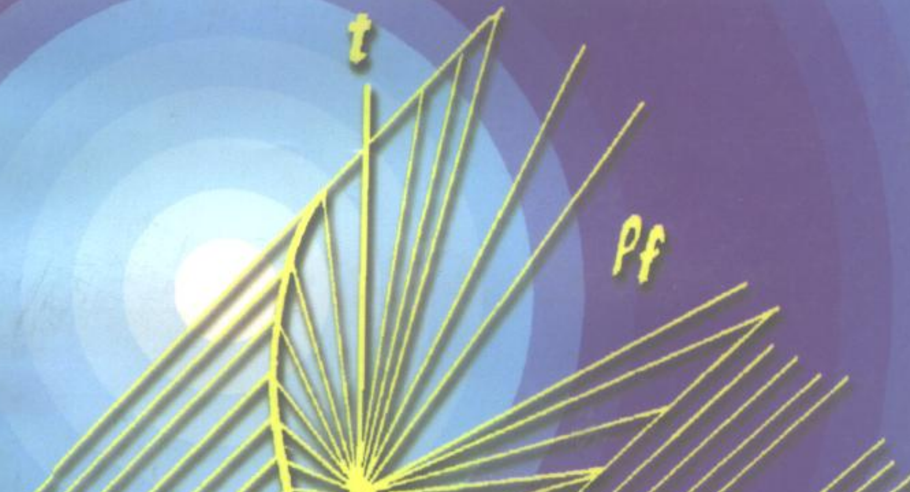
高等学校教学用书

数学模型与数学建模

刘来福 曾文艺 编著



北京师范大学出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

数学模型与数学建模

刘来福　曾文艺　编著

北 京 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

数学模型与数学建模/刘来福，曾文艺编著. —北京：北京师范大学出版社，1997.9
高等学校教学用书
ISBN 7-303-04374-8

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①刘… ②曾… Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材②建立模型-高等学校-教材 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 12958 号

北京师范大学出版社出版发行
（100875 北京新街口外大街 19 号）
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：850×1168 1/32 印张：12.375 字数：302 千
1997 年 8 月北京第 1 版 1998 年 3 月北京第 2 次印刷
印数：3 001～8 000 册
定价：15.60 元

前　言

以前，人们提到应用数学一般都理解为数学在力学、电学和工程技术等与物理关系密切的领域中的应用．然而，近几十年来随着科学技术的不断进步和计算机的迅速发展，数学的应用领域在不断地扩大．它不仅被用来解决我们日常的生产、生活和社会等领域中的各种各样的实际问题，而且也在许多学科（如：经济学、生物学、医学和环境科学等）的理论发展中得到了应用．科学不断发展，社会不断进步．我们周围将会出现更多的与数学有关的问题等待我们去研究、开发．

数学的应用实质上是数学和所研究的实际问题相结合的结果．一个成功的数学应用的成果往往会使我们对所研究问题的认识达到更深入的层次，这是当我们使用自然语言来描述一个现象时很难做到的．数学是各学科可以共同使用的一种科学语言，有它自己的理论体系；而实际问题则各自显示它们自己的特征和要求．一个成功的应用必须要把两者沟通，建立起它们之间的紧密联系．数学模型就是架于数学理论和实际问题之间的桥梁．通过数学模型的组建把数学的语言引入到实际问题，而实际问题的对模型分析的特殊的需求又往往对数学的理论提出新的挑战．实践证明，要想使数学应用得以成功，将有赖于应用者深厚的数学基础和他的严格的逻辑推理的训练．但仅此是不够的，还要依赖于他的敏锐的洞察眼光、分析归纳的能力以及对实际问题的深入的理解和广博的知识面．这些在我们传统的数学教学中并没有给予

