$\varepsilon\log U-2>0.$$

由此可見，固定每一充分大的 r，則 $U\geqslant W$ 致 $F'(U)\geqslant0$，而 $F(X)$ 在 $X=W$ 处当为上升的. 得出 $F(U)\geqslant F(W)$.
$$\frac{\varepsilon U(r)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\log U(r)}\geqslant\frac{\varepsilon W(r)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\log W(r)}>1,$$

此中第二不等式从(C)得之. 故 r 充分大时，必致
$$\varepsilon U(r)^{\frac{\varepsilon}{2}}>\log U(r),\quad \varepsilon<1,$$
$$U(r)^{\varepsilon}>[\log U(r)]^2.$$

由(1°)則 $\log U(r)\to+\infty$，故 $U(r)^{\varepsilon}\to+\infty$，計及(A)可見
$$\lim_{r\to+\infty}U(r)^{\eta(r)}=+\infty.$$

此即条件(5°).

現在来进行定理中其他部分的証明.

假使 r 充分大时必致
$$W\left(r^{1+\frac{1}{\log W(r)^{\varepsilon}}}\right)<W(r)^{1+\varepsilon},\tag{1}$$

則自 $\eta(r)>\varepsilon(r)$，应得
$$W\left(r^{1+\frac{1}{\log W(r)^{\eta}}}\right)<W(r)^{1+\eta},$$

这样的 $W(r)$ 可作为 $U(r)$.

假設 (1) 式之例外値所成集不为有界，则可推見(1)之每一充分大之例外値必亦为 Borel 氏定理之推广二中的不等式：

$$W\left(r^{1+\frac{1}{\log W(r)}}\right)<W(r)^{1+\varepsilon} \tag{2}$$

之例外值．其实,(1)式之例外値 r' 如为充分大必致

$$r'^{1+\frac{1}{W(r')^{\varepsilon}}}<r'^{1+\frac{1}{\log W(r')}}. \tag{3}$$

因之,从 $W\left(r'^{1+\frac{1}{W(r')^{\varepsilon}}}\right)\geqslant W(r')^{1+\varepsilon}$ 立得 $W\left(r'^{1+\frac{1}{\log W(r')}}\right)\geqslant W(r')^{1+\varepsilon}$. 但(3)式可化为 $W(r')^{\varepsilon}>\log W(r')$,而此从(C)立可推得,只須 r' 充分大.

因此,(2)式之常区間必含于(1)式之常区間内(r 充分大时)；为制作 $U(r)$,可从 Borel 氏定理推广二关于(2)式之常区間入手．据此,则(2)有一串常区間其端点所成之串遞增于 $+\infty$:

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \cdots,\ [a_\nu,\ b_\nu],\ \cdots$$

俾在其内常致(1)式;就中 $b_\nu^e<a_{\nu+1}$, a_1 充分大,且

$$\log\log b_\nu-\log\log a_\nu>\frac{1-\eta'}{\eta'}\,\frac{1}{\log W(b_{\nu-1}^*)},$$

$$\eta'=\left[1+\frac{e}{\varepsilon(b_{\nu-1})}\right]\frac{1}{\log W(b_{\nu-1}^*)},\quad (b_{\nu-1}\leqslant b_{\nu-1}^*<a_\nu). \tag{4}$$

由(C)可知 η' 与 $\dfrac{1}{b_{\nu-1}}$ 同时趋进于 0, 故如 ν 相当大时, η' 可小于任何已与之正数.

