高等学校教学参考书

机械原理丛书

机构最优化设计

贺贤贵 徐振华 合编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

机械原理丛书

机构最优化设计

贺贤贵　徐振华　合编

高等教育出版社

内容简介

本书对机构最优化设计的一些方法作了较详细的介绍。第一章是一些必要的机构最优化设计知识。第二章是最优化设计的一些方法，着重介绍机构最优化设计中常用的一维搜索的 0.618 法和二次插值法、无约束极小化的鲍威尔法和约束极小化的惩罚函数法。第三章是建立平面连杆机构最优化设计问题的数学模型。书末附有习题。附录中有内点惩罚函数法的计算机程序与使用说明。

本书是机械原理丛书之一，可用作高等工业学校机械类有关专业机械原理课程的补充教材及高年级学生或研究生的选修课教材，也可供有关的工程技术人员参考。

高等学校教学参考书
机械原理丛书
机构最优化设计
贺贤贵　徐振华　合编
*
高等教育出版社出版
新书书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装
*
开本850×1168 1/32　印张 3.5　字数 83,000
1984年1月第1版　1984年9月第1次印刷
印数 00,001—10,250
书号 15010·0557　定价 0.67 元

前　言

随着电子计算机的普及，机构最优化设计在许多工程技术中日益得到广泛应用。机构最优化设计是机械工程设计中应用最优化计算方法最早的一个分支，它的优化问题可分成两类，即按机构运动学为目标的优化问题和按机构动力学要求来建立目标函数的优化问题，它所采用的计算方法主要是数学规划中的约束非线性规划。

在许多工程最优化的设计问题中，大量地也是非线性规划问题，因此，书中所介绍的求解约束非线性规划问题的方法，不仅可用于机构最优化设计问题，而且也可用于一般工程最优化的设计。

本书是在1981年编写的机构最优化设计讲义，经过79和80两届学生作为选修课教材使用的基础上改编而成。本书是为了给机械类有关专业学生适当加深加宽设计知识，作为机械原理课程的补充教材，也可作为学习机构最优化设计方法入门用的选修课教材。在编写中从教学要求出发，着重阐明如何运用最优化方法来设计机构，如何建立机构最优化设计的数学模型，以及介绍最优化计算方法中的某些行之有效的算法，这些算法已经过我们自己的实际检验，并附有详细的框图和可供使用的计算机程序。对于最优化方法中的理论性问题仅着重说清其概念，有些繁难的公式推导过程，尽可能简化或指出它的出处，便于有兴趣的读者查阅。

本书第一、二章由贺贤贵同志编写，第三章由徐振华同志提供初稿，附录的计算机程序由徐振华同志编写，全书由贺贤贵同志整

理完成。本书承丁爵曾教授，陈立周副教授仔细审阅，对此我们表示衷心感谢。

编写这本书，虽然是基于一些实践基础，但限于我们的水平，不妥和错误之处在所难免，请广大读者批评指正。

编　　者

1983年12月

目 录

第一章 机构最优化设计概述

机构最优化设计是近十多年来出现的一种设计方法，它采用最优化的数学方法，借助于电子计算机，使设计的机构最优地满足预定的运动学和动力学方面的要求，给出最优的设计方案。

机构最优化设计的一般步骤是：

1．根据机构的设计任务，通过分析建立供优化设计用的数学模型。

2．选用最优化方法，编制计算机的计算程序，上机计算获得最优解。

第一步是把机构设计问题，按照机构最优化设计方法，表达为可供优化用的数学模型，这是解决机构最优化问题的基础，我们将在第三章中通过举例来说明数学模型的建立。第二步是根据数学模型，通过最优化技术解出最优解，我们将在第二章中介绍机构设计(也是工程设计)中应用最广的、行之有效的一些最优化方法，并在附录中给出其程序。

为了便于最优化设计问题的讨论，本章先举一个实例，帮助读者熟悉最优化设计中的一些基本概念及有关术语，并把机构设计问题与最优化方法联系起来。

书中对空间中的点用大写英文字母 A、B、…表示。因点的位置可以用向量来表示，所以字母 A 又可表示为该点在直角坐标系上的向量。字母右上角标号代表该点的位置序号，如 $A^{(j)}$ 表示第 j 个位置的 A 点。小写英文字母表示向量的分量，其右下角标号表示分量的序号，如 $a_i^{(j)}$ 表示第 j 个位置 A 点的第 i 个坐标轴上的分量。

