油田应用数学

第一卷

曾慕蠡等 编著

石油大学出版社

油 田 应 用 数 学

第 一 卷

单元函数微积分学

曾慕蠡
禄厚筠
编著

石 油 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是《油田应用数学》的第一卷。它的主要内容有：（1）微积分学的基础概念；（2）单元函数的微分学和积分学；（3）无穷级数理论。本卷在论述方式上特别注意于讲清思路。

本卷在内容编排上注意了使其具有伸缩性。

本卷可供油田科技人员进修用，也可用做石油院校的教材或教学参考书。

油 田 应 用 数 学

第一卷

曾攜鑫 禄厚铸 编著

*

石 油 大 学 出 版 社 出 版

山东省 东营市

大庆石油学院印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张 30.25 字数 698千字

1989年10月第一版 1989年10月第一次印刷

印数 1—3000 册

ISBN7-5636-0063-9/O₁·01

定价 5.91 元

序

随着现代科学技术的迅猛发展和新兴技术不断涌现，曾慕蠡教授等编著的《油田应用数学》一书，又为油田科技发展增添了一项新的成果。作者在多年的教学和科研工作中，运用理论和实际相结合的原则，不断探索数学在油田生产建设中的应用。他在本书中比较系统地阐述了石油勘探、油田开发以及生产管理等多方面所需的数学知识，这对于广大科技人员和生产管理人员掌握应用数学知识，提高技术素质，将有很大的促进作用。这部书，也可以作为油田进行技术干部培训的教材，同时还可作为石油院校的教材或教学参考书。《油田应用数学》一书的出版，对于在油田广泛应用数学方法解决技术问题将起着一定的推动作用。

当前各油田正处在全面技术改造的新阶段，有很多技术问题需要我们去解决。希望油田广大科技人员，勇于探索，敢于攀登，积极投身到新技术攻关中去。希望有更多的专家、教授著书立说，为油田科技事业的发展贡献力量。

李虞庚

一九八九年三月

编 者 的 话

近年来科学技术在应用电子计算机后，迫切要求科技人员掌握更深入的数学知识和受到更严格的科学思维训练。这种迫切情况也对石油院校提出了新的要求，要求培养出在数学方面具有更高质量的人才，以适应这种需要。在这种情况下，我们编写了这部《油田应用数学》，供科技人员进修和提高用，也供石油院校教学参考用。

本书包括必需的基础理论，即微积分、微分方程和线性代数，也包括更高一层的理论，即基础泛函分析和变分法以及积分方程；此外就是数值分析、统计数学、最优化方法等理论内容，这些是应用数学中较基本和较常用的部分。作为本书的一个特点，它也包括油田各方面的重要数学问题。

我们总结多年的教学经验，深感目前的数学教材常有一种倾向，即它的严谨的理论体系掩盖住了高等数学中建立数学模型的生动活泼过程。这使学生在学完高等数学课程后，常不能灵活地运用所学到的知识去建立数学模型。因此，本书在论述问题时，不以“着重讲理论体系、方法和传授知识”为原则，不着意追求形式上的完整性，而着重讲“数学思想的逐步发展”，讲思路，使学生不仅掌握知识，同时还受到科学思维训练。因此，本书致力于引导读者从数量分析方面去观察问题、提出问题、分析问题、解决问题，从对实际问题作数量分析中逐步形成数学概念、方法等，再回到实际中去，而不是仅以例题去说明问题。我们希望学者除掌握知识外，并能借此培养出对事物作数量分析从而解决问题的能力，以及进一步自学和阅读文献的能力。

数学科学中的抽象性和逻辑论证，是相应于数量关系和空间形式的内在规律性的。为了不致流于形式地处理它们，本书努力把它们作为“去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里”的理性思维来看待，它们同样是对问题作数量分析的过程，它们是数学中不可或缺的主要的科学思维环节。在论述中本书注意了逐步提出问题，引导读者逐步思考问题。理论上更深入的部分，一般作为补充性段落置于相应章节的后面。

相应于“数学思想逐步发展”的原则，我们在文字叙述方面采取了提出问题和分析问题的方式。这样，各卷的篇幅会稍大些，但这便于学者自学，能较好地启迪他们的思路。当本书各卷用做教材时，教师可精选课堂讲授内容，而把其它内容作为自学或课余学习材料，因而也可不导致超出教学时数。学者初学时，常因书的篇幅大些而感受到压力；但这正是学者缺乏自学能力和反复思考的习惯的表现，而这种能力和习惯也正是有待于予以大力培养的。