容易証明$[a_\nu,\ b_\nu]$上必存在有一区間 L_ν: $[a_\nu,\ d_\nu]$,俾其上之点致

$$\log\log b_\nu-\log\log\xi_\nu\geqslant\frac{1-\eta'}{2\eta'}\,\frac{1}{\log W(\xi_\nu)}. \tag{5}$$

其实, $x\geqslant a_\nu$ 致

$$\frac{1-\eta'}{2\eta'}\,\frac{1}{\log W(x)}\leqslant\frac{1-\eta'}{2\eta'}\,\frac{1}{\log W(b_{\nu-1}^*)}.$$

由(4),则

$$\log\log b_\nu-\log\log a_\nu>\frac{1-\eta'}{2\eta'}\,\frac{1}{\log W(x)},\quad (x\geqslant a_\nu).$$

取連續函数

$$\Phi(x)=\log\log b_\nu-\log\log x-\frac{1-\eta'}{2\eta'}\,\frac{1}{\log W(x)}$$

加以檢查,則 $\Phi(b_\nu)<0$, $\Phi(a_\nu)>0$; 故在$(a_\nu b_\nu)$内必至少有 $\Phi(x)=0$ 之根; 而 a_ν 不能为此方程之根所成集之聚結点亦不能为其下确界, 故 $\Phi(x)=0$ 之根所成集之下确界 $d_\nu>a_\nu$. 故 $a_\nu\leqslant\xi_\nu\leqslant d_\nu$ 致 $\Phi(\xi_\nu)\geqslant 0$.

取一組正交坐标軸$(Ox,\ Oy)$.

曲綫方程 $y=\varphi_\nu(x)$ 中之函数 $\varphi_\nu(x)$ 由次式决定之:

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu}\,\frac{1}{W(\xi_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}-\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{\varphi_\nu(x)^{\frac{\varepsilon}{2}}}=\log\log x-\log\log\xi_\nu, \tag{6}$$

就中$(\xi_\nu, W(\xi_\nu))$表示$y=W_\nu(x)$之一点，$y=W_\nu(x)$为曲綫$y=W(x)$在$[a_\nu, b_\nu]$上一段之方程，$\varepsilon_\nu=\varepsilon(\xi_\nu)$，$\varepsilon=\varepsilon(x)$.

設x_1, x_2充分大，，$x_1<x_2$，則由(5)应得

$$\frac{1}{\varepsilon(x_1)}\frac{1}{\varphi_r(x_1)^{\frac{\varepsilon(x_1)}{2}}}-\frac{1}{\varepsilon(x_2)}\frac{1}{\varphi_\nu(x_2)^{\frac{\varepsilon(x_2)}{2}}}=\log\log x_2-\log\log x_1>0.$$

因之

$$\varepsilon(x_1)\varphi_\nu(x_1)^{\frac{\varepsilon(x_1)}{2}}<\varepsilon(x_2)\varphi_\nu(x_2)^{\frac{\varepsilon(x_2)}{2}};$$

但$\varepsilon(x_1)\geqslant\varepsilon(x_2)$，故

$$\varphi_\nu(x_1)\leqslant\varphi_\nu(x_2),$$

此卽表示：$\varphi_\nu(x)$为x之不減函数．$\varphi_\nu(x)$旣为x之不減函数，則当$x\uparrow x_\nu$时$\lim\varphi_\nu(x)$存在．根据(6)式，取x_ν之方程

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu}\frac{1}{W(\xi_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}=\log\log x_\nu-\log\log\xi_\nu$$

之实根，則

$$\lim_{x\uparrow x_\nu}\varphi_\nu(x)=+\infty.$$

設$(x', \varphi_\nu(x'))$为曲綫$y=\varphi_\nu(x)$上之一点，則从(6)式用減法得出：

$$\frac{1}{\varepsilon'}\frac{1}{\varphi_\nu(x')^{\frac{\varepsilon'}{2}}}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\varphi_\nu(x)^{\frac{\varepsilon}{2}}}=\log\log x-\log\log x',$$

就中，$\varepsilon'=\varepsilon(x')$，$\varepsilon=\varepsilon(x)$．由此令$x\to x_\nu$，則得

$$\frac{1}{\varepsilon'}\frac{1}{\varphi_r(x')^{\frac{\varepsilon'}{2}}}=\log\log x_\nu-\log\log x'. \qquad (7)$$

