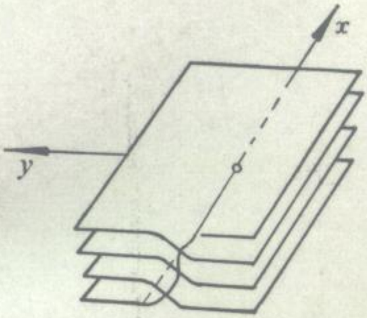
任福尧　编著



大学应用数学丛书

应用复分析

复旦大学出版社

大学应用数学丛书

应用复分析

任福尧 编著

复旦大学出版社

（沪）新登字 202 号

责任编辑 范仁梅
责任校对 张利勇

[illegible]分析
任福[illegible]编著
复旦大学出版社出版
（上海国权路579号）
新华书店上海发行所发行 江苏东台印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 353,000
1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—4,500
ISBN7-309-01278-X/O·130
定价：12.00元

内 容 简 介

本书既系统地讲述了复变函数的基本理论和方法，又有重点地讲述了复分析的一些应用。主要内容有解析函数、柯西积分公式、留数定理及其应用、共形映照及其一些应用、整函数与亚纯函数、拉普拉斯变换和 Z-变换及其应用。各章都配有大量的应用性习题。

本书主要以综合性大学、理工科大学和师范大学的应用数学专业、控制论专业、运筹学专业、应用力学专业、计算数学和数学专业等高年级大学生为主要读者，也可供教师和从事科学研究的工程技术人员参考。

出版者的话

近年来，随着我国现代化建设事业的发展，许多高等学校创办了一大批重视数学理论和应用的专业和系科。如应用数学、应用力学、计算数学、控制科学、信息科学、系统科学、运筹学、统计学、计算机科学、应用物理、管理科学等。为了满足这类专业数学教学的需要，我们组织编写和出版了一套“大学应用数学丛书”。本书即为这套丛书中的一本。

“大学应用数学丛书”重视现代数学的基本理论，强调数学的实际应用，反映现代科技的先进成果，并便于课堂教学和自学。我们希望，这套丛书的出版将有助于我国应用数学教学与研究的展开，促进数学更好地为国民经济和现代化建设服务。

在组织编写这套丛书的过程中，我们曾得到陈开明、陈有根、柳兆荣、徐公权等同志的热情帮助，在此特表谢忱。

复旦大学出版社

1987年1月

序　言

本书是在本人过去编写并讲授过多次的《管路传输中的数学方法》（1974 年）、《复变函数方法及其应用》（1983 年）和《应用复分析》（1988 年）的基础上撰写而成的。

本书系统地讲述了复变函数的基本理论和方法，又有重点地讲述了复分析在流体管路传输、稳定性准则、迪利希莱等边值问题和计算积分等方面的应用。本书所遵循的指导原则是：所有的定义、定理等的叙述和证明都应当是清晰、精确的；应用的思想和内容应贯串于全书之中。由于积分变换在工程技术中有广泛的应用，本书讲述了拉普拉斯变换和 Z-变换。

全书共分七章。第一章是解析函数，主要讲述了解析函数、幂级数和初等解析函数，特别着重讲述了如何找出多值函数的支点以及在什么样的区域内多值函数可以分出单值解析分支，并列举了若干例子，此外还讲述了调和函数在热传导、流体流动、静电场和渗流理论中的应用。

第二章是柯西积分公式，主要讲述了柯西积分公式和用级数表示解析函数，还讲述了解圆上和半平面上的迪利希莱问题的泊松积分公式。

第三章是留数定理与应用，主要讲述了留数定理、幅角原理、儒歇定理和利用留数定理计算积分，此外，还讲述了多项式的零点全位于单位圆内与全位于左半平面内的劳斯-霍尔维茨稳定性准则和尼奎斯特稳定性准则，以及多项式的零点关于其系数的连续依赖性。

第四章是共形映照及其一些应用，主要讲述了初等共形映照和许伐茨-克利斯托否公式，此外还讲述了应用共形映照解迪利希莱问题和以流线为边界的边值问题。

第五章是整函数与亚纯函数，主要讲述了无穷乘积、魏尔斯特拉斯因子分解定理、阿达玛定理、Γ 函数和亚纯函数展开为部分分式，此外还讲述了无穷乘积在流体管路传输中的应用。

