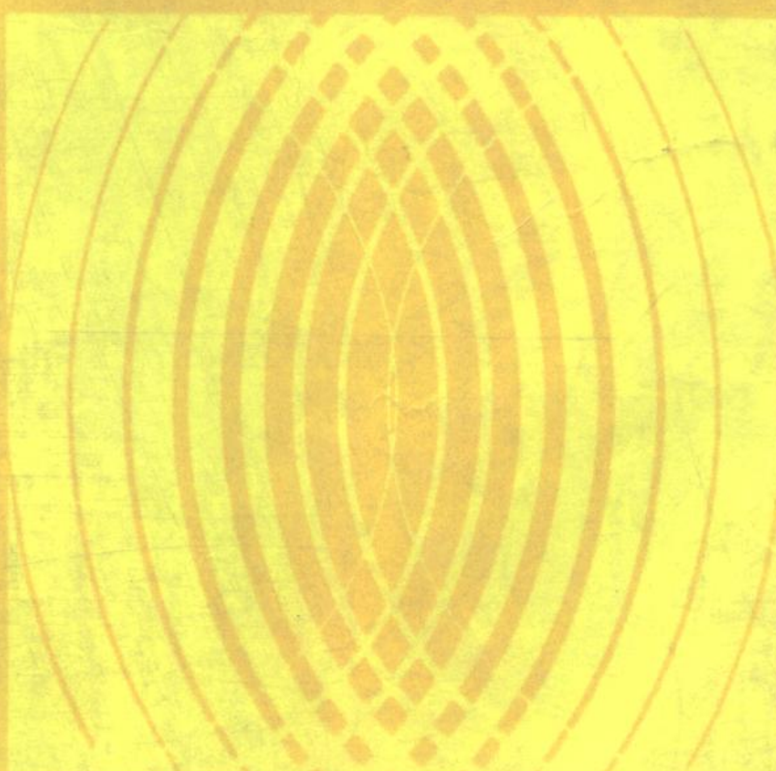
数字信号处理基础

及实验

王树勋　编著



机械工业出版社

数字信号处理基础及实验

王树勋　编著

机 械 工 业 出 版 社

(京)新登字 054 号

本书内容共分八章，前四章讲述基础知识离散时间系统、z 变换、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换及其软、硬件实现，后四章讲述数字滤波器的理论、设计、实现以及数字谱分析的方法、实现和应用。

全书侧重基础知识，注意物理概念，强调实践和应用，书中设计十个实验与理论教学融汇在一起，使学生在实践中掌握数字信号处理的基本理论，基本方法和基本应用。

本书既可作为大专院校教材，又可作为工程技术人员的参考资料，具有很强的实用价值。

数字信号处理基础及实验

王树勋　编著

*

责任编辑：王　斌　李卫东

封面设计：方　芬

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南里一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

北京理工大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16・印张 18.25・字数 445 千字

1992 年 9 月北京第 1 版・1992 年 9 月北京第 1 次印刷

印数　00,001—02,450　　・定价：9.10 元

*

ISBN 7-111-03422-8/TP・167(X)

前　言

信号处理的目的可以是估计信号的特征参数，也可以是使信号变换成更符合要求的形式，例如滤波、参数的提取、频谱分析等。一般，信号分两大类：一类是模拟信号，另一类是数字信号。以模拟的方式处理模拟信号被称之为模拟信号处理；以数字的方式处理数字信号被称之为数字信号处理。60年代以来，由于大规模集成电路的发展，数字信号处理技术发展很快，在许多方面明显地较模拟系统优越，人们逐步地开始研究如何用数字信号处理技术处理模拟信号，这样就产生了一个新的学科——信号的数字处理技术，当然这里的“信号”既包括模拟信号，又包括数字信号。

本书是经过几年的教学使用和修改而成的。全书共八章，前四章讲述基础知识，后四章讲述处理模拟信号的数字滤波器的理论、设计和实现；数字谱分析的方法、实现和应用。其特点是：侧重基础知识，注意物理概念，强调实践和应用，注意培养学生从事数字信号处理的技能。具体作法是：精选教学内容，配备适量习题，设计出突出基础知识与应用联系紧密的实验，采用学、练、实验、总结为一体的教学方法。特别值得一提的是：本书设计了10个实验，它们与教学内容有机地融汇在一起，突出了理论的物理概念，使学生在实践中掌握数字信号处理的基本方法、基本技术和基本应用，达到学以致用的目的，在教学实践中收到了良好的效果。

