高等学校教材

GAODENG SHUXUE XITIKE JIAOCHENG

高等数学习题课教程

鲍伟 蔡瑞清 陈菊英 张美华 毛京中 董秀媛 编

中国科学技术出版社

高等数学习题课教程

鲍　伟　蔡瑞清　陈菊英
张美华　毛京中　董秀媛　编著

中国科学技术出版社

(京)新登字 175 号

高等数学习题课教程

鲍　伟　蔡瑞清　陈菊英
张美华　毛京中　董秀媛　编著

责任编辑　平珍

中国科学技术出版社出版

(北京海淀区白石桥路 32 号)　邮政编码:100081

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

河北省吴桥县印刷厂印刷

*

开本:787×1092 毫米　1/32　印张:13.5　字数:300 千字

1993 年 7 月第 1 版　1993 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—5000 册

ISBN7—5046—1099—2/G・63

定价:7.30 元

内容提要

本书是根据国家教委颁布的“高等数学课程教学基本要求”编写的配套的习题课教学用书，是在北京理工大学“高等数学习题课讲义”的基础上经修改和补充成稿的。全书按函数、极限、一元函数微分和积分、空间解析几何和向量代数、多元函数微分和积分、级数、微分方程等先后顺序编写成28讲，供56课时的教学计划施行。每讲列出基本要求、主要内容、例题解析、课堂练习和课外作业五个部分。每讲后给出了课堂练习和课外作业的答案。

本书可作为工科院校数学习题课教材，也可供高等数学教师授课作参考，对于为达复习目的或立志进一步深造、报考研究生的读者也具一定的参考价值。

前　言

高等数学习题课，是进行高等数学教学的一个重要环节，它对提高学生的学习质量，培养学生的思维和解题能力起着至关重要的作用。本书是根据国家教委颁布的“高等数学课程教学基本要求”编写的。

本书集中了我校广大教师多年来在高等数学教学上积累的经验和资料，并注意吸取某些同类教材的优点，在我校所编的《高等数学习题课讲义》基础上修改而成的。

本书根据我校（兼顾一般院校）高等数学教学大纲的要求，与《高等数学》理论课配合，编写了 28 讲（56 学时）习题课的教学内容，注意到习题课教学的特点：总结与提高结合、讲与练结合，课内习作与课外习作结合，每讲安排有：基本要求、主要内容、例题解析、课堂练习和课外作业五个部分。“基本要求”指出了本讲的教学目标，使学生学习时目的明确，便于检查学习效果。“例题解析”注意选择具有启发性、广泛性、典型性的例题，着重分析题意，指出解题思路和解题步骤，许多题目具有相当的深广度和技巧性，虽由于篇幅的关系，不少题目仍兼顾了一题多解的分析，学生学习后会起到举一反三的作用；“课堂练习”的选取注重于学生基本解题技能的培养和检查学生对基本理论的理解和运用程度；“课外作业”着眼于培

养学生综合运用能力，有些还配备了适量的带*号的作业供学生深入思考练习。课堂练习和课外作业部分在每讲后均有答案。

本书内容安排考虑了循序前进、由浅入深、前呼后应的原则，力求通俗易懂，便于自学。

本书在编写和出版过程中，得到了北京理工大学各级领导的关心和帮助；应用数学系广大教师对内容的安排提出了很多宝贵的意见；部教材编审室的同志给予了大力支持，在此向他们致以衷心的谢意。