第六章是拉普拉斯变换及其应用，主要讲述了拉普拉斯变换及其在求解微分方程中的应用，此外还系统地讲述了在流体传输中的应用。

第七章是Z-变换及应用，主要讲述了Z-变换及其在解常系数差分方程中的应用，此外还讲述了它在脉冲系统的传输函数和输出特性中的应用。

每章后面配有足够数量的习题。这些习题主要是计算性和应用性的，为了灵活运用和牢固掌握所学的理论和方法，也有适量的习题是理论性的。

本书可作为综合性大学、理工科大学和师范大学的应用数学专业、控制论专业、运筹学专业、应用力学专业、计算数学专业和数学专业的教材，也可供教师和从事应用科学研究的工程技术人员参考。各专业可根据各自的需要和兴趣有选择地进行教学。

本书是应复旦大学《应用数学丛书》编委会主编谷超豪教授的建议而编写的，在此对他表示感谢。

书中难免有缺点、错误和不足之处，希望大家批评指正。

任福尧

1993 年 8 月于复旦大学

目　录

第一章　解析函数

§1 复　　数

1.1　复数

称 $z=x+\mathrm{i}y$ 这种式子的数为**复数**，其中 x 和 y 是任意的实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位。实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}z,$$
$$y=\mathrm{Im}z。$$

特别，当 $x=0$ 时，$z=0+\mathrm{i}y$ 就简记作 $\mathrm{i}y$，称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}0$ 就是实数 x。

一、复数的相等

两个复数当且仅当它们的实部和虚部分别相等时，我们才认为这两个复数相等，即 $x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$ 等价于

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2。$$

二、复数的运算

1．若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，我们有下列定义：

(1)　$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$；　(1-1)

(2)　$-z=-x-\mathrm{i}y$；

(3)　$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$；

(4)　$z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$。　(1-2)

2．由上述定义，我们容易证明下述代数的基本定律是全满足的：

(1) **加法的交换律和结合律**

$$z_1+z_2=z_2+z_1；$$
$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3=z_1+z_2+z_3。$$

(2) 乘法的交换律和结合律

$$z_1z_2=z_2z_1;$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3=z_1z_2z_3。$$

(3) 分配律

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3。$$

作为证明方法的例子，我们证明乘法的交换律成立（其它可类似地证明）：

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\\&=(x_2x_1-y_2y_1)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)=z_2z_1。\end{aligned}$$

我们已经看到，如上所定义的复数服从实数的代数基本定律，因此，它们的代数与实数的代数在形式上是完全相同的，虽然在意义上它们是不完全相同的。

三、复数的模

若 $z=x+\mathrm{i}y$，我们定义 $+\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的**模**，记作 $|z|$。从定义立即知道，$|z|=0$ 当且仅当 $x=0$ 和 $y=0$。

我们注意到，在复数中是没有次序的，“大于”或“小于”等词用到复数上是没有意义的。不等式只能出现在复数的模之间的关系中。

四、复数除法的定义

考虑方程 $z\zeta=z'$，其中 $z=x+\mathrm{i}y, \zeta=\xi+\mathrm{i}\eta, z'=x'+\mathrm{i}y'$，则我们有

$$(x\xi-y\eta)+\mathrm{i}(x\eta+y\xi)=x'+\mathrm{i}y',$$

于是

$$x\xi-y\eta=x',\quad x\eta+y\xi=y',$$

对 ξ 和 η 求解，若 $|z|\neq0$，则得

$$\xi=\frac{yy'+xx'}{x^2+y^2},\qquad \eta=\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}。\tag{1-3}$$

因此，若 $|z|\neq0$，则有唯一解 ζ，$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 是商 z'/z。

被模为零的复数除是没有意义的；这和在实数代数里被零除是没有意义一致。

五、共轭复数

若 $z=x+\mathrm{i}y$，则称 $x-\mathrm{i}y$ 共轭于 z，且通常记为 $\bar{z}$。易知：

$$\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

且
$$|z|^2=z\overline{z},\quad 2\mathrm{Re}z=z+\overline{z},\quad 2\mathrm{i}\mathrm{Im}z=z-\overline{z}。\tag{1-4}$$