本书既是启蒙性教材，可以使大专院校的学生顺利地进入数字信号处理的技术领域，又是实用性很强的参考资料。书中许多实例和实验可以直接引导广大工程技术人员、科研人员在实践中应用数字滤波器和数字谱分析技术。

本书在编写过程中得到吉林工业大学博士导师戴逸松教授的热心指导和帮助。朴贵星、关小敏、张亚军、董广醉、蔡忠伟等同志为实验的设计与实现付出了创造性的劳动，在此一并表示感谢。

由于学识水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者
于吉林工业大学电子系
1988年8月

目录

绪　论

提取信号和处理信号是工科各专业的主要任务之一。信号处理的目的可能是估计信号的特征参数，也可能是使信号变换成更符合要求的形式，例如，滤波、参数的提取、频谱分析等。过去，主要是利用模拟系统对信号进行处理。60年代以来，由于大规模集成电路和计算机的迅速发展，在信号处理中日益广泛地采用数字信号和数字系统，逐步形成一门新兴学科——数字信号处理。

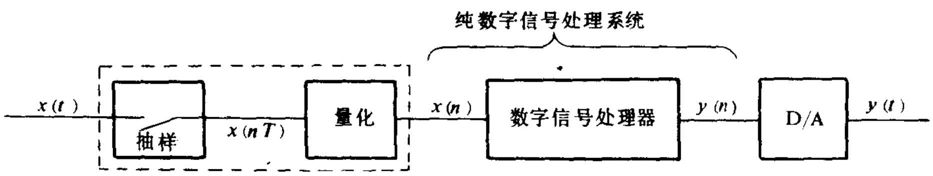


图 0—1　数字信号处理系统

所谓"数字信号处理"，主要是研究数字系统(离散系统)。这个系统输入的是数字信号 $x(n)$，系统中以数字的方式加以处理(图 0—1 纯数字信号处理系统)，输出的仍然是数字信号 $y(n)$。具体说，就是利用计算机或者专用处理设备对信号进行分析、变换、综合、估计与识别等加工处理，如图 0—1 所示。

然而，由于客观世界存在着大量的模拟信号，在工程中大量地用"数字系统"处理模拟信号，典型的处理模拟信号的系统如图 0—1 所示，显然它是一个模拟、数字的混合系统。一般称其为数字信号处理系统。图中模拟信号 $x(t)$经抽样后成为仅在一系列等间隔时间点 $0, 1T, 2T, 3T, \cdots, nT$ 上有定义的"等间隔离散信号"$x(nT)$，$x(nT)$在幅度上经过量化处理后成为数字信号。一般地，数字信号存储在数字信号处理器的存储器中，成为按顺序排列的"数组"，即序列 $x(n)$。序列 $x(n)$可由时间抽样信号产生，也可以由其它非时间信号产生，这使得数字信号处理技术适用于更广泛的领域。

与模拟系统相比，图 0—1 所示系统有许多优点，它精度高、灵活、抗干扰、可靠性好、设备尺寸小。它便于大规模集成化，易于实现多维处理。目前广泛应用于语音、雷达、声纳、地震、图象、通信系统、控制系统、生物工程、医学、水利工程、产品检验、故障检测及自动检测仪器等方面。

数字信号处理技术是一门理论性与技术性较强的学科，涉及的知识面非常广泛，它包括信号分析、离散系统分析、综合与技术实现。既讨论理论问题，又讨论理论的应用。处理对象既有确定性信号，又有随机信号。处理方法涉及到时域、频域和 Z 域。既需要计算机的软、硬件知识，又需要专用数字硬、软件知识。