足够的注意和训练．过去我们经常形容传统的数学理论是“烧（鱼的）中段”．也就是说数学理论主要着眼于数学内部的理论结构和它们之间的逻辑关系，并没有着意讨论如何从实际问题中提出数学问题（鱼头）以及如何使用数学来解决实际问题（鱼尾）方面的内容．作为一个应用者，要想使自己的应用工作得到成功，仅仅掌握数学理论的内容和训练是不够的，他必须具备应用数学知识解决实际问题的能力，必须经受更全面的训练．在数学教学中不仅要给学生“烧中段”，应该给他们“烧全鱼”．

本书将以数学模型和数学建模为主要论题，目的在于通过书中内容的学习使读者在应用数学知识解决实际问题的能力上有所提高．书中重点介绍如何针对实际问题来组建数学模型以及如何通过模型的分析来解决实际问题．以“烧头尾”来补充在基础数学教学上“烧中段”的不足．为了使更多的读者能了解数学如何应用于解决实际问题，本书将读者的数学知识定位于大学低年级的水平．也就是说只要求读者具备微积分、线性代数、常微分方程和初等概率论等数学知识就可以顺利地阅读本书中的大部分内容．这并不意味着只是这些数学知识是有用的．实际问题对数学的需求是没有学科的界限和知识层次的高低之分的．问题解决的水平将有赖于应用者的数学功底和他解决实际问题的能力．

不少人反映“学了不少数学，但是不会用它去解决实际问题．”这表明“学数学”与“用数学”是不同的．会学数学的人不一定就肯定会用数学．掌握了数学的人在数学建模上也不一定是自通的．在知识结构、思维方式和能力训练等诸多方面数学建模或数学应用都有它自己的特点，与数学理论在这些方面的要求明显不同．本书结合作者多年在数学应用的研究及教学工作中的经验体会，在第一篇中就与数学模型和数学建模有关的问题上进行了一些讨论．目的在于阐明数学建模或数学应用与数学理论一样是需要学习和训练的．

本书的第二篇集中介绍了十六个数学模型的应用实例，以表明应用数学解决实际问题时的方式和效果．实例中不少是在数学应用的发展过程中取得成功并且是有影响的例子．在实例的选取上我们尽量拓宽它们在实际问题上和所涉及的数学理论上的覆盖面．本书不打算（也不可能）涉及数学所有可能应用的各种各样的实际问题和所有可能使用的数学知识．我们相信读者在这些例子的启发下会在更多的领域做出有特色的创造性的应用成果．

书中的第三篇介绍了数学模型在相关学科或领域的理论发展中的应用．虽然这些讨论在相关的学科和领域中仍属理论基础，但对数学来说实际上可以理解为它在相关学科发展中的应用．它们当中有些已经有了系统的研究工作，促进了相关领域的理论研究的深入开展．我们相信这些内容会帮助读者了解数学模型和数学建模在学科发展中的作用，对数学模型有一个更全面的认识．

应该说我们大家十分熟悉的理论力学、数学物理、工程计算、运筹学和统计学等都是数学和物理学或实际问题出色结合的结果．用我们的语言说，都是非常成功的数学模型．由于它们各自都有了自己系统的理论，有大量的著作和教材以及学习它们的教学途径，本书中没有涉及这方面的内容．有需要的读者寻找适当的途径了解和掌握有关的知识不会有多大困难．

本书的第二篇由曾文艺提供初稿，其余部分和全书的统稿工作由刘来福完成．本书是作为大学“数学模型”课的教材编写的．但是要在40～60学时的课堂教学中讲完全部内容是困难的．书中大部分章节的内容是相对独立的，可以根据教学时数、教学要求和学生的程度进行舍取，选讲其中的部分内容．

“数学模型”作为一门课，目前尚不成熟．无论是课堂教学的安排还是教材的编写仍处于探索阶段．本书作为大学“数学模型”课的教材实是作者在这方面的一个努力和探索．限于作者的水平，书中会有谬误和不妥．我们热切地希望听到读者的反馈信