图 1-1 为 JB 型缝纫机挑线机构。在缝纫过程中需要按一定规律供线，供线量是否适当直接影响缝纫的质量，而供线量又与穿线孔 M 点的运动轨迹有关。因此，挑线机构设计的主要任务是实现 M 点的运动轨迹，使其产生的供线量为期望的供线量，同时要考虑机构运转灵活轻便，以及合理的结构尺寸等等。

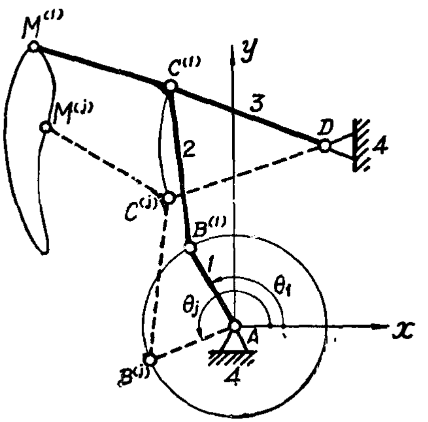


图 1-1

要使 M 点按某一给定的要求运动，可以有几种不同类型的机构来完成，选用那种类型的机构是属于机构型综合的问题。机构最优化设计是在机构类型已选定的条件下，来确定机构的结构参数，使它能最优地达到预定的目标。

JB 型缝纫机的挑线机构是一个铰链四杆机构，如图 1-1 所示。轴 A 固联于缝纫机主轴，当主轴转动时，铰链四杆机构 $ABCD$ 使连杆 2 上的穿线孔 M 点沿着所需的轨迹运动，设直角坐标系的原点为 A 点，给定构件 1 转角 $\bar{\theta}_{1j}=\bar{\theta}_j-\bar{\theta}_1$ 时，M 点位于 $\bar{M}^{(j)}$，$j=1、2、\cdots$，字母上面一划表示是给定的。由图可知，要确定机构在第 1 个位置 $AB^{(1)}M^{(1)}C^{(1)}D$，共需确定 A、$B^{(1)}$、$C^{(1)}$、D 和 $M^{(1)}$ 五个点的坐标 a_x、a_y、$b_x^{(1)}$、$b_y^{(1)}$、$c_x^{(1)}$、$c_y^{(1)}$、$d_x^{(1)}$、$d_y^{(1)}$、$m_x^{(1)}$、$m_y^{(1)}$ 十个参数。最优化设计的任务就是如何来确定这十个参数，使 M 点运动时所产生的供线量误差为最小。

一个最优化设计问题，常常可用某种数学形式来表达，最优化问题的数学描述称为最优设计的数学模型，一个数学模型应包括设计变量，约束条件和目标函数等三个方面。下面就来介绍这三

方面的问题。

§ 1-1 设 计 变 量

工程设计的一个方案，一般可用一组参数来表示。在机构设计中，这些参数可以是各构件的长度，构件上某点的坐标，构件的角位移，构件的质量等等。在这些参数中，有的是设计前已确定好的，即在设计过程中是固定不变的量，称为设计常量。有的则是在设计过程中待选择的量，可认为是变化的量，称为设计变量。

在最优化问题中，设计变量的数目，称为维数。只含有一个设计变量的最优化问题，称为一维最优化问题，包含有 n 个设计变量的，称为 n 维最优化问题。通常按照设计变量的多少，将最优化设计题目分成三类，设计变量在 2～10 个为小型题目，10～50 个为中型题目，50 个以上的为大型题目。机构最优化设计中，大多数是中小型的题目。

我们用数学上独立自变量的符号来表示设计变量，一组 n 个设计变量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n，可写成矩阵形式的具有 n 个分量的向量，即

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \tag{1-1}$$

一个向量对应着空间的一个点，具有 n 个分量的一个向量对应着 n 维空间内的一个点，这个点可代表具有 n 个设计变量的一个设计方案，称它为设计点，用符号 $\boldsymbol{X}$ 表示。一个工程设计问题，常有许多设计方案，其中有一个是最优的设计方案，对应最优设计方案的点称为最优设计点，简称最优点，用符号 $\boldsymbol{X}^*$表示。

对于图 1-1 所示的挑线机构，其参数共有十个，倘若其中 a_x、

a_y、$m_x^{(1)}$和 $m_y^{(1)}$四个参数在设计前已确定，那么还有六个参数可以在设计过程中去选择，所以该机构的优化设计是一个六维最优化问题，六个设计变量是

$$x_1=b_x^{(1)}, x_2=b_y^{(1)}, x_3=c_x^{(1)},$$
$$x_4=c_y^{(1)}, x_5=d_x^{(1)}, x_6=d_y^{(1)}.$$