数字信号处理总的基础理论体系如图 0－2 所示。主要研究数据采集、离散线性非时变系统。数字滤波器和频谱分析是它的两个主要分支。

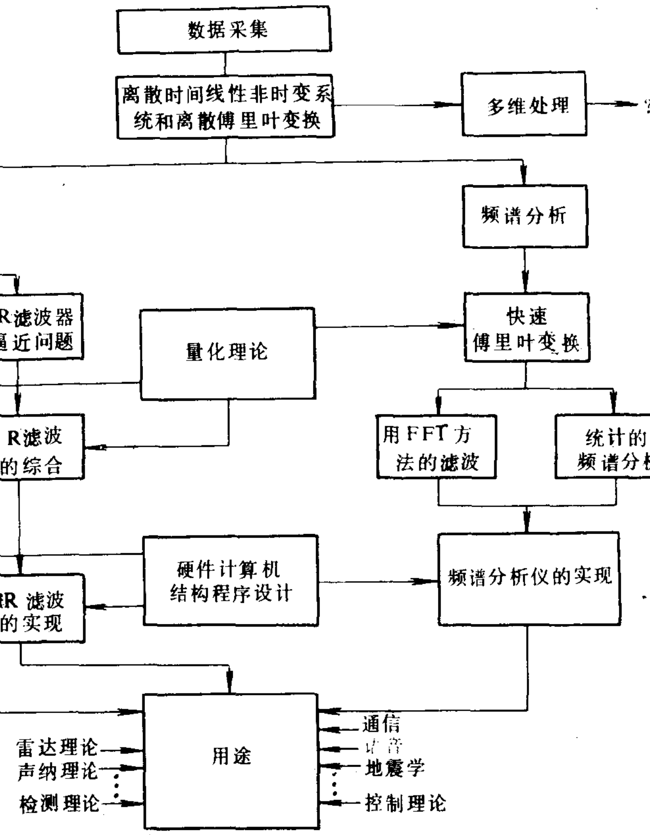


图 0－2　数字信号处理概貌

数字滤波器，即在形形色色的信号中提取所需信号，抑制不需要的干扰。它可以分时域滤波和频域滤波。数字滤波器主要有两种类型：无限冲激响应(IIR)型和有限冲激响应(FIR)型。

频谱分析，也就是对各种信号进行频谱分析，特别是对随机信号进行谱分析。例如通过对振动信号进行频谱分析，确定主要频率成分，了解振动体，如机车、车辆、桥梁等性能，为其设计及故障诊断提供资料和依据。

学好本课程关键在于实践，为此本书设计的 10 个实验，是本书不可缺少的部分。通过实验可进一步搞清数学概念和物理概念的内在联系，避勉物理概念被数学推导淹没。通过实验才能知道如何将信号的数字处理知识应用于实践，通过实验才能最终解决工科学生学习数字信号处理的最大疑难问题——如何用数字系统处理模拟信号。

本书主要讲述数字信号处理的基础知识及理解应用这些基础知识的实验，因此书名为《数字信号处理基础及实验》。

第一章　离散时间系统分析

本章主要讨论离散时间信号和离散时间系统的基本概念，重点研究线性非时变离散系统。首先介绍离散时间系统的信号——序列，然后分析线性时不变系统特点及描述该系统的方程——常系数差分方程。最后研究差分方程解法和离散卷积。

第一节　离散时间信号——序列

信号，从时间角度可以分为连续时间信号和离散时间信号两大类。如图 1－1a 所示，只在一系列互相分离的时间点上有定义，而在其它时间点上无定义的信号称之为离散时间信号，而时间分布为等间隔的离散时间信号是等间隔离散时间信号，如图 1－1b 所示。设时间间隔为 T，可记为 $x(nT)(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$，由绪论可知，$x(nT)$可由模拟信号抽样获得，在实际处理时，常把 $x(nT)$存在处理器的存储器中，随时取用。离散时间信号处理常常是非时实的，即先记录数据后分析或短时间内存入，数据在较长时间才能完成分析处理。所以，所谓 $x(nT)$仅仅是存储器中按一定顺序排列的一组数。因此，往往不用 nT 作为变量，直接用 $x(n)$表示。$x(n)$即为离散时间系统的信号——序列。

$x(n)$可由连续信号抽样产生，但 $x(n)$具有更加广泛的意义，它不但可以表示时间信号，也可以表示非时间信号，例如某一时刻，全国各城市的气温就不是一个按时间顺序排列的序列。

对于 $x(n)$来说，n 应为整数。若 n 为非整数，$x(n)$则毫无意义。$x(n)$常用图形表示，如图 1－1b 所示。图中线段长短表示数值大小。

请注意，由时间抽样信号引入序列 $x(n)$往往给人以错觉，认为 $x(n)$只能是实数量，其实 $x(n)$也可以是复数量。另外，本书假设抽样信号的幅度量化为无限精度，这样等间隔离散信号与数字信号意义相同，把它们统称为离散时间信号或者序列。