息，无论是批评指正，还是建议完善．我们都非常欢迎．

此书系北京市普通高等学校教育教学改革试点立项成果。

编 著 者
于北京师范大学数学系

目　　录

第一篇　数学模型和数学建模

第二篇　数学模型实例

第一篇 数学模型和数学建模

第一章 数学模型

§1.1 引 言

20世纪以来，科学技术得到了飞速的发展. 数学在这个发展过程中发挥了它不可替代的作用，同时它自身也得到了空前的发展. 由于计算机的迅速发展和普及，大大增强了数学解决现实问题的能力. 数学向社会、经济和自然界各个领域的渗透，扩展了数学与实际的接触面. 数学科学应用于经济建设、社会发展和日常生活的范围和方式发生了深刻的变化. 从科学技术的角度来看，不少新的分支学科出现了，特别是与数学相结合而产生的新学科如数学生物学、数学地质学、数学心理学和数学语言学等等. 在当今的时代，"国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效率的经济管理."这是当代有识之士的一个共同的见解，也已为发达国家的历史所证实. 大量的事实表明，高技术是保持国家竞争力的关键因素. 高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学. 高技术的出现使得数学与工程技术之间在更广阔的范围内和更深刻的程度上直接地相互作用，把我们的社会推进到数学工程技术的新时代，当代社会和经济发展的一个特点就是定量化和定量思维的不断加强. 它不仅适用于科学技术工作，在经济管理工作中也日益

体现出了它的重要作用.直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误,这些都将成为精明的科技人员和经济工作者所应具备的工作素质.因此可以预言:数学以及数学的应用在科学技术、经济建设、商业贸易和日常生活中所起的作用将愈来愈大.数学科学作为技术改进、经济发展以及工业竞争的推动力的重要性也将日益显现出来.

众所周知,数学最引人注目的特点是它的思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性.这是在数学发展的漫长的历程中逐渐形成的.它来源于人们生产和生活的需要.对其中有关的空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而形成当今的数学.它的出现为我们在更深的层次上认识世界提供了一条重要的途径.它的抽象性和严谨性的特点也成为我们科学地思维和组织构造知识的一个有效的手段.而数学的广泛应用性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础.但是在过去的年代由于种种原因,这个特点在人们的印象中反映得并不充分.往往只把数学理解为训练人们科学思维的工具,致使人们常常感到学了大量的数学知识和方法但是不会用或者用不上.当前,在数学科学与其它科学技术和经济建设紧密结合变得更加需要和可能的今天,学术界在探讨数学科学的技术基础及其对经济竞争力的作用时指出:"在经济竞争中数学是不可少的,数学科学是一种关键性的、普遍的、能够实行的技术.""高技术的出现把我们的社会推进到数学技术的时代".数学的应用特征在当今就显得更加突出和重要.

数学模型是应用数学知识和计算机解决实际问题的一种有效的重要工具.不妨请看几个例子.对于十字路口的交通问题,为使路口的交通顺畅,需要设计一个路口的最佳交通流的控制方案(如是否设单行道,是否限制载重车辆通行,如何控制交通灯等).一种办法是将几种不同的交通控制的设计方案交给交通队进行实地试

验，进行观测，最后找出最优的方案．显然，这种办法不仅费时费力，而且会造成该路口和临近地区的交通混乱，根本无法执行．另一种办法是由研究人员调查路口的车流规律，收集有关的数据资料，如车流密度、车辆速度、大小以及路口状况等，使用数学和统计学的手段提炼出这些量之间的关系并且使用计算机进行分析和比较，就可以找到最优的控制管理方案．这就是交通管理的数学模型．有了它我们还可以评估类似的交通流控制方案．生物医学专家掌握了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，他就可以用来分析药物的疗效，从而有效地指导临床用药．厂长和经理们掌握了他们的工厂、企业的生产与销售的数学模型，他们就可以用计算机控制生产、销售以获取尽可能高的经济收益，增强他们的经济竞争力．

应用数学知识和计算机去解决各门学科和社会生产中的实际问题时，首先要通过对实际问题的分析、研究组建用以描述这个问题的数学模型，使用数学的理论和方法或者编程计算对模型进行分析从而得到结果，再返回去解决现实的实际问题．可见数学模型、数学建模是应用数学理论和计算机解决实际问题的重要手段和桥梁．大量的事实表明，掌握了数学知识只是应用数学解决实际问题的必要条件，在当前实现数学作为一种技术的职能的过程中使用数学解决实际问题的技能的培养也是非常重要和必须的．这主要是数学模型的有关知识和数学建模能力的培养．这也是本书的主要目的．