用向量表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}=[x_1, x_2, \cdots, x_6]^T$$

其最优点记为

$$\boldsymbol{X}^*=[x_1^*, x_2^*, \cdots, x_6^*]^T$$

§ 1-2 约束条件与可行区域

最优化问题可分为两大类，即无约束最优化问题和有约束最优化问题。若在优化过程中，对 n 个设计变量可在整个 n 维欧氏空间 R^n 内任意取值，则称这类问题为无约束最优化问题。如果在优化过程中，对 n 个设计变量的取值加某些限制，只能在一定的区域 $\mathscr{D}\subset R^n$ 内取值，则称这类问题为有约束最优化问题。

对设计变量的取值加以某些限制的条件，称为约束条件，或称设计约束。例如在机构最优化设计中，欲使输入构件 *1* 是曲柄，则必须满足由曲柄条件得出的下列不等式约束

$$l_3+l_4>l_1+l_2$$
$$l_2+l_4>l_1+l_3$$
$$l_2+l_3>l_1+l_4$$

约束条件可分为不等式约束和等式约束两种，用数学函数表达为

$$g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0, \quad i=1、2、\cdots、m$$

和 $$h_j(\boldsymbol{X})=0, \quad j=1、2、\cdots、p<n$$

当不等式约束条件要求为 $g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 时，可以用 $-g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 来代替。而等式约束条件 $h_j(\boldsymbol{X})=0$，也可用 $h_j(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 和 $-h_j(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 两个不等式约束条件来代替。

每一个不等式约束的极限条件 $g_i(\boldsymbol{X})=0$，在 n 维空间内形成一个 n 维"曲面"，称为约束曲面。这个曲面把空间分成两部分，一部分是 $g_i(\boldsymbol{X})>0$，另部分是 $g_i(\boldsymbol{X})<0$。各约束曲面在 n 维空间内构成一个区域 $\mathscr{D}$，在 $\mathscr{D}$ 内任意点都满足 $g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 的条件，故称 $\mathscr{D}$ 为可行区域，或称允许设计区域。在可行区域以外的区域称为不可行区域，或称不允许设计区域。图 1-2 所示的为二维情况，每一个不等式约束在二维空间里表达为一条直线或曲线，这些线所构成的区域，就是可行区域 $\mathscr{D}$。

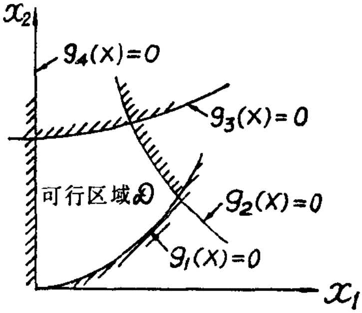


图 1-2

§ 1-3 目标函数

一个工程设计问题，常常有许多可行的设计方案，最优化设计的任务就是要找出其中最优的一个方案，所谓最优就是在设计中能最好地满足所要追求的某些特定目标。在机构设计中所要追求的目标，往往是某点的运动轨迹或某构件的角位移要符合一定的要求，或要求最大振动力为最小等等。通常这些目标可以表达为设计变量的数学函数，称此函数为目标函数，或称评价函数，记为

$$F(\boldsymbol{X})=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

目标函数的值是评价设计方案优劣程度的标准，最优化设计是要寻找一个最优点 $\boldsymbol{X}^*$，使目标函数值为最优，通常假定最优值为最

小值，即

$$F(\boldsymbol{X}^*)=\min F(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X}\in\mathscr{D}\subset R^n$$

称 $F(\boldsymbol{X}^*)$值为最优值。

对于有些问题，最优值也可能是最大值，即

$$F(\boldsymbol{X}^*)=\max F(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X}\in\mathscr{D}\subset R^n$$

由于 $F(\boldsymbol{X})$的极大化问题对应于 $-F(\boldsymbol{X})$ 的极小化问题，所以求极大问题可以通过改变目标函数的符号转化成求极小问题。这样，在后面的叙述中，我们把最优化问题都处理为求极小值的问题。