現在来証明：曲綫$y=W_\nu(x)$上必至少有一点$(\xi_\xi, W(\xi_\nu))$致$x_\nu=b_\nu$，此中ξ_ν滿足方程：

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu}\frac{1}{W(\xi_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}=\log\log b_\nu-\log\log\xi_\nu. \qquad (8)$$

此就ν充分大时立論．

在L_ν：$[a_\nu, d_\nu]$上之点ξ_ν致

$$\begin{aligned}\log\log b_\nu-\log\log\xi_\nu&\geqslant\frac{1-\eta'}{2\eta'}\frac{1}{\log W(\xi_\nu)}>\\&>\frac{1-\eta'}{2\eta'}\frac{1}{\varepsilon_\nu W(\xi_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}>\\&>\frac{1}{\varepsilon_r W(\varepsilon_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}},\quad \text{当 } \eta'<\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

取連續函数

$$\Phi(x)=\log\log b_\nu-\log\log x-\frac{1}{\varepsilon(x)W(x)^{\frac{\varepsilon(x)}{2}}},$$

易見 $\Phi(b_\nu)<0$，由上列不等式亦可見当 x 在 L_ν 上时 $\Phi(x)>0$；故 $\Phi(x)=0$ 至少有一实根 ξ_ν 在 $[a_\nu, b_\nu]$ 內.

据此，則可从相应于 $x_\nu=b_\nu$ 之 $(\xi_\nu, W(\xi_\nu))$ 来决定 $\varphi_\nu(x)$，以下的 $\varphi_\nu(x)$ 指此而言. 就此，我們来証明：1° 曲綫 $y=W_\nu(x)$ 上相应于 $x_\nu=b_\nu$ 之点 $(\xi_\nu, W(\xi_\nu))$ 必在曲綫 $y=\varphi_\nu(x)$ 上；2° 反之，$y=W_\nu(x)$ 与 $y=\varphi_\nu(x)$ 之每一交点 $(\xi'_\nu, W_\nu(\xi'_\nu))$ 必相应于 $x_\nu=b_\nu$，卽满足(8)式.

1° 之証. 既然 $(\xi_\nu, W_\nu(\xi_\nu))$ 相应于 $x_\nu=b_\nu$，則

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu}\frac{1}{W(\xi_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}=\log\log b_\nu-\log\log\xi_\nu;$$

$\varphi_\nu(x)$ 又由(7)式令 $x_\nu=b_\nu$ 而定，則

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu}\frac{1}{\varphi(\xi_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}=\log\log b_\nu-\log\log\xi_\nu.$$

故得 $W(\xi_\nu)=\varphi(\xi_\nu)$，而 $(\xi_\nu, W(\xi_\nu))$ 在曲綫 $y=\varphi_\nu(x)$ 上.

2° 之証. 由(7)式令 $x_\nu=b_\nu$，則 $y=\varphi_\nu(x)$ 与 $y=W_\nu(x)$ 之每一交点 $(\xi'_\nu, W_\nu(\xi'_\nu))$ 由于 $\varphi_\nu(\xi')=W_\nu(\xi_\nu)$，应满足(8)式，卽

$$\frac{1}{\varepsilon(\xi'_\nu)}\frac{1}{W(\xi'_\nu)^{\frac{\varepsilon(\xi'_\nu)}{2}}}=\log\log b_\nu-\log\log\xi'_\nu,$$

亦卽 $(\xi'_\nu, W(\xi'_\nu))$ 相应于 $x_\nu=b_\nu$.

总結这一系列的論証，我們可以定出連續曲綫 $y=\varphi_\nu(x)$ $(a_\nu\leqslant x<b_\nu)$ 满足次列条件：

(1°) $\lim\limits_{x\uparrow b_\nu}\varphi_\nu(x)=+\infty$;

(2°) $\dfrac{1}{\varepsilon(x)}\dfrac{1}{\varphi_\nu(x)^{\frac{\varepsilon_\nu(x)}{2}}}=\log\log b_\nu-\log\log x$;

(3°) $y=W_\nu(x)$ 与 $y=\varphi_\nu(x)$ 之交点横量所成集与方程(8)：$\psi(x)\equiv\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{1}{W(x)^{\frac{\varepsilon}{2}}}-$ $-\log\log b_\nu+\log\log x=0$ 之实根之集合全同，在这里，ν 当为充分大.

