微分方程中的变分方法

陆文端 编著

Variational Methods in Differential Equations

By

Lu Wenduan

四川大学出版社

微分方程中的变分方法

陆文端 编著

Variational Methods in Differential Equations

By

Lu Wenduan

00446633

0176
L87

四川大学出版社

440633

(川)新登字 014 号

责任编辑：石大明
封面设计：唐利民
技术设计：石大明

微分方程中的变分方法

陆文端　编著

四川大学出版社出版发行（成都市望江路 29 号）
四川省新华书店经销　四川省地矿局测绘队印刷厂印刷
850×1168mm 32 开本　　11 印张　　265 千字
1995 年 6 月第 1 版　　1995 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—1500 册
ISBN 7—5614—0780—7/O·81　　定价：10.00 元

引　言

微分方程中的变分方法是把微分方程边值问题化为变分问题，以证明解的存在、解的个数及求近似解的方法.

微积分的创立是17世纪数学最伟大的成就. 17世纪后期，数学家们(他们也都是物理学家)在探讨用微积分解决更多的物理问题中发现了一些新的数学问题，如微分方程问题、变分问题等. 历史上第一个变分问题是由牛顿(I. Newton)提出并解决的. 他在巨著《自然哲学的数学原理》(1687年)中研究了在轴向以常速度运动而使运动阻力最小的旋转曲面必须具有的形状. 约翰·伯努利(John Bernoulli)1696年在《教师学报》上提出了著名的最速降线问题，引起了许多数学家的兴趣；牛顿、莱布尼茨(G. W. Leibniz)、约翰·伯努利及他的哥哥詹姆士(James Bernoulli)得到了正确的解答(圆滚线). 因此，约翰·伯努利常被认为是变分法的发明者. 到了18世纪，经欧拉(L. Euler)、拉格朗日(J. L. Lagrange)等人的工作，逐渐形成了一个解决数学物理问题的数学分支学科——变分法.

古典变分法的基本内容是确定泛函的极值及极值点. 在一定条件下，确定泛函的极值点与确定微分方程边值问题的解这两个问题可以互相转化. 也就是说，微分方程边值问题常常可以化为变分问题来研究. 因此，变分方法就成为研究微分方程边值问题的一种基本方法.

本世纪50年代以后，由于电子计算机的发展，基于变分方法发展起来的有限元素法，在物理、力学及工程技术中得到了广泛的应用，已经成为计算数学的一个重要分支学科.

近二十年来，近代变分方法(又称为大范围变分法)得到了重大的发展，并在解决拟线性椭圆方程边值问题中取得了许多有重

要意义的新结果.

本书内容包含两个部分.

第一部分讲述古典变分法的基本理论及解线性微分方程边值问题的重要变分方法，包括里兹法、迦辽金法以及有限元素法的简单介绍. 为了更广泛的读者阅读使用，只假定读者具有数学分析与线性代数的基本知识. 本书要用到的泛函分析方面的准备知识在第二章中作了介绍.

第二部分介绍近代变分法(主要讲临界点理论中的极小极大原理及集中紧性原理)及其在拟线性椭圆方程边值问题解的存在理论中的应用. 由于这一部分是近二十年的最新研究成果，不仅用到线性与非线性泛函分析、偏微分方程及拓扑学等学科的知识，而且还用到最近发表的论文中的一些结果. 因此，在这一部分先用两章介绍有关索伯列夫空间与非线性泛函分析方面的基本知识，并在附录 1 中列出书中要用到的一般测度与积分的知识，在附录 2 中给出 $C(\bar{\Omega})$ 及 $L^p(\Omega)$ 中列紧性定理的证明，在附录 3 及附录 4 中分别介绍有关 Banach 空间有界集的弱紧性及度量空间的仿紧性. 为了使这些准备知识不占太长的篇幅，其中一些定理和结果略去了证明而只指出其参考文献.