油田数学问题部分主要是油田科技人员（少部分是参与油田科技工作的其它同志）所作的科研工作成果，是较为成型的、或多或少地为油田所采用的一些数学模型，本书把它们编写成教材形式，以便于油田科技人员参考应用。这部分材料是这样来处理的：较简单的问题或编入本书正文中作为例题或习题，或编入各章附录中作参考用；较系统

的方法则作为正式内容，编写成最后两卷，供参考。

为便于读者起见，本书各卷保持了相对的独立性，使具有一定基础知识的读者可按需要选学其中的任一卷。这样，各卷的内容会有些交错。本书的第六卷和第七卷属提高性质，供要求更高的读者学习用。

本书一般是在参考了许多书籍、讲义、资料之后，在以上所述的一些观点和原则之下编写出来的。微积分部分主要参考了B.N.斯米尔诺夫的《高等数学教程》第一卷和第二卷；其它则列举于各部分之后的参考书目中。

这部《油田应用数学》是一种尝试。由于编写者们的水平有限，错误和不妥之处自然会不少，希望同志们批评指正，以便日后加以修改。

编　者

一九八九年三月

《油田应用数学》总目录

单元函数微积分学

目　　录

第一章　微积分学的对象和方法

（1）第一章论述微积分学的对象和方法时，不是通过一些例子说明函数、极限、连续性等概念，而主要是抓住非均匀变化过程同均匀变化过程的对立统一关系，从对这一关系的分析中逐步提出解决非均匀变化问题的极限过程、微分过程和积分过程，逐步形成函数、极限和连续性等概念，逐步揭示出微分和积分的内部联系。这样，从一开始就揭出全书论述的主要对象，使全书的论述有一高屋建瓴之势。

在上述考虑下，在具体内容方面，在第一节安排了一段专用以讨论均匀变化和非均匀变化问题，最后则增加了一节用以讨论微积分问题。通过这种安排和其它各段的分析，希望能明确揭示出微积分论述的主要问题，即微分和积分的内部联系，并克服通常论述中微分概念的实际来源不清晰这一缺点。

（2）在形成函数概念时，本书采用了较现代的观点，即所谓函数指的是单值对应本身，以期对现代数学观点有所反映。

（3）每当提出新问题和新方法之前，一般都从实例出发进行分析，并尽可能在较直观的基础上先予以解决。目的是通过这种实例使学者对新问题新方法有一感性认识。这样做会引起一些困难，但本书已注意使论述不超出学者能接受的范围。

（4）为了便于引导学者思考问题，一般在正文中着重分析一些典型例子，其中曲边三角形的面积和自由落体下落路程两问题的分析，是结合微积分方法的形成，逐步深入的。解题技巧性内容，一般安排在另外一段中，或安排在习题中，并且在习题中也安排了一些例题，作了一些提示，以便学者自学。

十六世纪末叶到十七世纪，由于生产和技术上的需要，由于机械工业的诞生和成长，航海、造船、采矿等事业的蓬勃发展，提出了力学方面的许多新问题（例如运动速度等问题）．对这些问题以及相结合着对几何的一些问题（例如曲线的切线、较古老的图形的面积等问题），大量地进行逐个解决的过程中，人们逐渐认识到了解决这些问题的方法的共同点以及彼此的关系，微积分或数学分析才开始创立起来．它是在生产实践的基础上逐渐了解自然的现象、自然的性质、自然的规律性的产物；它不是先验地即不是不利用外部世界给我们提示的经验而从头脑中构思出来的．

§1．运动、变量和函数

自然界中没有什么事物是不包含矛盾的，一切事物由于内部矛盾的存在，总是处于不停的变化或者说运动过程中．我们的任务在于了解客观事物的内部矛盾，了解它的规律性，运用它来改造世界．各种运动形式，譬如机械的、电的、热的……，虽然性质是千差万别的，但是都表现为一定的数量的变化．任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量．对于自然规律，我们需要从数量上掌握它，就是说，要做数量分析，或者

说，要做定量分析．下面以原油沿管线正常运行，即作匀速运动的情形为例，从数量上来分析它的运动规律．

原油在管线中的运动表现为原油的位置随时间而变化．将管线画成直线形状，并在这条直线上选定一正方向和一个始点O（图1—1）．考虑一确定部分的原油．它的位置可以用它离开始点O的路程 s（可≥ 0，也可<0）来确定．时间也可以由选定的一个时刻开始算起．现在已知输油管线中的原油平均地以匀速$v=1.3$（米／秒）离开泵站．于是从开始（$t=0$）到时刻t时，所考虑的那一部分原油所经过的路程是vt．假定$t=0$时这一部分原油离开始点O的路程是s_0．这样，在时刻t时，这部分原油离开始点O的路程是