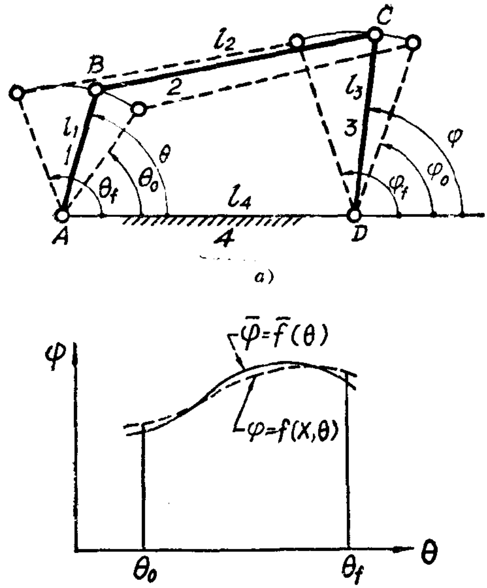
如果在建立目标函数时，只有一个目标，则称此目标函数为单目标函数，否则称多目标函数。目标函数的建立有很多方法，在机构最优化设计中，对于单目标函数常采用加权的误差平方和作为目标函数，如

$$F(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{s}\omega_i(f_i-\bar{f}_i)^2 \tag{1-2}$$

式中 ω_i 是预先选定好的正的权因子，加权的目的是为了在计算误差时，表明该部分误差对机构影响的重要程度。f_i 和 $\bar{f}_i$ 是机构在第 i 位置时的实际函数值和给定函数值。

例如图 1-3 所示的四杆机构，设各构件的长度为 l_1、l_2、l_3 和 l_4，构件 1、3 的起始角和终止角分别为 θ_0、φ_0 和 θ_f、φ_f。当构件 1 在 $\theta_0\sim\theta_f$ 范围内转动时，要求输出角 $\varphi=f(\boldsymbol{X},\theta)$能最佳逼近给定的函数 $\bar{\varphi}=\bar{f}(\theta)$，且各构件长度之间要满足一定的几何关系。

我们知道，当铰链四杆机构各构件的长度按同一比例尺缩放时，输入角和输出角的关系是不会改变的。因此在设计时可把机架的长度作为单位长度，即令 $l_4=1$，其它三个构件的长度 l_1、l_2 和 l_3 表示为实际杆长 l_4 的倍数，而输出角 φ 为设计变量 l_1、l_2、l_3 及输入角 θ 的函数，即 $\varphi=f(l_1,l_2,l_3,\theta)=f(\boldsymbol{X},\theta)$。机构的目标函数可根据输出角 $\varphi=f(\boldsymbol{X},\theta)$ 与给定的输出角 $\bar{\varphi}=\bar{f}(\theta)$ 之间的



a)
b)

图 1-3

误差为最小的原则来建立，由式(1-2)知目标函数为

$$F(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{s}\omega_i(\varphi_i-\overline{\varphi}_i)^2$$

式中 φ_i 和 $\overline{\varphi}_i$ 为 $\theta=\theta_i$ 时的实际输出角和给定输出角。ω_i 是根据输出曲线中某部分误差的重要程度来选定的，若某部分位置误差对机构设计影响大，则在这些位置上的权因子值取大些，反之取小些；如果机构在某些位置对输出值没有要求，则在这些位置的权因子值可取为零；如果机构输出角误差在各个位置上具有同等重要的程度，则可取 $\omega_i=1$，此时目标函数为

$$F(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{s}(\varphi_i-\overline{\varphi}_i)^2$$

对于多目标函数，在机构最优化设计中常采用以下两种方法，一种是线性加权和法，即把每一个目标函数乘上权因子，然后相加合成一个总的目标函数，其数学表达式为

$$F(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^{m}W_jF_j(\boldsymbol{X}) \tag{1-3}$$

式中 W_j 为权因子，其值决定于各项目标的数量级及其重要程度。若已知各目标函数值的变动范围为

$$\alpha_j\leqslant F_j(\boldsymbol{X})\leqslant\beta_j,\quad j=1、2、\cdots、m \tag{1-4}$$

则为了消除各项目标函数在数量级上的差异，可取权因子为

$$W_j=\frac{1}{\Delta f_j^2},\qquad j=1、2、\cdots、m \tag{1-5}$$

而

$$\Delta f_j=\frac{\beta_j-\alpha_j}{2},\quad j=1、2、\cdots、m \tag{1-6}$$

$F_j(\boldsymbol{X})$为多目标函数中第 j 个目标函数，可按式(1-2)计算。

另一种方法是把多目标函数中最重要的一个目标作为目标函数，将其余的目标限制在一定的数值范围内，处理成为约束函数，从而把多目标函数转化为单目标函数。

例如，对于图 1-3 实现主、从动构件给定函数关系的四杆机构设计，若除了要求实现给定的输出角 φ 外，还要求有最佳的传动角 γ，则该问题是具有两个目标的最优化问题，用线性加权和法表达该问题的目标函数为

$$F(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^{2}W_jF_j(\boldsymbol{X})=W_1F_1(\boldsymbol{X})+W_2F_2(\boldsymbol{X})$$