§1.2 数学模型

我们经常使用模型的思想来认识世界和改造世界．这里的模型是针对原型而言的．所谓原型是指人们在社会活动和生产实践中所关心和研究的实际对象，在科技领域常常用系统或过程等术

语. 如机械系统、电力系统、生态系统、交通系统、社会经济系统等；又如导弹飞行过程、化学反应过程、人口增长过程、污染扩散过程等等. **模型是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象**. 例如大家熟知的航空模型就是飞机的一个抽象. 除了机翼与机身的相对位置关系外的一切因素，包括飞机的实际大小都在抽象的过程中被忽略掉了. 虽然它与原型的实际飞机已经相距甚远，但是在飞行过程中机翼的位置与形状如何影响飞机在空中平稳地滑翔可以给人们以启迪. 城市的交通图是这个城市的一个模型. 在这个模型中城市的人口、车辆、树木、建筑物的形状等都不重要. 但图中所展示的街道和一目了然的公共交通线路是任何一个实际置身于城市中的人很难搞清楚的. 由此可见模型来源于原型，但它不是对原型简单的模仿，它是人们为了认识和理解原型而对它所作的一个抽象、升华. 有了它就可以使我们通过对模型的分析、研究加深对原型的理解和认识.

所谓数学模型是指**通过抽象和简化，使用数学语言对实际现象的一个近似的刻划，以便于人们更深刻地认识所研究的对象**. 数学模型也不是对现实系统的简单的模拟，它是人们用以认识现实系统和解决实际问题的工具. 数学模型是对现实对象的信息通过提炼、分析、归纳、翻译的结果. 它使用数学语言精确地表达了对象的内在特征. 通过数学上的演绎推理和分析求解，使得我们能够深化对所研究的实际问题的认识. 例如力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F=m\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}t^2$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型，其中 $x(t)$表示运动的物体在时刻 t 的位置，m 为物体的质量，而 F 表示运动期间物体所受的外力. 模型忽略了物体的形状和大小. 由于它抓住了物体受力运动的主要因素，这一定律的出现大大深化了力与物体运动规律的研究工作. 又如描述人口 $N(t)$ 随时间 t 自由增长过程的数学模型 $\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t=rN(t)$，尽管由于它忽略了性别、年龄、社会经济和自然界的约束条件等许多与

人口增长有密切关系的因素，相对于实际人口的动态来说大大地被简化了．但它所揭示出的人口成等比级数的增长的结论是人们不得不面对的严酷事实．

数学模型并不是新的事物，很久以来它就一直伴随在我们身边．可以说有了数学并要用数学去解决实际问题时就一定要使用数学的语言、方法去近似地刻划这个实际问题．这就是数学模型．数（整数、有理数、实数等）、几何图形、导数、积分、数学物理方程以至于广义相对论、规范场等都是非常成功的数学模型．运筹学以及统计学的大部分内容都是关于数学模型的讨论和分析．可以说在数学的发展进程中无时无刻不留下数学模型的印记．在数学应用的各个领域到处都可以找到数学模型的身影．只不过在当前随着科学技术的发展，各门学科的定量化分析的加强以及使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍的条件下，数学模型作为数学实现其技术化职能的主要手段之一，它的作用显得愈发突出，从而受到了更加普遍的重视．

数学模型主要是使用数学知识来解决实际问题．因此数学是人们掌握和使用数学模型这个工具的必要条件和重要的基础．没有广博的数学知识、严格的数学逻辑思维的训练是很难使用数学模型来解决实际问题的．但是数学模型本身也还具有若干不同于数学的特征，这些都是在学习和掌握数学模型过程中特别要注意的．