第一部分可以作为数学系本科生高年级选修课或理、工科(非数学系)研究生课的教材，也可供理、工科教师及科学技术工作者使用和参考. 全书可以作为数学系有关专业研究生课教材，也可供数学工作者参考.

本书是根据作者 1975 年至 1992 年在四川大学数学系开设选修课及研究生课所编写的讲义和讲稿经过较大的修改和补充写成的. 大部分内容曾在“第四届全国数学物理方法研讨会”(1990 年 7 月)上作过报告. 由于本书是在大量文献资料中选编而成的，没有现成的书可资借鉴，一些证明又是作者给出的；因此疏漏和错误在所难免，真诚地欢迎读者批评指正.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分

古典变分理论
与
线性微分方程边值问题

目　　录

DY 90/10

第一章　变分问题与 Poisson 方程边值问题

本章以弹性薄膜在外力作用下的变形作为例子，介绍什么是变分问题；证明在一定条件下，这一变分问题与相应的微分方程边值问题是等价的.

1.1　变分问题的例子

弹性体受外力作用发生变形，变形中克服内力（弹性体各质点间的约束内力）所作的功，作为能量贮存在弹性体内部，称为弹性势能或变形能. 在除去外力而弹性体恢复原来形状时，变形能就采取对外界作功的方式表现出来. 弹性力学中的最小势能原理指出：弹性体在外力作用下，在适合已知条件的一切位移中，使弹性体处于平衡状态的位移使总势能

$$E = \text{变形能} - \text{外力所作的功}$$

为最小.

例如，我们研究平面上边界固定的均匀薄膜（不计自重）受外力作用后的平衡位移. 实验证明，弹性薄膜的变形能与薄膜面积的增加成正比，这个比例常数叫做薄膜的张力. 设薄膜所在平面区域为 Ω，边界为 $\partial\Omega$. 在外力作用下，薄膜在点 $(x,y)\in\Omega$ 处的位移以 $u(x,y)$ 表示，则薄膜的变形能为

$$T\Big(\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-|\Omega|\Big), \tag{1.1.1}$$

其中 T 为薄膜的张力，$|\Omega|$ 为区域 Ω 的面积. 因为弹性变形为小变形，当 $u_x^2+u_y^2$ 充分小时，利用近似公式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{\varepsilon}{2},$$

变形能(1.1.1) 可以改写成

$$\frac{T}{2}\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.1.2}$$

再设薄膜在单位面积上所受的力为 $f(x,y)$，则此外力所作的功为

$$\iint_{\Omega}f(x,y)u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是薄膜的总势能为

$$E(u)=\frac{T}{2}\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Omega}fu\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1.1.3}$$

它是函数 $u(x,y)$ 的函数，称为泛函. 由于薄膜的边界是固定的，所以有边界条件

$$u=0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{1.1.4}$$

最小势能原理说明，薄膜受外力 $f(x,y)$ 作用后，在满足边界条件(1.1.4) 的函数类中，使总势能(1.1.3) 取最小值的位移 $u(x,y)$ 就是薄膜达到平衡位置时的位移.

对泛函求极值的问题叫做**变分问题**，使泛函取极值的函数叫做变分问题的**极值函数**或**极值点**. 专门研究变分问题的学科叫做**变分法**.

我们将在第3节中看到：在满足边界条件(1.1.4) 的一个函数类中，使泛函(1.1.3) 取极小值的函数就是Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\triangle u=\dfrac{f}{T} & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0 & 在\ \partial\Omega\ 上\end{cases} \tag{1.1.5}$$

的解；反之，边值问题(1.1.5) 的解也就是变分问题

$$E(u) = \frac{T}{2}\iint_{\Omega}(u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fu\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \min \tag{1.1.6}$$

的解．也就是说，在一定意义下，边值问题(1.1.5)与变分问题(1.1.6)、(1.1.4)是等价的．

1.2 定义与记号

今后将不加声明地使用下列的记号和定义．

以$\{u_1,\cdots,u_n\}$表示n个元素u_1、…、u_n的集合，而以$\{u_k\}$表示由可数个元素u_1、u_2、…组成的序列．符号Λ表示空集．以$\{x|P\}$表示具有性质P的所有元素x的集合．两个集合A与B的差