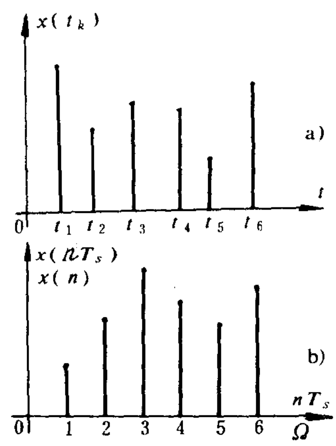


图 1－1　离散时间信号

a)离散时间信号

b)等间隔离散时间信号

一、序列的基本运算

(一)序列相加

序列$\{x(n)\}$与序列$\{y(n)\}$之和是指两个序列同序号的数值逐项相加而构成的一个新序列 $z(n)$。

例 1－1　已知：

$$\{x(n)\} = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ 2^{-n} + 5 & n \geqslant -1 \end{cases} \qquad \{y(n)\} = \begin{cases} 3(2^n) & n < 0 \\ n + 2 & n \geqslant 0 \end{cases}$$

求$\{x(n)\}$与$\{y(n)\}$之和。

$$\{z(n)\} = \{x(n)\} + y(n)\} = \begin{cases} 3(2^n), & n < -1 \\ 17/2, & n = -1 \\ 2^{-n} + n + 7, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

序号$\{x(n)\}$表示序列，而符号$x(n)$表示序列中的第n个数值，今后为书写方便，用$x(n)$表示序列，不用加注括号。

(二)序列相乘

序列$x(n)$与序列$y(n)$相乘表示同序号的数值逐项对应相乘而构成的一个新序列$z(n)$。

例 1－2 对于例 1 中序列$x(n)$、$y(n)$求$z(n)=x(n)y(n)$，可得

$$z(n) = x(n)y(n) = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ 21/2 & n = -1 \\ n \cdot 2^{-n} + 2^{-n+1} + 5n + 10 & n \geqslant 0 \end{cases}$$

(三)序列延迟

序列延迟$x(n-m)$、$x(n+m)$是源序列$x(n)$逐项依次移位m位而得的一个新序列。$x(n+m)$为$x(n)$左移m位；$x(n-m)$为$x(n)$右移m位。

图 1－2 所示为$x(n)$、$x(n-2)$、$x(n+2)$。

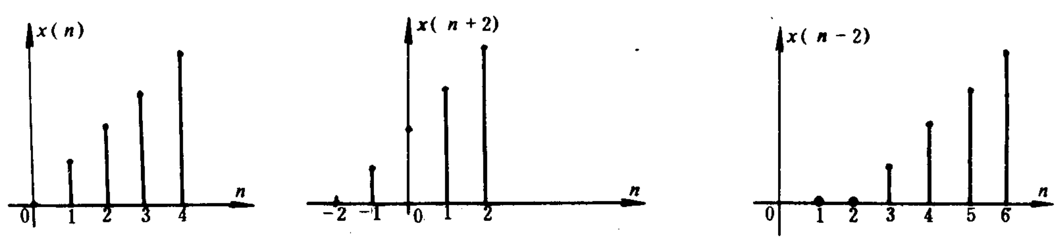


图 1－2 序列延迟

二、常用典型序列

(一)单位冲激序列(单位样值序列)

单位冲激序列用符号$\delta(n)$表示，如图 1－3 所示，其定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \tag{1-1}$$

这个序列在变量$n=0$时，有一个值单位 1，其余均为零。这是今后最常用的一个序列。它在离散系统中起的作用类似于连续系统中冲激函数$\delta(t)$，但应注意$\delta(t)$在$t=0$时趋于无穷，是一种数学极限，并不是现实的信号，而$\delta(n)$是一个现实信号，$\delta(0)=1$是一个有限值。

类似于 $\delta(t)$，$\delta(n)$有一个重要性质——“筛分特性”。

因为 $\delta(n-m)=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$

所以

$$x(n)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n) & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

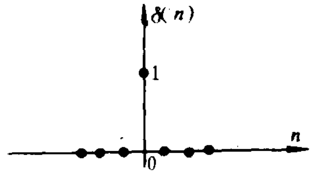


图 1－3　单位冲激序列

由此，可以得到序列的另一种表达形式，即任何序列都可以表示为加权、延迟的单位冲激序列之和。写成

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \qquad (1-2)$$

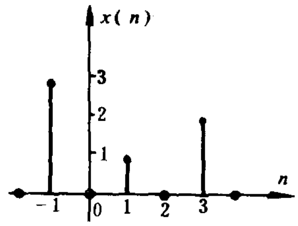


图 1－4　例 1－3 图

例 1－3　将图 1－4 所示序列表示成加权、延迟的单位冲激序列之和。

根据式(1－2)，$x(n)$写成

$$x(n)=3\delta(n+1)+\delta(n-1)+2\delta(n-3) \qquad (1-3)$$

(二)单位阶跃序列

单位阶跃序列用符号 $u(n)$表示，它定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad (1-4)$$