显然可見，方程(8)之实根必小于 b_ν，由于 $\psi(x)$ 連續于 $[a_\nu, b_\nu]$ 上，則此方程有最大根 λ_ν，而 $(\lambda_\nu, W_\nu(\lambda_\nu))$ 实卽 $y=W_\nu(x)$ 与 $y=\varphi_\nu(x)$ 两曲綫之最后交点.

据此，可以作出定理中所要求之函数型 $U(r)$.

保持前面的正交坐标軸 (Ox, Oy) 以及 $y=W_\nu(x)$ 和 $y=\varphi_\nu(x)$ (相应于 $x_\nu=b_\nu$) 两曲綫之意义. 从原曲綫 $y=W(x)$ 上之点 $(a_{\nu+1}, W(a_{\nu+1}))$ 作一直綫与 Ox 軸平行，此与 $y=\varphi_\nu(x)$ 必然相交于一点 $(\mu_\nu, \varphi(\mu_\nu))$.

因 $\varphi_\nu(\mu_\nu)=W(a_{\nu+1})\geqslant W_\nu(b_\nu)\geqslant W_\nu(\lambda_\nu)=\varphi_\nu(\lambda_\nu)$，故必 $\mu_\nu\geqslant\lambda_\nu$.

命

$$U(r)\equiv\begin{cases}W(r) & \text{当 } a_r\leqslant r\leqslant\lambda_\nu\\ \varphi_\nu(r) & \text{当 } \lambda_\nu\leqslant r\leqslant\mu_\nu \quad (\nu=\nu_0, \nu_0+1, \cdots);\\ \varphi_\nu(\mu_\nu) & \text{当 } \mu_\nu\leqslant r\leqslant a_{\nu+1}\end{cases}$$

$U(r)=W(a_{\nu_0})$，当 $r_0\leqslant r\leqslant a_{\nu_0}$ 时；在这里 a_{ν_0} 充分大.

現在来証明 $U(r)$ 满足定理所要求之条件.

1° 容易看出 $U(r)$ 为 $r\geqslant r_0$ 上之連續函数. $U(r)$ 不減于 $[a_\nu, \lambda_\nu]$ 上增加于 $[\lambda_\nu, \mu_\nu]$ 上，全等于 $\varphi_\nu(\mu_\nu)$ 于 $[\mu_\nu, a_{\nu+1}]$ 上，而 $\varphi_\nu(\mu_\nu)>\varphi_\nu(r)$ $(\lambda_\nu\leqslant r\leqslant\mu_\nu)$. 故 $U(r)$ 为不減函数，但 $\lim\limits_{r\to+\infty} a_\nu=+\infty$, $\lim\limits_{r\to+\infty} W(r)=+\infty$; 故 $\lim\limits_{r\to+\infty} U(r)=+\infty$.

2° $U(r)\equiv W(r)$ 于 $[a_\nu, \lambda_\nu]$ 上，$U(r)\equiv\varphi_\nu(r)>W(r)$ 于 $[\lambda_\nu, \mu_\nu]$ 上，此由 $(\lambda_\nu, \varphi_\nu(\lambda_\nu))$ 为 $y=W_\nu(x)$ 与 $y=\varphi_\nu(x)$ 之最后交点及 $\varphi_\nu(x)\uparrow+\infty$ 知其然；$U(r)\equiv\varphi_\nu(\mu_\nu)=W(a_{\nu+1})\geqslant W(r)$ 于 $[\mu_\nu, a_{\nu+1}]$ 上，此不論 ν 为 $\nu_0, \nu_{0+1}, \cdots$ 無不然. 又 $r_0\leqslant r\leqslant a_{\nu_0}$ 时 $U(r)\equiv W(a_{\nu_0})\geqslant W(r)$. 故得 $U(r)\geqslant W(r)$.