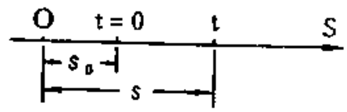

图 1—1

$$s=s_0+vt,$$

这就是从数量上表现出来的原油运行的规律，叫运动方程．按照这个方程可以确定，在给定时刻原油到达了什么地点，或原油到达目的地需经过多少时间．

在这里我们看到，要表现运动规律，就遇到变化着的量．时间t、路程s等都是变化着的量，即可以取不同数值的量，或所谓的变量．不仅如此，我们还看到，事物的运动规律是通过变量之间的关系表现出来的，而这种关系确定着变量之间的数值对应关系，即从变量t的每一个数值，可以相应确定变量s的唯一的一个值．由于s的值是随t的值而确定的，人们通过变量t就可把握住变量s，又由于s的值是唯一的，人们就可对它进行确定的必需的运算和处理，从而用以指导实践．事物的运动规律通过这种数量关系表达出来，可更确切地起指导实践的作用．在运动过程中变量之间的这种关系就是所谓的函数关系。变量和函数关系是新的数学对象，它们和初等数学中主要研究的对象不同．在初等数学中，人们研究数的运算，解方程的根，这些都是不变化的量，叫做常量．关于常量的数学主要反映相对静止的现象．客观世界是充满着矛盾和运动变化的，这就要求数学不要停止在一个水平上，要从研究常量发展到研究变量，研究表现运动规律的函数关系，这就是微积分学或数学分析的任务．数学分析是关于变量的数学理论．

下面首先讨论变量概念．

1． 变量

(i) 变量概念　所谓变量就是在一运动过程中可以取不同值的那一种量。在给定过程的不同时刻，一般说来，它有不同的值．运动形式的千差万别，在量的变化上表现出来，就是变量的性态是多种多样的：有些量连续递增或连续递减，另一些则振动式地变化，时而递增，时而递减（例如，地球与太阳的距离，单摆离铅直位置的偏差等）如果一个已知量连续递增，那么它又可以递增得很快，也可以递增得很慢，或者它的递增速度可以时而大，时而小．我们的任务就在于系统地研究变量的这些类型的特点，找出各种变化所遵循的共同规律，以此指导实践．

在数学中引进变量，是一件极为重大的事件．数学不仅论述了常量间的数量关系，而且如上所述，从此有可能来研究事物的变化过程．恩格斯曾用如下的话来强调这一

点："有了变量，运动进入了数学，有了变量，辩证法进入了数学，有了变量：微分和积分也就立刻成为必要的了……。"

（ii）变量的变化域 无论是常量或变量的值，在选定测量单位后，总可以用数来表达。在数学中通常抽去所考虑的量的物理意义，而仅研究它们的数值。这样，数学理论就可以广泛地用来研究任何具体的量。因此，在数学分析中不说到它的应用时，我们总把变量理解做"抽象的"或"数的"变量。我们用符号，例如字母x等，来表示变量，因而这个符号可以取许多数值。在变量x所取的数值范围已经指出时，变量x就算做是给定了，而这个数值范围就叫做所给变量x的变化域。

常量可以看做是变量的一个特殊情形，它的变化域仅由一个数值构成。

我们知道，数可以几何地解释做数轴上的点。在直线上取定原点，并记做O；又取定长度单位。于是对任一个数a我们可以用这样一个点来表示它，即由O到这个点的距离和方向是由a来确定的。变量x的变化域在这个数轴上就表示成某一个点的集合。由于这个缘故，变量x的数值通常也叫做"点"。

有如我们在表达式$n!$中所看到的，有一种变量n，它取所有可能的非负整数值：

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,100,\ 101,\ \cdots\cdots.$$

这种变量n的变化域就是自然数集。但通常在数学分析中所研究的是这样的一种变量x，它有如通常所说的"连续地"或"连绵地"变化，就是说，它在变化时会通过一切中间值。物理量，如前面所述的时间和原油所经过的路程等，就是这种变量的原形。作为这种变量的变化域通常是由于两个实数a和b（$a<b$）所限定的有限"区间"，而a和b（区间的两个端点）本身可以包含在这个区间内，也可以不包含在其内。依此我们可以将变量x的变化域区分为