如图 1－5 所示，它很类似于连续时间信号中的 $u(t)$，但 $u(t)$在 $t=0$ 时发生跳变，往往不予定义(也有时定义为 1/2)，而 $u(n)$在 $n=0$ 时，$u(0)=1$。

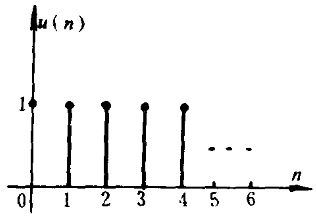


图 1－5　单位阶跃序列

(三)矩形序列

矩形序列用符号 $G_N(n)$表示，它定义为

$$G_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & n<0,n\geqslant N\end{cases} \qquad (1-5)$$

如图 1－6 所示，$G_N(n)$从 $n=0$ 开始到 $n=N-1$，共有 N 个幅度为 1 的数值，其余点全为 0。这类似于连续系统中的矩形脉冲。

显然，$\delta(n)$、$u(n)$、$G_N(n)$三种序列有如下关系

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$G_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

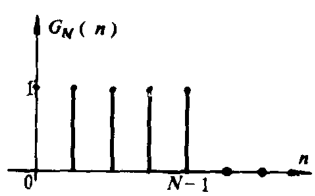


图 1－6　矩形序列

(四)正弦序列

在研究正弦序列时要用周期序列的概念，为此先介绍周期序列。

1. 周期序列

对于所有的 n 值，序列 $x(n)$ 满足

$$x(n) = x(n + rN) \qquad (1-6)$$

则 $x(n)$ 为周期序列。其中 r 为任意整数，N 为使序列重复出现的最小实正整数，N 为 $x(n)$ 的周期。图 1－7 所示 $N=4$ 的周期序列。

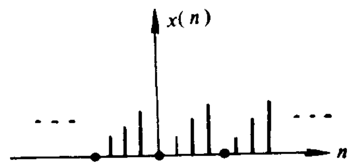


图 1－7　周期序列

2. 正弦序列

包络值按正弦规律变化的序列叫正弦序列，即

$$x(n) = \sin(n\omega_0) \qquad (1-7)$$

式中，ω_0 为正弦序列的数字域频率。它反映了序列变化的快慢速率。例如 $\omega_0=0.01\pi$，则序列每 200 个点重复一次正弦循环；若 $\omega_0=0.1\pi$，则序列每 20 个点重复一次正弦循环，如图 1－8 所示。

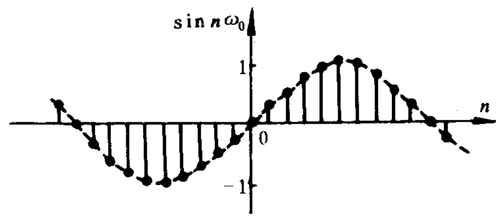


图 1－8　正弦序列（$\omega_0=\pi/10$）

应该注意，并不是所有的正弦序列都是周期序列。根据周期序列定义，只有满足下式的正弦序列才是周期序列，即

$$\sin(n\omega_0) = \sin[(n+N)\omega_0] = \sin(n\omega_0 + N\omega_0) \qquad (1-8)$$

