化学工业出版社

模糊智能控制

模糊智能控制

冯冬青　谢宋和等编著

化学工业出版社

模糊智能控制

冯冬青 谢宋和等编著

化学工业出版社
·北 京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

模糊智能控制/冯冬青等编著．—北京：化学工业出版社，1998.9

ISBN 7-5025-2289-1

Ⅰ．模…　Ⅱ．冯…　Ⅲ．模糊控制：智能控制　Ⅳ．TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 20183 号

模 糊 智 能 控 制

冯冬青　谢宋和等编著
责任编辑：李玉晖
责任校对：王安达　麻雪丽
封面设计：于　兵

*

化学工业出版社出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷厂印刷
三河延风装订厂装订

*

开本 787×1092 毫米 1/16　印张 13　字数 325 千字
1998 年 9 月第 1 版　　1998 年 9 月北京第 1 次印刷
印　数：1—4000
ISBN 7-5025-2289-1/TP・210
定　价：22.00 元

前言

模糊控制和神经元网络理论是智能控制理论的两个重要分支，两者的融合（即神经模糊控制技术）是当前的一个热门课题，正吸引愈来愈多的科学研究人员和工程技术人员。近年来的家用电器产品“模糊化”无疑促进了模糊控制和神经元网络理论的进一步发展，使之走出高深的理论科学殿堂，逐渐得到普通百姓的认同。为了进一步普及对模糊控制理论的认识和了解，更好地使该理论服务于生产、服务于社会、服务于人民，本书作者将多年来的模糊控制理论研究成果和实际控制系统开发经验做一个简单的总结和归纳，在借鉴其他同仁的有关成果基础上，编写了此书，以飨广大科研开发和工程技术人员。

本书编写力求深入浅出、层次分明，强调实用性。本书可作为自动化、计算机、电子技术以及仪表类的高年级学生和硕士研究生的教材或教学参考书，也可供广大科研人员、科技产品开发人员以及家用电器领域的维修人员参考。

全书共六章，按照先易后难、由浅入深、具体应用实例三个层次依次编排。第一章重点介绍模糊控制理论的数学基础和模糊逻辑推理的基本概念和方法。第二章着重讨论模糊控制理论的基本思想、基本设计方法以及模糊控制系统的性能分析。第三章初步介绍了自适应模糊控制系统的几种典型形式以及实现方法。第四章具体讨论了模糊控制理论和神经元网络的融合技术以及未来的发展方向。第五章介绍了模糊控制系统的开发工具和环境，重点是用单片机实现在线模糊推理算法。第六章着重介绍了几个模糊控制系统的范例，尤其是在家用电器领域中的应用方法，具有较强的实用性。

本书由陈铁军教授主审，同时也得到许多同行专家的热情鼓励和具体帮助，在此对他们以及引文作者表示感谢。全书由冯冬青副教授和谢宋和副教授负责编制提纲和统稿。具体内容的编写分工依次是：冯冬青编写第四章和第六章第一、二节；谢宋和编写第一章和第五章第四节以及第六章第四节；周勇编写第二章；邓璐娟编写第三章和第六章第五、六节；师黎编写第五章以及第六章第三节。

由于编著者水平有限，难免存在不足之处，敬请广大读者批评指正。

作者于郑州

1998年4月

内容提要

本书是在作者从事模糊智能控制理论研究和长期进行工业实际应用项目研究开发经验总结的基础上，参考国内外有关资料编著的。书中首先简要叙述了模糊理论和模糊控制理论的基础，然后着重讲解了自适应模糊控制技术、神经模糊控制技术等实用技术方法，在此基础上介绍了模糊控制系统的开发，并通过多个具体的应用实例详细介绍了模糊控制系统的硬件设计和软件设计方法。

本书特别适合从事自动控制系统设计和研究的工程技术人员使用，也可作为自动控制类本科高年级学生和研究生的教学参考书。

目　　录

第一章　模糊理论基础

第一节　概　　述

一、模糊理论的创立

模糊理论是在美国柏克莱加州大学电气工程系 Lotfi. A. Zadeh 教授于 1965 年创立的模糊集合理论的数学基础上发展起来的，主要包括模糊集合理论、模糊逻辑、模糊推理和模糊控制等方面的内容。