在实践中，能够直接运用数学方法解决实际问题的情形是很少见的．也就是说，实际问题很少直接以数学的语言出现在我们面前．而且对于如何使用数学语言来描述所面临的实际问题也往往不是轻而易举的．应用数学知识解决实际问题的第一步必须要面对实际问题中看起来杂乱无章的现象并从中抽象出恰当的数学关系，也就是组建这个问题的数学模型．这个过程就是数学建模．与数学不同，数学模型的组建的过程不仅要进行演绎推理而且还要

对复杂的现实进行总结、归纳和提炼的工作.这是一个归纳总结与演绎推理相结合的过程.可以设想,在描述人口增长时,如果把年龄、性别、死亡、生育、择偶、婚配、疾病、卫生、饥荒、战争等等因素都容纳进去,即使使用现代的数学工具恐怕也难以进行分析和研究.因此建模时必须要对现实问题进行去粗取精、去伪存真的归纳加工过程.但建模时究竟保留什么因素,忽略什么因素并没有一定的范式.这要根据建模者对实际问题的理解、研究的目的及其数学背景来完成这个过程.应该说这是一个创造性的过程.而且不同的建模者针对同一个实际问题完全可以得到不同的数学模型.

数学模型的另一个重要的特点是要接受实践的检验.因为建模的目的是要用以研究和解决原型的实际问题.而数学模型是经过简化和抽象得到的,尽管这个数学模型的组建过程中的逻辑推导准确无误,也并不意味着模型是成功的.它必须要接受实践的检验.经检验被认为是可以接受的模型才能付诸分析、使用.

数学模型是使用数学来解决实际问题的桥梁.对它的分析和研究的过程中主要是数学的理论、方法.由于我们的目的是解决实际问题,在分析过程中应用数学理论时数学上的自然的结论不一定是研究数学模型所需要的结果.像大家在中学数学中所遇到的应用题那样只要套用公式就能解决的问题在实际的数学模型中是很少见到的.将分析模型所得到的数学结论回到实际中去解决问题同样需要创造性的工作,往往并非简单地套用现有的数学公式或定理所能奏效的.因此不能认为数学模型就是数学应用题,特别是不能认为数学模型就是套公式的问题.

数学模型和数学建模不仅仅展示了解决实际问题时所使用的数学的知识和技巧,更重要的是它将告诉我们如何提出实际问题中的数学内涵并使用数学的技巧来解决它.因此学习数学模型不仅要学习和理解模型分析过程中所使用的数学知识和逻辑推理,更重要的是在于了解怎样用数学对实际问题组建模型以解决问

题.如何“用数学”与如何“学数学”是根本不同的.掌握使用数学去建立模型以解决实际问题所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也是迥然不同的.

一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学.作为一个成功的模型应该有较强的实际背景,最好是直接针对某个实际问题的;模型应该是经过实际检验表明是可以接受的;模型应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解;而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的.

§1.3 问题举例

对于初学者来说,数学模型是一个较难驾驭的课题,它的处理手法相当灵活.要掌握数学模型最好的办法是实践,自己一个人独立地实践或几个人一组集体实践.开始阶段不要急于尝试工业上或科学技术上复杂的建模问题.在我们身边的现实生活中就有许多值得我们思考的问题.其中不少既简单又实用,是我们学习数学模型的好材料.这一节所列举的例子将展现给大家实际中的数学模型是什么样子.以利于大家去发现我们身边的模型.例题是一些极普通的问题,不需要你具备多少实际的专业背景和过多过深的数学知识和方法就可以着手去尝试.例子中多数都可以找到另外的研究方法,这在数学模型中是不奇怪的.就象我们在例子中将要看到的那样,也许我们会发现更巧妙的思路来改进例题所得到的结论,这都是很正常的.

例 1.1 包扎管道

问题:水管或煤气管经常需要从外部包扎以便对管道起保护作用.包扎时用很长的带子缠绕在管道外部.为节省材料,如何进行包扎才能使带子全部包住管道而且带子也没有发生重叠.

显然,在这个问题中带子的宽度、管道的粗细和缠绕的角度之