若使上式成立，则

$$N\omega_0 = 2\pi k$$

$$N = \frac{2\pi k}{\omega_0} \qquad (1-9)$$

式中，N 为正整数；k 为任意整数（取 $k>0$）。

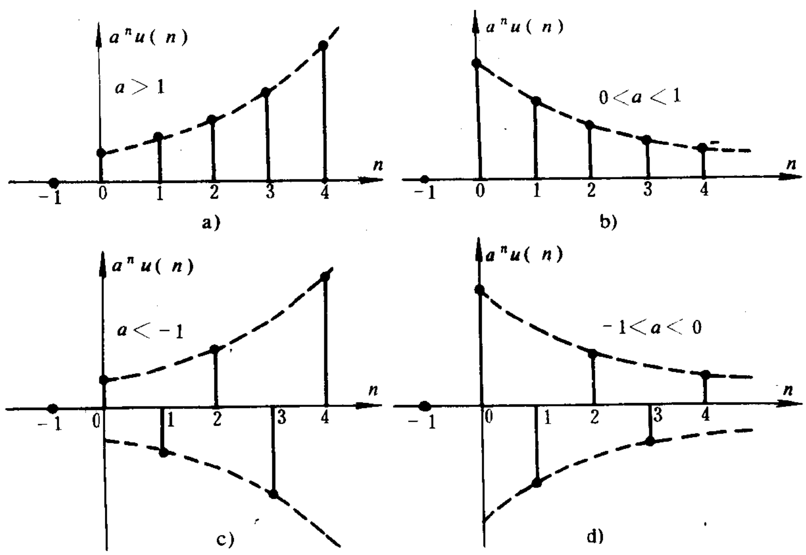


图 1－9　指数序列

因此，当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时，令 $k=1$，则式(1－8)成立且周期为 $N=2\pi/\omega_0$；当 $2\pi/\omega_0$ 为有理数时，k 值逐步增加，k 取使 $2\pi k/\omega_0$ 为最小整数时，$2\pi k/\omega_0$ 就是式(1－8)的周期；当 $2\pi/\omega_0$ 为无理数时，则式(1－8)不成立，此时正弦序列为非周期序列。

与正弦序列相对应的，有余弦序列，

$$x(n) = \cos(n\omega_0)$$

(五)指数序列

指数序列定义为

$$x(n) = a^n u(n) \tag{1-10}$$

由图 1－9 可知，当 $|a|>1$ 时，指数序列发散；当 $|a|<1$ 时，指数序列收敛；a 为负数时，指数序列是摆动的。

(六)复指数序列

序列可以取复数值，称为复指数序列，即

$$x(n) = e^{(\sigma+j\omega_0)n} = e^{\sigma n}\cos(n\omega_0) + je^{\sigma n}\sin(\omega_0 n) \tag{1-11}$$

例如，最常用的一种复序列为

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$$

用极坐标表示

$$x(n) = |x(n)|e^{j\arg[x(n)]}$$

因此，$|x(n)|=1$，$\arg[x(n)]=\omega_0 n$

图 1－10a、b 分别画出 $x(n)$的幅度特性和相位特性。

请注意，复指数序列的存在说明序列是一个复数值，这个概念将在第三章离散傅里叶变换中起重要作用。

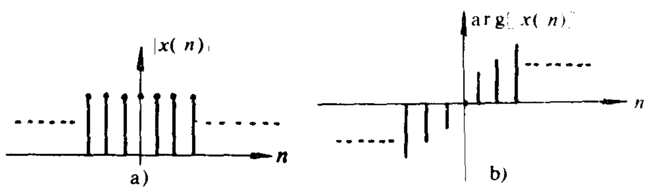


图 1－10　$e^{j\omega_0 n}$幅度特性和相位特性

a)幅度特性　b)相位特性

第二节　离散时间系统与差分方程

一个离散时间系统，它的输入是序列，输出也是序列。因此，它的本质是将输入序列转变成输出序列的一种运算。它可以用图 1－11 表示，其中 $T[\cdot]$代表这种运算关系，即

$$y(n) = T[x(n)]$$

通过对变换 $T[\cdot]$加上种种约束条件，离散时间系统可分为：线性、非线性、时变、非时变等各种类型。目前最常用的是“线性时不变系统”(即线性移不变系统)。本书的范围也限于此。

一、线性系统

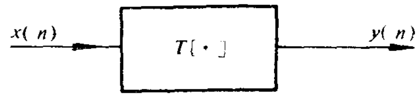


图 1－11　系统

线性离散时间系统应满足均匀性与叠加性，如图 1－12 所示。对于给定系统 $T[\cdot]$，若单独输入 $x_1(n)$或 $x_2(n)$时，响应分别为 $y_1(n)$、$y_2(n)$，则当输入为 $c_1x_1(n)+c_2x_2(n)$时，响应为 $c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$(c_1,c_2 为任意常数)时，系统为线性系统。即线性系统条件为