早在 20 世纪 20 年代，就已经有学者开始思考和研究如何描述客观世界中普遍存在的模糊现象。著名的哲学家和数学家 B. Russell 在 1923 年就写出了有关“含糊性”的论文。他认为所有的自然语言均是模糊的，比如“红的”和“老的”就都不是清晰的或明确的，它们没有明确的内涵和外延，这些概念实际上是模糊的。可是，在特定的环境中，人们用这些概念来描述某个具体对象时却又能心领神会，很少引起误解和歧义。

事隔十余年之后，英国学者 M. Black 在 1937 年也曾对“含糊性”问题进行过深入研究，并提出了“轮廓一致”的新概念，这完全可以看作是后来的“隶属函数”这一重要概念的思想萌芽。应该说他已经走到了真理的边缘，可谓模糊集合理论的鼻祖。可惜，他在描述某一概念的“真实接近程度”时，错用了“用法的接近程度”，最终与真理擦肩而过，失之交臂。

与 B. Russell 同时代的逻辑学家和哲学家 J. Lukasiewicz 发现经典的二值逻辑只是理想世界的模型，而不是现实世界的模型，因为它在对待诸如“某人个子比较高”这一客观命题时不知所措。他在 1920 年创立了多值逻辑，为建立正式的模糊模型走出了关键的第一步。但是，多值逻辑本质上仍是精确逻辑，它只是二值逻辑的简单推广。

美国加州大学的 L. A. Zadeh 博士在 1965 年发表的 Fuzzy Set 论文中首次提出了表达事物模糊性的重要概念——隶属函数，从而突破了 19 世纪末德国数学家 G. Contor 创立的经典集合理论的局限性。借助于隶属函数可以表达一个模糊概念从“完全不属于”到“完全隶属于”的过渡，才能对所有的模糊概念进行定量表示。隶属函数的提出奠定了模糊理论的数学基础。这样，像“冷”和“热”这些在常规经典集合中无法解决的模糊概念就可在模糊集合中得到有效表达。这就为计算机处理这种语言信息提供了一种可行的方法。

1966 年，P. N. Marinos 发表了模糊逻辑的研究报告，这一报告真正标志着模糊逻辑的诞生。模糊逻辑和经典的二值逻辑不同，模糊逻辑是一种连续逻辑。一个模糊命题是一个可以确定隶属度的句子，它的真值可取 [0，1] 区间中的任何数。很明显，模糊逻辑是二值逻辑的扩展，而二值逻辑只是模糊逻辑的特殊情况。模糊逻辑有着更加普遍的实际意义，它摒弃了二值逻辑简单的肯定或否定，把客观逻辑世界看成是具有连续灰度等级变化的，它允许一个命题亦此亦彼，存在着部分肯定和部分否定，只不过隶属程度不同而已，这就为计算机模仿人的思维方式来处理普遍存在的语言信息提供了可能，因而具有划时代的现实意义。

1974 年，L. A. Zadeh 又进行了模糊逻辑推理的研究，从此，模糊理论成了一个热门的课题。建立在模糊逻辑基础上的模糊推理是一种近似推理，可以在所获得的模糊信息前提下进行有效的判断和决策。而基于二值逻辑的演绎推理和归纳推理此时却无能为力，因它要求前

提和命题都是精确的，不能有半点含糊。

1974年，英国的E.H.Mamdani首次用模糊逻辑和模糊推理实现了世界上第一个试验性的蒸汽机控制，并取得了比传统的直接数字控制算法更好的效果。它的成功也标志着人们采用模糊逻辑进行工业控制的开始，从而宣告了模糊控制的问世。第一个有较大进展的商业化模糊控制器是在丹麦诞生的。1980年工程师L.P.Holmblad和Ostergard在水泥窑炉上安装了模糊控制器并获得了成功，这个成果引起了有关学者的极大关注。事实上，模糊逻辑应用最有效、最广泛的领域就是模糊控制，模糊控制在各种领域出人意料地解决了传统控制理论无法解决或难以解决的问题，并取得了一些令人信服的成效。