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

常以$A\backslash B$表示．

以R^n表示所有n维点$x=(x_1,\cdots,x_n)$的集合，叫做n维向量空间，$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$为点$x$的范数(长度)，$x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$为两点$x$与$y$的内积．$R^1 = R$．

R^n中的一个连通开集Ω叫做R^n中的一个区域，$\partial\Omega$表示Ω的边界，$\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$表示$\Omega$在$R^n$中的闭包，$|\Omega|$表示$\Omega$的体积．如果$D$也是一个区域，且$\bar{D}$是$\Omega$的紧子集(有界闭子集)，则记为$D\subset\subset\Omega$．

$B_r(y) = \{x \in \Omega \,|\, |x-y| < r\}$表示中心在$y$、半径为$r$的开球．

对函数$u(x) = u(x_1,\cdots,x_n)$，记$D_iu = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，$D_{ij}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$，$Du = \nabla u = (D_1u,\cdots,D_nu)$为$u$的梯度，$Du \cdot Dv = D_1uD_1v + \cdots + D_nuD_nv$，$|Du| = (|D_1u|^2 + \cdots + |D_nu|^2)^{\frac{1}{2}}$，$\triangle u = D_{11}u + \cdots + D_{nn}u$，$\triangle$称为($n$维)Laplace算子．

非负整数组$\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$又叫做重指标，并记$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$表示一个$|\alpha|$阶的微分算子．

对定义在区域Ω内的函数，集合

$$\operatorname{supp}u = \{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\} \text{ 的闭包}$$

称为 u 的支集. 如果 $\operatorname{supp}u \subset\subset \Omega$,则称 u 在 Ω 中有紧支集.

设 m 为非负整数,我们常用到下面一些由连续函数组成的集合(也叫做函数空间).

$$C^m(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 内连续 } \forall\ |\alpha| \leqslant m\}.$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 内连续 } \forall\ \alpha\}.$$

$$C_0^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \mid u \text{ 在 } \Omega \text{ 中有紧支集}\}.$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid u \text{ 在 } \Omega \text{ 中有紧支集}\}.$$

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{u \mid D^\alpha u \text{ 在 } \overline{\Omega} \text{ 上连续 } \forall\ |\alpha| \leqslant m\}.$$

以后如果没有特别说明,都假定 Ω 是 R^n 中的有界区域,并简记 $C(\Omega) = C^0(\Omega), C_0(\Omega) = C_0^0(\Omega), C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$.

1.3 Poisson 方程边值问题与变分问题

本节证明 Poisson 方程 Djrichlet 问题

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x) & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (1.3.1) \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \quad (1.3.2) \end{cases}$$

等价于一个变分问题. 为此,我们先证明下面的引理.

变分法基本引理 如果函数 $u \in C^0(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.3.3}$$

则在 Ω 中 $u \equiv 0$.

证 用反证法. 假定存在 $x_0 \in \Omega$ 使 $u(x_0) \neq 0$, 不妨假定 $u(x_0) > 0$. 由函数 $u(x)$ 的连续性,存在 x_0 的邻域 $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$,使得 $u(x) > 0\ \forall\ x \in B_\varepsilon(x_0)$.

对于函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\{\dfrac{|x - x_0|^2}{|x - x_0|^2 - \varepsilon^2}\} & \text{当 } x \in B_\varepsilon(x_0), \\ 0 & \text{当 } x \in \Omega \backslash B_\varepsilon(x_0), \end{cases}$$

容易验证

$$\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega), \varphi(x) > 0 \quad \forall\, x \in B_\varepsilon(x_0).$$

于是有

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x > 0.$$

此式与假设 u 满足条件(1.3.3)矛盾.