编者非常感谢清华大学施学瑜教授，他在百忙中认真审阅了书稿并提出了许多很好的建议。

限于编者水平，疏漏和不当之处在所难免，希望广大同行、专家和读者予以批评指正。

目　　录

第一讲　函数……………………………………………… 1
第二讲　极限概念　极限运算法则 ………………… 13
第三讲　极限存在准则　函数连续性 ……………… 26
第四讲　导数 ……………………………………………… 39
第五讲　微分　高阶导数 ………………………………… 55
第六讲　中值定理 ……………………………………… 71
第七讲　泰勒定理　罗必塔法则 …………………… 83
第八讲　导数的应用 …………………………………… 99
第九讲　不定积分的概念和性质……………………… 118
第十讲　换元积分法和分部积分法…………………… 130
第十一讲　几类初等函数的积分法…………………… 143
第十二讲　定积分概念与性质………………………… 160
第十三讲　定积分的计算　广义积分………………… 173
第十四讲　定积分的应用……………………………… 188
第十五讲　向量代数…………………………………… 205
第十六讲　空间解析几何……………………………… 217
第十七讲　多元函数微分学的基本概念以及微分法 …
…………………………………………………………… 234

第十八讲　偏导数的几何应用　多元函数的极值 ……………………………………………………………… 254
第十九讲　二重积分……………………………… 263
第二十讲　三重积分……………………………… 278
第二十一讲　重积分的应用……………………… 292
第二十二讲　曲线积分…………………………… 305
第二十三讲　曲面积分…………………………… 320
第二十四讲　场论初步…………………………… 334
第二十五讲　数项级数…………………………… 347
第二十六讲　函数项级数………………………… 362
第二十七讲　一阶微分方程　可降阶方程………… 382
第二十八讲　线性微分方程……………………… 402

第一讲　函数

一、 基本要求

1. 理解函数概念；
2. 了解函数的几种特性；
3. 了解反函数和复合函数的概念；
4. 熟悉基本初等函数的性质和图形；
5. 能列出简单实际问题中的函数关系。

二、 主要内容

1. 函数概念。
2. 函数的特性

(1)有界性

若存在正数 M，对于(a,b)内任意点 x 都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在(a,b)内为有界函数，否则称为无界函数。

(2)单调性

若对区间(a,b)内任意两点 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$，(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $y = f(x)$ 在(a,b)内为单调增加(或减少)函数。

(3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间$(-l,l)$内有定义，若对区间$(-l,l)$内任意点 x，都有

$$f(-x)=-f(x) \qquad (\text{或} f(-x)=f(x))$$

则称函数 y=f(x)在$(-l,l)$内为奇函数(或偶函数)。

奇函数的图形关于原点是对称的；偶函数的图形关于 y 轴是对称的。

(4)周期性

设函数 f(x)在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上有定义，若存在不等于零的常数 T，对每一个 x 都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$为周期函数，一般称 T 中的最小正数为 $y=f(x)$的周期。

3. 基本初等函数、复合函数和初等函数

(1)基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

(2)复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 $y=f(u)$的定义域包含 $u=\varphi(x)$的值域，则在 $u=\varphi(x)$的定义域 X 上确定的函数

$$y=f[\varphi(x)] \qquad (x\in X)$$

称为由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，u 称为中间变量。

(3)初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合步骤而

得到的函数。

三、 例题解析

1. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$ 的定义域。

解 函数 $f(x+a)$ 与 $f(x-a)$ 定义域的交集，即是所求函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域。由于其对应律与已知函数 $f(x)$ 一样，仅变量作了一个平移，故把 $x+a$ 或 $x-a$ 作为一个新变量，其取值范围仍是 $[0,1]$。

因此，对于函数 $f(x+a)$，其定义域为 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，

对于函数 $f(x-a)$，其定义域为 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，即 $a\leqslant x\leqslant 1+a$。

对上述两定义区间取其交，即得函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域（图 1-1）

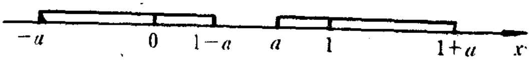

图 1－1

当 $1-a<a$ 时，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，定义域为空集；

当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，定义域为 $[a,1-a]$。

解决这类问题，应熟悉基本初等函数的性质和不等式的

解法。

2. 设(1) $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$， (2) $g(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x)$与 $g(x+2)$。