其中

$$F_1(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{s}\omega_{1i}(\varphi_i-\bar{\varphi}_i)^2$$

$$F_2(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{s}\omega_{2i}(\gamma_i-\bar{\gamma}_i)^2$$

上述问题也可以把其中一个目标如 $F_1(\boldsymbol{X})$作为主要的目标，

而将另一个目标改成限制传动角值，即

$$\overline{\gamma}_{min} \leqslant \gamma_i \leqslant \overline{\gamma}_{max},\quad i=1、2、\cdots、s$$

于是目标函数为

$$F(\boldsymbol{X})=F_1(\boldsymbol{X})$$

约束条件为

$$\gamma_i-\overline{\gamma}_{min} \geqslant 0$$

$$\overline{\gamma}_{max}-\gamma_i \geqslant 0,\quad i=1,2、\cdots、s$$

或为

$$\gamma_{min}-\overline{\gamma}_{min} \geqslant 0$$

$$\overline{\gamma}_{max}-\gamma_{max} \geqslant 0$$

而

$$\gamma_{min}=\arccos\left[\frac{l_2^2+l_3^2-(l_4-l_1)^2}{2\,l_2 l_3}\right] \qquad (1\text{-}7)$$

$$\gamma_{max}=\arccos\left[\frac{l_2^2+l_3^2-(l_4+l_1)^2}{2\,l_2 l_3}\right] \qquad (1\text{-}8)$$

§ 1-4 最优化问题的数学模型

设最优化设计问题中有 n 个设计变量为

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$$

要求在可行区域内寻找最优点 $\boldsymbol{X}^*$，使目标函数 $F(\boldsymbol{X})$ 达到最小值，即

$$F(\boldsymbol{X}^*)=\min F(\boldsymbol{X}),\quad \boldsymbol{X}\in\mathscr{D}\subset R^n$$

其中可行区域 $\mathscr{D}$ 是由不等式约束条件

$$g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0,\quad i=1、2、\cdots、m$$

所确定。

上述最优化问题的数学模型可表达为下述标准形式：

求目标函数 $F(\boldsymbol{X})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$， $\boldsymbol{X}\in R^n$ 最小值，且满足不等式约束

$$g_i(\boldsymbol{X})=g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,\quad i=1、2、\cdots、m$$

或简写成

$$(P)\quad \begin{cases}\min F(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{X}\in R^n\\ \text{s.t.}\quad g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0①,\ i=1、2、\cdots、m\end{cases}$$

问题(P)按照$F(\boldsymbol{X})$与$g_i(\boldsymbol{X})$函数性质的不同可分为若干类。当$F(\boldsymbol{X})$和$g_i(\boldsymbol{X})$都是变量$\boldsymbol{X}$的线性函数时，称为线性规划问题。当$F(\boldsymbol{X})$或$g_i(\boldsymbol{X})$中有非线性函数时，称为非线性规划问题。当约束条件数$m=0$时，称为无约束规划问题，否则称为约束规划问题。在机构最优化问题中，极大多数是约束非线性规划问题。

§ 1-5 约束非线性优化设计问题的几何描述

为了比较直观地理解约束非线性规划问题，本节对它再作些必要的几何描述。设有n个设计变量和目标函数构成一个$n+1$维的坐标系，第1个到第n个坐标轴分别代表设计变量x_1到x_n，第$n+1$个坐标轴代表目标函数$F(\boldsymbol{X})$。每一个不等式约束方程在n维空间内构成可行区域$\mathscr{D}$的一条边界，在可行区域$\mathscr{D}$内每一个点，代表着一个设计方案，它相应有一定的目标函数值。所有相对应的目标函数值$\{F(\boldsymbol{X})\}$在$n+1$维坐标系内构成一个$n+1$维的“曲面”。约束非线性规划问题，就是要寻找此“曲面”上函数值为最小的点，以及与该点相对应的n个设计变量，即在可行区域内找出最优值$F(\boldsymbol{X}^*)$和最优点$\boldsymbol{X}^*$。

由于对n维约束非线性规划问题，仅当$n\leqslant 2$时才能用几何图形来描述，所以下面例举$n=2$的情况，通过几何图形来说明约束非线性规划问题的某些基本概念。对于$n>2$的情况，只能类同$n=2$的情况想像得出。

例 1-1 求二维约束非线性规划问题。

---

① 式中s.t.系Subject to的缩写，意即“受约束于”。