$$T[c_1x_1(n) + c_2x_2(n)] = c_1T[x_1(n)] + c_2T[x_2(n)] \qquad (1-12)$$

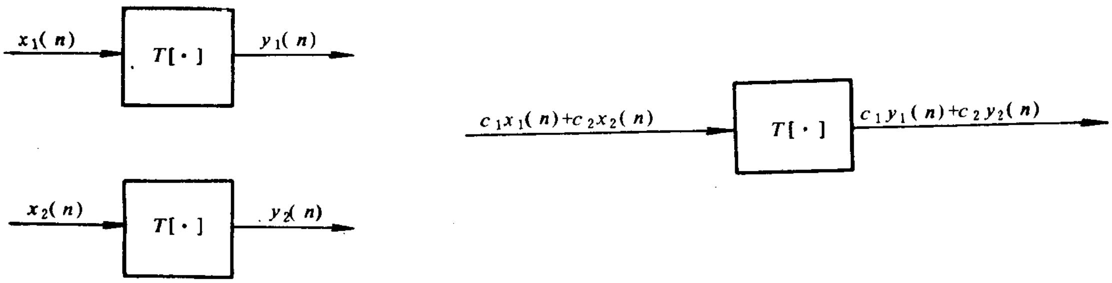


图 1—12　线性系统

说明对线性系统可以采用叠加原理。

二、时不变系统

对于时不变系统，在相同初始条件下，系统的响应与输入序列加于系统的时刻无关。如图 1—13 所示，若系统输入 $x(n)$输出为$y(n)$，则将输入序列移动任意位后 $x(n-m)$加入系统，所得输出序列除了跟着移位外，数值应保持不变，即

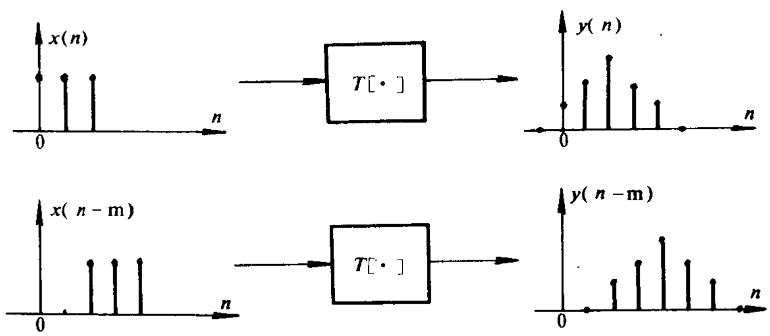


图 1—13　时不变系统

$$T[x(n)] = y(n)$$

则时不变系统

$$T[x(n-m)] = y(n-m)$$

式中，m 为任意整数。

满足上述关系的系统为时不变系统。

三、差分方程

描述连续时间系统的方程是微分方程。对于离散时间系统，由于它的变量 n 是离散整型变量，所以只能用差分方程加以描述。下面举两个例子加以说明。

例 1—4　一质点在水平方向作直线运动，在某一秒内所走距离等于前一秒所走距离的 2 倍，求其运动方程。

解　设 $y(n)$表示第 n 秒末行程，则依题意得

$$y(n) - y(n-1) = 2[y(n-1) - y(n-2)]$$

运动方程为

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0 \qquad (1-13)$$

例 1—5　承包某户粮食产量每年递增 5%，当年开荒在次年增产 $x(n)$斤。求该户粮食产

量方程。

解 设第 n 年粮食产量为 $y(n)$斤，则第 $n+1$ 年粮食产量 $y(n+1)$为

$$y=(n+1)=1.05y(n)+x(n)$$

产量方程为

$$y(n+1)-1.05y(n)=x(n) \tag{1-14}$$

式(1—13)、式(1—14)均为差分方程。

未知序列由 $y(n)$、$y(n+1)$、…、$y(n+N)$构成的差分方程称之为左移差分方程，如式(1—14)；未知序列由 $y(n)$、$y(n-1)$、…、$y(n-N)$构成的差分方程称之为右移差分方程，如式(1—13)。未知序列最高序号与最低序号之差称为差分方程的阶数。式(1—13)为 2 阶差分方程，式(1—14)为 1 阶差分方程。

离散系统用差分方程描述。式(1—13)和式(1—14)说明离散时间系统的基本运算是延时(移位)、乘系数和求和。因此构成离散时间系统的基本单元、基本硬件就是延迟器、乘法器和加法器。其符号如图 1—14 所示。