解 (1)因$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2$，所以

$$f(x)=x^2+2$$

(2)令 $x-2=t$，则 $x=t+2$，所以 $g(t)=(t+2)^2-2(t+2)+3=t^2+2t+3$，于是

$$g(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11$$

这里有一个问题值得注意：一个函数只要定义域与对应律不变，即对定义域中的每个实数值所确定的函数值不变，那么自变量用什么记号表示，与函数无关，故写 $f(x)$或 $f(u)$是无关紧要的。

3. 求函数 $y=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2, & -1\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数。

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有$-1\leqslant y=x^2-1\leqslant 0$，解得 $x=\sqrt{1+y}$；

当$-1\leqslant x<0$ 时，有 $0<y=x^2\leqslant 1$，解得 $x=-\sqrt{y}$。

因此反函数为

$$x=\varphi(y)=\begin{cases} \sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0 \\ -\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 1 \end{cases}$$

或写成

$$y=\varphi(x)=\begin{cases} \sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

4. 证明：对任意实数 x、y，有

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

且 $f(0)=0$，则

(1) $f(x)f(y)=xy$； (2) $f(x+y)=f(x)+f(y)$。

证 由 x,y 的任意性，在已知等式中可适当选取 x 或 y，再注意进行适当的代数运算，即可化为所要证明的等式。

(1) 在已知等式中，令 $y=0$，由 $f(0)=0$，得 $|f(x)|=|x|$，再将已知等式两端平方，由 $[f(x)]^2=x^2$ 得 $[f(x)]^2-2f(x)f(y)+[f(y)]^2=x^2-2xy+y^2$，即

$$f(x)f(y)=xy$$

(2) 在上式中，令 $y=1$，得 $f(x)f(1)=x$，于是有 $f(x+y)f(1)=x+y=f(x)f(1)+f(y)f(1)=[f(x)+f(y)]f(1)$。

因为 $|f(1)|=1$，所以 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。

容易验证，线性函数 $y=x$ 或 $y=-x$ 满足本题的已知条件。

5. 如图 1-2，$OABC$ 是一个正方形，O 是坐标原点，A、B、C 的坐标如图所示。另有一直线，其方程为 $x+y=t$，求正方形与平面区域 $x+y\leqslant t$ 公共部分的面积 $S(t)$。

解 当 $t\leqslant 0$ 时，$x+y<t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 没有公共部分，于是 $S(t)=0$；

当 $0<t\leqslant 1$ 时，$x+y<t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 的公共部分为一直角三角形，于是 $S(t)=\frac{1}{2}t^2$

当 $1<t\leqslant 2$ 时，$x+y<t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 的公共部分为一五边形，其面积为正方形面积减去一个三角形面积，于是

$$S(t)=1-\frac{(2-t)^2}{2}$$

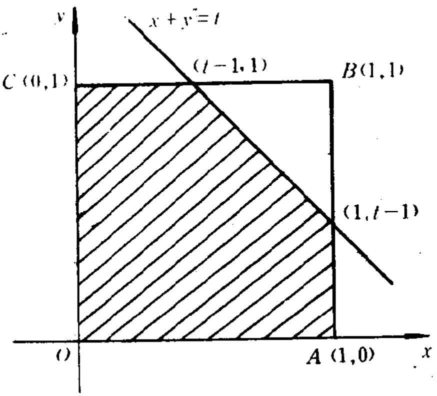

图 1-2

当 $t>2$ 时，$x+y<t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 的公共部分为一正方形，于是

$$S(t)=1$$

综上所述

$$S(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \dfrac{t^2}{2}, & 0<t\leqslant 1\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-t)^2, & 1<t\leqslant 2\\ 1, & t>2\end{cases}$$

此函数为分段函数，但它不是初等函数。

分段函数是否都不是初等函数？否。例如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 为分段函数，但 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 是由 $f(t)=$