闭区间$[a,\ b]$：$a\leq x\leq b$（两端点包括在内）；

开区间$(a,\ b)$：$a<x<b$（两端点不包括内）；

由不等式$a<x\leq b$，或$a\leq x<b$所确定的仅包含一个端点的半开区间，分别记做$(a,\ b]$和$[a,\ b)$。

易于理解，区间在数轴上一般表示成一个线段，而线段的端点包含或不包含在线段内，依区间的类型来定。在$a=b$时闭区间仅包含一点a。一般说来，我们所考虑的是$a<b$的情形。

在所有这些情形里，数$b-a$都叫做区间的长度。

变量x的变化域也可以是由不等式$a\leq x$（或不等式$a\leqslant x<+\infty$）所确定的并记做$[a,\ +\infty)$的无穷区间，这个区间在左端是闭的，但在右端是开的。同样，x的变化域由不等式$x\leqslant b$（或不等式$-\infty<x\leqslant b$）确定时，我们把这个区间记做$(-\infty,\ b]$，这个区间在左端是开的，而在右端是闭的。如果x可取任意的实数值，x的变化域就是区间$(-\infty,\ +\infty)$，这个区间的两端都是开的。当然，x的变化域也可以是由$a<x$或$x<b$这一类不等式所确定的两端都是开的无穷区间，这分别记为$(a,\ +\infty)$和$(-\infty,\ b)$。

显然，无穷区间在数轴上将表示成一半线或者整个数轴本身。注意，$+\infty$和$-\infty$仅是一种"广义数"，它们同实数之间不能象通常那样去进行运算，但可以有大小关系：对任一实数x有$-\infty<x<+\infty$。

2. 函数关系

(i) 函数概念　在上面我们已知，原油在匀速运行中，它的运动规律可以由关系式

$$s = s_0 + vt$$

表达出来，这个关系式给出了路程s对于时间t的数值对应关系，即对于t的每一个值，按照这个关系，可以确定s的唯一的一个值。又例如，圆半径r变化时，圆面积A和半径r是按照公式

$$A = \pi r^2$$

密切地相关着的；密闭在一个容器里的气体（例如，汽缸内处于冲程中的气体）的状态变化过程中，压强p、绝对温度T和体积V有密切的关系，即

$$p = \frac{CT}{V},$$

在这里的每一个例子中，变量间的关系，都确定着它们之间的数值对应关系。在第一个例子中，知道了圆半径的值就可以唯一地确定圆面积A的值；在第二个例子中，知道了绝对温度T和体积V的值，压强p的值也就唯一地确定了下来。

在原油作匀速运动和圆面积问题中，路程s和圆面积A都分别只和一个变量有关，s只和时间t有关，A只和半径r有关。t和r的每一个值都分别确定着s和A的唯一的一个值，并且t和r的任何变化，都分别引起s和A的一定的变化。在密闭在一个容器里的气体的状态变化中，情形就比较复杂一点。要知道变量p的值，仅知道T的值或者仅知道V的值都是不够的，变量p依赖于T、V这两个量的值，必须同时知道T、V这两个量的值，才能确定变量p的相应的值，并且变量p的变化依赖于T、V这两个变量的变化。至于T与V这两个量本身，它们的值与它们的变化是彼此无关的。在物理上，这就等于说，当气体的质量给定之后，我们还可以使它有任意的（在已知限度之内）体积V和任意的（也在已知限度之内）绝对温度T。但是V和T的值一经选定之后，质量一定的气体的压强p就已经不能再由我们任意指定，而唯一地为所给的关系所确定了（这里我们没有考虑，这个公式本身对于实际的气体来说，还需加以修正）。

从这些例子我们可以作出如下的概括：

设在某一过程中所出现的一个变量y和出现于这同一过程中某些变量x_1，x_2…，x_n有这样的关系，使得对于变量x_1，x_2，…，x_n的每一组值，都对应着变量y的唯一的一个值，至于这些变量x_1，x_2，…，x_n本身则彼此无关，即其中若干个取定了值以后，其余的还可以任意取定它们自己的值（通常在一确定的范围内）。变量x_1，x_2，…，x_n和变量y的这种关系叫做关于y的函数关系，由这种关系确定的变量x_1，x_2，…，x_n到变量y的单值对应叫做**函数**(Function)，$x, x, \cdots, x_n$都叫做**自变量**，而变量y叫做**因变量**。n=1时的函数叫做**单变量函数**或**单元函数**；否则，它就叫做**多变量的函数**或**多元函数**。