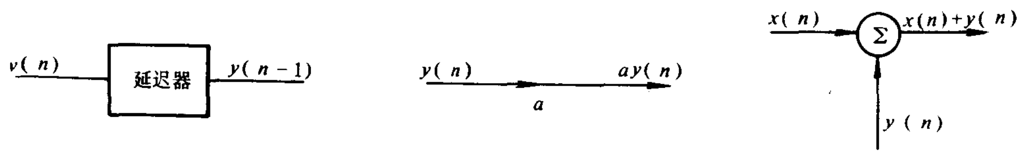


图 1—14 延迟器、乘法器、加法器示意图

例 1—6 离散系统结构如图 1—15 所示。写出描述系统的差分方程。

解：根据图可写出

$$y(n)=a_0x(n)+a_1x(n-1)-b_1y(n-1) \tag{1-15}$$

可以认为，图 1—15 是完成式(1—15)描述的离散时间系统的硬件原理结构图。反之，可以认为式(1—15)是图 1—15 所描述离散时间系统的软件算法。延迟器、乘法器、加法器就象模拟系统的 R、L、C 一样是构成离散时间系统的基本元件。

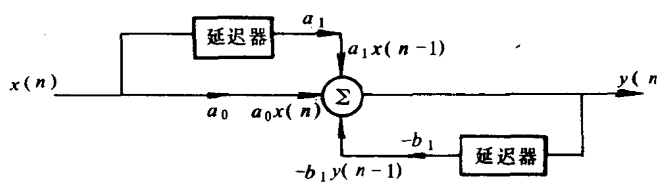


图 1—15 例 1—6 图

四、常系数差分方程及其解法

常系数差分方程一般形式可表示为

$$\begin{aligned}&y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)\\&=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_{M-1}x(n-M+1)+b_Mx(n-M)\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=0}^{N}a_iy(n-i)=\sum_{j=0}^{M}b_jx(n-j) \tag{1-16}$$

式中，a_i、b_j 为常数($a_0=1$)，差分方程为 N 阶。

一般讲，求解常系数差分方程有如下几种方法：递推法、时域经典法、零输入零状态响应法、卷积法及变域法等。其中，时域经典法、零输入零状态响应法在后续内容中基本不用，这里

不作讲述。卷积法求零状态响应在离散系统分析中占有极重要的地位，因此在下一节中专门讲述。变域法在第二章讲，本节主要讲差分方程递推算法。

差分方程的初始条件给定后，用递推法求解系统瞬态解。这种方法最适于用计算机求解。方法十分简单、实用。但只能给出数值解，不能直接给出一个完整的解析式作为解答。

例1－7 差分方程

$$y(n)=x(n)-3y(n-1)$$

在初始条件为 $y(n)=0, n<0$；输入 $x(n)=n^2+n$ 时可以直接计算得

$$y(0)=x(0)-3y(-1)=0$$
$$y(1)=x(1)-3y(0)=2$$
$$y(2)=x(2)-3y(1)=0$$
$$y(3)=x(3)-3y(2)=12$$
$$\vdots$$

差分方程递推解法，是实现数字滤波器的一种基本方法，在第六、七章中将经常利用这种方法。为此在实验一中，要求大家在计算机上实现差分方程的递推解法。

第三节 离散卷积

一、单位冲激响应 $h(n)$（单位样值响应）

以 $\delta(n)$ 作为激励的线性时不变系统的零状态响应称之为单位冲激响应，记作 $h(n)$，即

$$h(n)=T[\delta(n)] \tag{1-17}$$

所谓零状态响应是指激励接入系统时，系统处于静止状态（系统无储能），也就是，在 $n=n_0$ 激励接入系统时，$y(n_0-1)$、$y(n_0-2)$、…、$y(n_0-N)$ 全为零状态下的响应。

那么如何求系统的单位冲激响应呢？上一节讲的递推法和下一章所讲的变域法都是比较有效的方法。此外，齐次方程解法也是时域中求单位样值响应的有效方法。下面加以介绍：

差分方程

$$y(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{j=0}^{M}b_j x(n-j)$$

其齐次方程为

$$y(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)=0$$

特征方程为

$$\alpha^N+\sum_{i=1}^{N}\alpha^{N-i}a_i=0$$

如果特征方程有 k 个不相等单根，即

$$\prod_{k=1}^{k}(\alpha-\alpha_k)=0$$

则齐次方程解形式为

$$y_H(n)=\sum_{i=1}^{k}c_i\alpha_i^n \qquad (c_i\text{ 为待定系数})$$