利用共轭复数和上述这些关系式常常可使得关于复数定理的证明大大地简化。例如，为了证明两个复数乘积的模等于它们模的乘积，我们可如下进行：

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

由于复数的模不是负的，所以

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|。\tag{1-5}$$

定理 两个复数之和的模不超过它们的模之和。

证明

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|。\tag{1-6}$$

利用数学归纳法，能容易地将上述结果推广到任何有限个复数，即

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|。$$

用类似的方法，我们能证明另一有用的结果，即

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||。\tag{1-7}$$

利用共轭复数，前述两个复数之商 z'/z 可简单地计算如下：

$$\begin{aligned}z'/z=z'\overline{z}/z\overline{z}&=\frac{(x'+\mathrm{i}y')(x-\mathrm{i}y)}{|z|^2}\\&=\frac{(x'x+y'y)+\mathrm{i}(y'x-x'y)}{x^2+y^2}\quad(z\neq0)。\end{aligned}$$

六、平方根

在实际问题中，常需要求一个复数的平方根。设复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平方根为 $\alpha+\mathrm{i}\beta$，即，$\sqrt{x+\mathrm{i}y}=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2=x+\mathrm{i}y。$$

于是，我们有

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=x,\\ 2\alpha\beta=y。\end{cases} \tag{1-8}$$

由这个方程组，我们有

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2=x^2+y^2。$$

因此
$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{x^2+y^2}。$$

联立这一方程和方程组(1-8)中的第一式，我们获得

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}},$$

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}。$$

一般来说，α 和 β 各有两个解，但是，注意到方程组(1-8)中的第二个式子，在选取 α 和 β 的解时，必须使 α 和 β 的乘积与 y 有相同的符号。因此

$$\sqrt{x+\mathrm{i}y}=\pm\left\{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right.$$
$$\left.+(\mathrm{sgn}y)\mathrm{i}\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right\}, \tag{1-9}$$

其中当 $y>0$ 时，$\mathrm{sgn}y=+1$；当 $y<0$ 时，$\mathrm{sgn}y=-1$；当 $y=0$ 时，$\mathrm{sgn}y=0$。

例如在流体管路传输理论中，经常需要求其所谓传播因子

$$\Gamma=[\mathrm{i}\omega C(R+\mathrm{i}\omega L)]^{1/2}$$

的实部和虚部，其中，$\omega=2\pi f$ 是圆频率，f 是频率，R 是流阻，L 是流感，C 是流容，R,L 和 C 都是实数。

设$\Gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$\alpha+\mathrm{i}\beta=(-\omega^2LC+\mathrm{i}\omega RC)^{1/2}。$$

根据公式(1-9)，并注意到$\mathrm{sgn}(\omega RC)=+1$，则

$$\alpha=\sqrt{\frac{-\omega^2LC+\sqrt{\omega^4L^2C^2+\omega^2R^2C^2}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\omega^2LC}{2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)^{1/2}-1\right],$$

$$\beta=\operatorname{sgn}(\omega RC)\sqrt{\frac{\omega^2LC+\sqrt{\omega^4L^2C^2+\omega^2R^2C^2}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\omega^2LC}{2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)^{1/2}+1\right].$$

1.2 复数的表示

一、复数的几何表示

在平面上取正交坐标系 Oxy，我们用坐标为 (x,y) 的点表示复数 $z=x+iy$。这样复数就与平面上的点一一对应。x 轴称为实轴，实数与 x 轴上的点一一对应；y 轴称为虚轴，虚数 iy 与 y 轴上的点一一对应。与复数建立了这种对应关系的平面就称为复平面。今后，复数与复平面上的点就不再区别了。全体复数或复平面记作 $\mathscr{C}$。

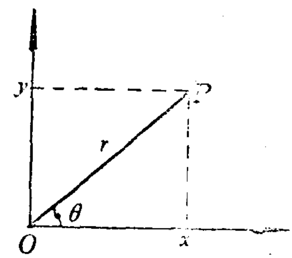


图 1.1

如图 1.1 所示，我们有时也用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+iy$，x 和 y 分别是 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴和 y 轴上的垂直投影。$\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 就是复数 z 的模 $|z|$。显然

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|, \tag{1-10}$$
$$|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|。$$

假如点 P 不在原点（即 $z\neq0$），则称向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴之间的夹角 θ 为 z 的幅角，记作 $\mathrm{Arg}z$。对幅角的方向作这样的规定：若 x 轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 为逆时针方向，则为正；若 x 轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 为顺时针方向，则为负。显然，一个复数有无穷多个幅角；若 $\arg z$ 表示任一给定的幅角，称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，则