3° $U(a_\nu)=W(a_\nu)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} a_\nu=+\infty$.

以上証明了 $U(r)$ 满足 1°, 2° 及 3° 三个条件.

旣然 $U(r)\geqslant W(r)$，則开始时所述卽已証明 $\lim U(r)^{\eta(r)}=+\infty$; (5°) 得証.

4° 之証. 此最繁复，进行如次:

命 $r'=r^{1+\frac{1}{U(r)^{\varepsilon(r)}}}$，就以下三种情况討論之：(a) $\mu_{\nu-1}\leqslant r<r'<\lambda_\nu$; (b) $\mu_{r-1}\leqslant r<\lambda_\nu<r'$; (c) $\lambda_\nu\leqslant r<\mu_\nu$. 如果就此三者都能証明 $U(r')\leqslant U(r)^{1+\varepsilon(r)}$，則 $U\left(r^{1+\frac{1}{U(r)^{\eta(r)}}}\right)\leqslant U(r)^{1+\eta(r)}$ 立可推得，此由 $0\leqslant\varepsilon(r)<\eta(r)$ 可見，但 r 須充分大. 充分注意 $r'<r^2$ (r 充分大时) 因 $U(r)^\varepsilon\to+\infty$ 之故.

(a) 設 $\mu_{\nu-1}\leqslant r<r'<\lambda_\nu$. 在此情况，如果又有 $a_\nu\leqslant r<r'<\lambda_\nu$，則不等式 $U(r')<U(r)^{1+\varepsilon(r)}$ 与不等式 $W(r')<W(r)^{1+\varepsilon}$ 全同，而后者在 $[a_\nu, b_\nu]$ 上成立，当然亦在 $[a_\nu, \lambda_\nu]$ 上成立. 如果 $\mu_{\nu-1}\leqslant r<a_\nu$，則 $U(r)\equiv W(a_\nu)$; 而由 $r'<a_\nu^{1+\frac{1}{W(a_\nu)^{\varepsilon(a_\nu)}}}$ 又計及 $\mu_{\nu-1}\leqslant r'<\lambda_\nu$，致 $U(r')\equiv W(r')$，則

$$\begin{aligned}U(r')&\leqslant W\left(a_\nu^{1+\frac{1}{W(a_\nu)^{\varepsilon(a_\nu)}}}\right)\\&\leqslant W(a_\nu)^{1+\varepsilon(a_\nu)}\leqslant U(r)^{1+\varepsilon(r)}.\end{aligned}$$

总之在此情况，必得 $U(r')\leqslant U(r)^{1+\varepsilon(r)}$.

(b) 設 $\mu_{\nu-1}\leqslant r<\lambda_\nu<r'$. 在此情况，試取曲綫 $y=\varphi_r(x)$ 来考察其分割帶狀域 $(\lambda_\nu\leqslant x\leqslant b_\nu)$ 之兩部分，其一在曲綫之上方，其二在曲綫之下方. 命

$$A(x, y)=\frac{1}{\varepsilon_\nu}\frac{1}{(W\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{y^{\frac{\varepsilon}{2}}}-(\log\log x-\log\log\lambda_\nu); \tag{9}$$

$\varepsilon_\nu=\varepsilon(\lambda_\nu)$, $\varepsilon=\varepsilon(x)$. 由 $\varphi_\nu(x)$ 及 λ_ν 之定义，則

$$A(x, \varphi_\nu(x))\equiv0.$$

在曲綫 $y=\varphi_\nu(x)$ 之上方 $y(x)>\varphi_\nu(x)$，則 $A(x, y(x))>0$; 在其下方，$y(x)<\varphi_\nu(x)$，則 $A(x, y(x))<0$. 在帶狀域 $(\lambda_\nu\leqslant x\leqslant b_\nu)$ 中曲綫 $y=U(x)$ 或与 $y=\varphi_\nu(x)$ 全同，或在其下方，故

$$\lambda_\nu\leqslant x<b_\nu \quad 致 \quad A(x, U(x))\leqslant0.$$

据此易見

$$b_\nu \leqslant x \leqslant a_{\nu+1} \text{ 亦致 } A(x, U(x)) \leqslant 0,$$

因为此时

$$U(x) = W(a_{\nu+1}) = C(\mu_\nu) \text{ 而 } x > \mu_\nu, \ A(\mu_\nu, U(\mu_\nu)) \leqslant 0.$$