采用记号

$$B_0^2 = \{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \mid v = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\},$$

$$I(v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Dv|^2 - fv\right)\mathrm{d}x. \tag{1.3.4}$$

下面的定理说明,求边值问题(1.3.1)、(1.3.2)在 B_0^2 中的解等价于在 B_0^2 中求泛函(1.3.4)的极值函数.

定理 1.3.1 设 Ω 具有 C^1 边界 $\partial\Omega$, $f \in C^0(\Omega)$, $u \in B_0^2$. 那么, u 是 Poisson 方程(1.3.1)的解的充要条件是:u 是变分问题

$$I(u) = \min_{v \in B_0^2} I(v) \tag{1.3.5}$$

的解.

证 先证明条件是必要的. 设 $u \in B_0^2$ 是 Poisson 方程(1.3.1)的解. 在奥式公式(Euler 定理)

$$\int_\Omega (D_1 w_1 + \cdots + D_n w_n)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} [w_1\cos(\nu, x_1) + \cdots + w_n\cos(\nu, x_n)]\mathrm{d}s \tag{1.3.6}$$

(其中 ν 为外法向单位向量)中取

$$(w_1, \cdots, w_n) = (vD_1u, \cdots, vD_nu) = vDu,$$

得出格林(Green)公式

$$\int_\Omega v\triangle u\mathrm{d}x + \int_\Omega Dv \cdot Du\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}s. \tag{1.3.7}$$

由于 $-\triangle u = f$,由上式得出:对任意 $v \in B_0^2$ 有

$$\int_\Omega (Du \cdot Dv - fv)\mathrm{d}x = 0. \tag{1.3.8}$$

由(1.3.4)及(1.3.8)有

$$\begin{aligned}I(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega fv\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega Du \cdot Dv\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv - Du|^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2\mathrm{d}x. \qquad (1.3.9)\end{aligned}$$

由此知

$$I(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2\mathrm{d}x \leqslant I(v) \quad \forall\, v \in B_0^2.$$

此式表明 u 是变分问题(1.3.5)的解.

再证明条件是充分的. 设 $u \in B_0^2$ 是变分问题(1.3.5)的解. 任取函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，于是对任意参数 $t \in R$ 有 $u + t\varphi \in B_0^2$. 由(1.3.5)知道

$$I(u) = \min_{t\in R} I(u + t\varphi).$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(u + t\varphi)\big|_{t=0} = 0. \qquad (1.3.10)$$

由 I 的定义(1.3.4)有

$$\begin{aligned}I(u + t\varphi) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|Du + tD\varphi|^2 - f(u + t\varphi)\right]\mathrm{d}x \\ &= I(u) + t\int_\Omega (Du \cdot D\varphi - f\varphi)\mathrm{d}x + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |D\varphi|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将此式代入(1.3.10)得出

$$\int_\Omega (Du \cdot D\varphi - f\varphi)\mathrm{d}x = 0. \qquad (1.3.11)$$

在格林公式(1.3.7)中命 $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 得出

$$\int_\Omega \varphi \triangle u\mathrm{d}x + \int_\Omega D\varphi \cdot Du\mathrm{d}x = 0. \qquad (1.3.12)$$

由(1.3.12)减去(1.3.11)得

$$\int_\Omega \varphi(\triangle u + f)\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 是任意的，对上式利用变分法基本引理知道 $\triangle u + f \equiv 0$，即 u 满足 Poisson 方程(1.3.1). 证完.

从变分问题出发导出的微分方程称为该变分问题的欧拉(Euler)方程. 因此，Poisson 方程(1.3.1)是变分问题(1.3.5)的欧拉方程.

上面的定理说明，在函数类 B_0^2 中，求 Poisson 方程(1.3.1)的解与求变分问题(1.3.5)的解是等价的；也就是说，对 Poisson 方程边值问题(1.3.1)、(1.3.2)的研究可以化为对变分问题(1.3.5)的研究. 通过变分问题的研究解决微分方程边值问题，这就是微分方程中的变分方法.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com