$\sqrt{t}$,t
$=x^2$ 复合而成,所以这个分段函数为初等函数。

6. 下列函数能否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,如果能构成复合函数,指出该复合函数的定义域。

(1) $y=\lg u, u=\lg x$; (2) $y=\arcsin u, u=2+3^x$。

解 (1) $y=\lg\lg x, x\in(1,+\infty)$

(2) 不能复合,因为对任何 x 值,$u=2+3^x$ 的值均大于 2,使 $\arcsin u$ 无意义。

7. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,证明 $f(f\{f[f(x)]\})=x$,并求 $f(\dfrac{1}{f(x)})(x\neq 0, x\neq 1)$。

解 由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$,则 $\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$。

所以 $$f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-(1-\dfrac{1}{x})}=x$$

$$f\{f[f(x)]\}=f(x)$$

于是 $$f(f\{[f(x)]\})=f[f(x)]=x$$

$$f(\frac{1}{f(x)})=f(1-\frac{1}{x})=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x \quad (x\neq 0, x\neq 1)$$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,

$\varphi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$。

解 这是一个分段函数的复合问题,解决本问题的核心

是抓住中间变量的值域

$$u=\varphi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

u 的取值范围为$[1,2]$，$f(u)=\begin{cases}1, & |u|\leqslant 1\\ 0, & |u|>1\end{cases}$。将 u 值分成两部分：1 和$(1,2]$，对应 x 的值为± 1 和 $x\neq\pm 1$，于是

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & x=\pm 1\\ 0, & x\neq\pm 1\end{cases}$$

$$v=f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

v 只能取 1 和 0，则

$$\varphi[f(x)]=\varphi(v)=\begin{cases}2-v^2, & |v|\leqslant 1\\ 2, & |v|>1\end{cases}$$

于是 $\varphi[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$

9. 设 $f(x)$定义于$(-\infty,+\infty)$，并且存在正数 k 和 T，使 $f(x)=kf(x)$对一切 x 成立。证明存在正常数 a 和以 T 为周期的函数 $\varphi(x)$，使得 $f(x)=a^x\varphi(x)$。

证　对任意的 $a>0$，有 $a^x>0$，因此$\dfrac{f(x)}{a^x}$有意义。于是，只需证明可适当选取正数 a，使 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{a^x}$是以 T 为周期的函数就可以了。

设 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{a^x}$，其中 a 为待定正数，则

$$\varphi(x+T)=\frac{f(x+T)}{a^{x+T}}=\frac{kf(x)}{a^Ta^x}=\frac{k}{a^T}\varphi(x)$$

要想使 $\varphi(x)$是以 T 为周期的周期函数，只需取$\dfrac{k}{a^T}=1$，即 $a=k^{\frac{1}{T}}$。

因此，取 $a=k^{\frac{1}{T}}$，则 $f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的函数。

10. 证明：若函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的图象关于直线 $x=a$ 和直线 $x=b(b>a)$ 皆对称，则 $f(x)$ 是周期函数。

证 由已知得 $f(2a-x)=f(x)$，且 $f(x)=f(2b-x)$，于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f(2a-x)=f\{2b-[2b-(2a-x)]\}\\&=f[2b-(2a-x)]=f(2b-2a+x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是周期为 $T=2(b-a)$ 的函数。

四、 课堂练习

1. 试判断下列命题是否正确：

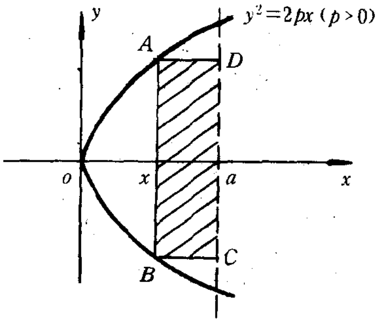

图 1-3

(1) $x=h$（h 是常数）是函数；

(2) 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=x$。