注意 $r' < r^2$，并計及选取常間隔串时，曾有条件 $a_{\nu+1} > b_\nu^e$，则当 $a_{\nu-1} \leqslant r \leqslant b_\nu$ 时，必致 $r' \leqslant b_\nu^2 < a_{\nu+1}$。因此，在假設(b)下，必有 $\lambda_\nu < r' < a_{\nu+1}$。据此則在(b)之限制下，

$$A(r', U(r')) \leqslant 0. \tag{10}$$

此时我們可將 r_0 充分大的意义强化使 $r \geqslant r_0$ 致

$$\varepsilon(r) < \frac{1}{4}, \quad \log W(r) > 4.$$

在 $\mu_{\nu-1} \leqslant r \leqslant \lambda_\nu$ 上，由于假設 $r > \lambda_\nu$，則

$$U(r) \geqslant W(r')^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \geqslant W(\lambda_\nu)^{\frac{1}{1+\varepsilon}};$$

当 $a_\nu \leqslant r \leqslant \lambda_\nu$ 时，$U(r) = W(r)$，此不等式卽由 $[a_\nu, b_\nu]$ 为常区間之性質而得；其在 $\mu_{\nu-1} \leqslant r < a_\nu$ 时，$U(r) = W(a_\nu) \geqslant W(\lambda_\nu)^{\frac{1}{1+\varepsilon(a_\nu)}} \geqslant W(\lambda_\nu)^{\frac{1}{1+\varepsilon_\nu}}$。

故得

$$U(r)^\varepsilon \geqslant W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \geqslant W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}} \geqslant W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}},$$

又得

$$\log\log r' - \log\log \lambda_\nu < \log\log r' - \log\log r < \frac{1}{U(r)^\varepsilon} \leqslant \frac{1}{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}. \tag{11}$$

將此不等式代入等式(9)則得：

$$A(r', U(r')) > \frac{1}{\varepsilon_\nu} \frac{1}{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}} - \frac{1}{\varepsilon'} \frac{1}{U(r')^{\frac{\varepsilon'}{2}}} - \frac{1}{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}.$$

由此，据(10)則得

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu} \frac{1}{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}} - \frac{1}{\varepsilon'} \frac{1}{U(r')^{\frac{\varepsilon'}{2}}} - \frac{1}{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}} < 0;$$

从而得出

$$U(r')^{\frac{\varepsilon'}{2}} < \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon'} \frac{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}{1-\varepsilon_\nu}. \tag{12}$$

此式須要作进一步的处理。为此，可就 $\varepsilon(x)\log x$ 为不减的性質入手。据此及 $r' > \lambda_\nu$，則由(11)可有次式：

$$\varepsilon' \geqslant \varepsilon_\nu \frac{\log \lambda_\nu}{\log r'} > \varepsilon_\nu e^{-\frac{1}{W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{2}}}} > \varepsilon_\nu e^{-\frac{\varepsilon_\nu}{\log W(\lambda_\nu)}},$$

在这里，还应用了条件(c)：$\varepsilon(r) W(r)^{\frac{\varepsilon(r)}{2}} > \log W(r)$。

由此將 ε' 与 ε_ν 之不等式关系代入(12)之轉式

$$U(r') < \left(\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon'} \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\right)^{\frac{2}{\varepsilon'}} W(\lambda_\nu)^{\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon'}}$$

中，容易得出

$$U(r') < e^4 W(\lambda_\nu).$$