回到上面的例子，按照这个定义，变量s和变量t的关系，变量A和变量r的关系，变量p和变量T与V的关系都是函数关系，这些函数关系所确定的对应都是函数。

函数概念也可以推广一下。假定对于x_1，x_2，…，x_n的每一组确定的值，对应着不是一个而是若干个（甚至无穷个）y的值，在这种情形下的对应，为着和上述的“单值”函数相区别起见，叫做“多值”函数。可以考虑这样一个例子：给定三角形的两个

边a、b和面积S，我们应用公式

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

来求两边的夹角C。在这里，存在于a、b、S和C之间的是一关于C的多值函数关系。但是在数学分析中，通常多值函数总要化为单值函数来考虑的。今后说到函数时，假如没有另外的声明，那么指的就是单值函数。

存在于自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和变量 y 之间的函数，通常我们用字母 f（或F、φ等）来表示，并以 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取定一组值后y的相应的值：$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。有时，为了简便起见，人们就以 y 本身来表示这个函数f，因而可写成 $y=y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。例如，就上面所提到的几个例子来说，我们可以写成 $A=f(r)$，$A=F(r)$，$A=A(r)$，和 $p=f(V,T)$，$p=F(V,T)$ $p=p(V,T)$，等等。$y=f(x)$ 这个等式，在不同情形下，可以代表不同的函数关系：例如，它可以代表 $y=3x^2$，$y=\lg_a x$，也可以代表 $y=\sin x$ 等。重要的是：为了避免混乱起见，在同一论证过程中，不能用同一字母来表示不同的函数。例如，在某个过程中 $y=x^2$，$z=x^3$，这时决不允许同时写成 $y=f(x)$ 和 $z=f(x)$。

在 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中给自变量 $x_1, x_2, \cdots, x$ 以一组特定值 $x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}$ 时，我们自然将y的相应的特定值表示成 $f(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$。例如，当

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ g(t)=\frac{10}{t},\ h(u)=\sqrt{1-u^2}$$

时，f（1）表示函数在x=1时的函数值，即

$$f(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2},$$

类似地，$g(5)=2$，$h\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$，

有时我们也采用记号 $f(x)\Big|_{x=x_0}$ 以表示函数 f 的相应的特定值。这样，在 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 时，就有

$$f(x)\Big|_{x=1}=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}.$$

（ii）函数的定义域和值域　我们现在就单元函数 $y=f(x)$ 的自变量x来考虑它的变化域。自变量x可以取哪些值呢？这要根据变量x与y的实际意义或根据我们所考虑问题的内容来确定。例如，假定y代表内接于半径为1的圆的正x边形的面积，那么，y和x之间有一函数关系，而且由这些变量的几何意义，变量x的值只能是一些正整数3，4，5……。仿此，$n!$ 和n之间也是一个函数关系，它只在n是非负整数时才有意义*。函数 $y=\lg_a x$ 通常也只对于x的正数值才有意义。如果把一个物体的绝对温度T当做自变量（用摄氏度

---

*注意，$0!=1$，

数表示它），则我们在任何问题中都不需要研究比－273更小的T的值．相反地，就纯数学地给出的函数$y=x^3$或$y=\sin x$ 来说，对于变量x的任意一个值，变量y都可以合理地取定一个值；而且有很多问题，要解决它们，必须对于变量x的任意值，都能实际上确定出相应的函数值．

上述这些例子说明了，自变量x的变化域完全由所讨论的问题来决定．有时根据实际的考虑来确定它，有时根据纯数学的考虑来确定它，不过不管怎样，只要我们研究一个函数$y=f(x)$，我们就应当分析清楚，使函数值随之确定的自变量的变化域，并且在可能发生疑问的地方，清楚地把这个变化域指出来．当x不在这个变化域中取值时，函数f就不取任何值，因而算作函数f在那里是没有定义的．也就因此，这个变化域叫做所给函数f的定义域．

与此同时，由自变量x在y的定义域里任意取值，所确定的函数值$f(x)$全体就叫做函数f的值域．

函数的定义隐含着函数的定义域在内．就单元函数来说，在它的定义里，现在可以更明确地指出它的定义域：

如果对于变量x的变化域X的每一个值，都对应着变量y的一个唯一确定的值，我们就说，对应f是定义在x的变化域X内的函数．

如果这里的变量y的变化域是Y，则函数f将X中的每一点x变为Y中唯一的一个点y，它确定了一个X到Y内的映射或变换．映射概念同函数概念几乎是同一个东西．

函数概念的形成是经历了一个历史发展过程的．时至今日，函数概念已推广成为可对任意对象所构成的集而言，即是说，函数的定义域和值域可以是任意的集．当然，在我们所涉及的范围内，我们主要是在实数集、复数集或更广泛一些的集来考虑函数关系的。

3．函数的表示法

（Ⅰ）公式法 在函数概念里，除定义域外，因变量y和自变量x之间的对应关系是另一个有实质意义的东西．

怎样从x的数值出发，按照所给的对应关系，表达出所对应的y的数值来，以便我们分析研究函数的变化过程，论证它们的变化规律呢？这个函数表示方法问题是一个重要问题．当然，相对于函数概念的实质内容来说，这还是一个比较次要的技术性问题，从所考虑过的实际问题来看，经常用来表达函数的方法，是在函数的定义域里直接指出，要对变量x和其它有关常量施行哪些运算，以及按怎样的次序施行这些运算，来得出变量y的对应值．作为这种方法的例子，可以举出简单的公式或解析表达式，例如$s=s_0+vt$，$y=3x^2$，$y=\dfrac{1}{1+x^4}$，等等．利用这些公式可以很容易地从变量x的任意值算出变量y的相应的值来．这种方法还可以拿公式

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$$

为例，它对于所有非负整数n都确定了函数的值n!．

纯数学地用公式来确定函数的定义域，总是按照这个公式本身来确定的：它的定义

域包含使表达式保持有意义的x的一切值，即使表达式取实数值的x的一切值，例如，就函数f：

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

来说，为了使表达式$\sqrt{1-x^2}$有意义，必须使$1-x^2\geqslant0$因此，应有$x^2\leqslant1$，或$|x|\leqslant1$，即$-1\leqslant x\leqslant1$．所以函数f的定义域是闭区间$[-1，1]$。类似地，函数g：$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1，1)$，函数h：$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$的定义域是区间$(-\infty，-1]$和$[1，+\infty)$。

读者试思考一下，$y_1=\ln x^2$同$y_2=2\ln x$是否为同一函数。

我们注意，要应用简单的公式或解析表达式来表达实际问题中的函数关系，有时是不可能，有时会碰到各种困难，需要形成新的数学方法来达到目的。就匀速运动来说，根据物理事实，我们运用初等数学方法，就能找到表现运动规律的公式，即$s=s_0+vt$。但就自由落体运动来说，根据物理事实，它的重力加速度是一个常量$g=9.8$米／秒^2，因而很易于知道落体的速度$v=gt$，但落体下落路程s是怎样由所经过的时间t来确定的呢？这不是匀速运动情形，不能用匀速运动情形下的公式来计算下落路程s，这里需要新的数学方法，即在数学分析中要形成的微积分方法。后面可以看到，应用这种方法，可以得到自由落体运动的运动方程

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

当一个函数f的值$f(x)$是由一个表达式来表示时，为简便计，我们有时也就用这个表达式来表达函数f本身。例如，我们有时以$3x^2$表示函数$y=3x^2$。不仅如此，在一般情形，有时表达函数值的记号$f(x)$也用来表示函数f本身。

在用公式表达函数关系时，所用到的表式达也可以不止一个。我们来看下一例子。

例1　当温度t由-10℃变至10℃时，1克重的冰或水所增加的热量Q如何随温度变化？

当温度t在-10℃至10℃这个范围内变化时，热量Q难以用一个公式表出，我们可以分段来研究它。冰的热容量为0.5，水的热容量为1，而冰从零度转化为零度的水时需要吸收80卡的热量。所以，当t在区间$-10\leqslant t\leqslant0$内时，热量Q可由公式

$$Q=0.5[t-(-10)]=0.5t+5$$

来表示；当t在区间$0<t\leqslant10$内时，Q可由公式

$$Q=0.5\times10+80+1\cdot t=t+85$$

来表示，综合起来，就得到如下的Q和t之间的关系：*

$$Q=\begin{cases}0.5t+5(-10\leq t\leqslant0),\\ t+85(0<t\leqslant10).\end{cases}$$

* 当冰块处于融解过程中，温度保持为0℃，即$t=0$，但它所吸收的热量由5卡变至85卡。由于我们要求函数对应关系是单值的，我们在这里取定了$Q|_{t=0}=5$ 如果我们取定$Q|_{t=0}$为其它值，这也是可以的。