对于模糊理论这样一个新生事物，学术界一直有两种不同的观点，其中持否定态度的观点在一段时间内仍占据上风。客观地说，有以下几个方面的原因。其一是推崇模糊理论的学者在强调其不依赖于精确的数学模型时过分地夸大了其功效，无意之中将自己推上了“被告席”。正确的观点似乎应该是模糊控制不依赖于被控对象的精确数学模型，当然它也不应该拒绝有效的数学模型。模糊控制理论在特定条件下可以达到经典控制理论难以达到的“满意控制”，而不是最佳控制。其二是模糊理论的确还有许多不完善之处，比如模糊规则的获取和确定，隶属函数的选择以及比较敏感的稳定性问题至今仍未得到完善的解决。尽管如此，也不应否定模糊理论的科学性和有效性，它事实上已经成为智能控制的一个重要分支。

二、模糊理论的发展和现状

以日本、中国、欧美为代表的各国科技人员正就以下各个方面开展深入研究。

1. 模糊理论基础研究

为了开拓更新更广的应用，完善模糊理论的理论体系，必须加强以基本概念为核心的模糊理论和模糊方法论的研究，其重点在于应用模糊理论对人的思维过程和创造力进行理论研究。同时也要对已有基础理论中的基本概念，比如模糊的概念、模糊推理的概念等进行推敲；对模糊推理中的多值理论、统一性理论、推理算法、多变量分析、模糊量化理论等进行研究；对模糊方法论中的模糊集合论、模糊方程、模糊统计等模糊数学，对思维功能与模糊系统的关系、模糊系统评价方法、模糊系统与其他系统，特别是神经网络等相结合的理论问题进行研究。

2. 模糊计算机方面的研究

其目标是实现具有模糊系统特征的高速推理计算机，并希望在系统小型化、微型化的同时，开发出可以大大提高开发效率的模糊计算机。这方面的研究包括模糊计算机结构、模糊逻辑器件、模糊逻辑存储器、模糊编程语言，以及模糊计算机操作系统软件等。

3. 机器智能化研究

目的是实现对模糊信息的理解，对具有渐变性特征模糊系统的控制以及对模式识别和决策智能化的研究。主要包括智能控制、传感器、信息意义理解、评价系统、具有柔性思维和动作性能的机器人、能有语言理解能力的智能通讯、具有实时理解能力的图像识别等。

4. 人机工程的研究

其目标是实现能高速模糊检索并能对未能预测的输入条件作适当判断的专家系统，以及对人与人之间的界面如何能尽量接近人机之间的界面，如何才能满足新系统要求的研究。这方面主要包括模糊数据库、模糊专家系统、智能接口和对人的自然语言的研究。

5. 人类系统和社会系统的研究

目的在于利用模糊理论解决充满不确定性的人的复杂行为、心理分析，社会经济的变化

趋势，各种社会现象的模型、预测以及决策支持等。这方面包括对各种危机的预测和完全评价、对有人为失误系统的评价方法、建立不良结构系统的模型、模糊理论在交通运输中的应用、经济辅助决策、智能医疗诊断系统、人的行为与心理和行为分析、社会经济模型、艺术上应用和管理上应用等。

6. 自然系统的研究

目的在于利用模糊理论来解决复杂自然现象的模型和解释等。这方面还包括对各种物理化学现象的进一步解释，对自然环境大气圈、地球生物圈、水圈、地圈的研究。

三、模糊逻辑技术中的几个基本问题

1. 模糊逻辑与随机事件的联系和区别

有人误认为模糊逻辑中的隶属函数与数理统计中的概率都是描述不确定性的，隶属函数就是概率的另一种表述，只不过换了一个角度而已。事实上，概率是事件发生可能性大小的度量，它表示事件结果的不确定性；而隶属函数则是事件本身多大程度属于某个分类的度量，它表示事物本身性质的内在不确性。美国西佛罗里达大学的詹姆斯·贝斯德克教授曾用这样的事例来阐明两者的区别。假如你在沙漠中不幸迷了路，而且已经好几天没有见到水了。这时你突然看到两个装着液体的瓶子，其中一个贴有标签表示它盛有纯净水的概率是 0.91；而另一个瓶子上的标签表示瓶中液体属于纯净水的隶属度也是 0.91。你将选择哪一瓶呢？很显然你肯定会选用后者，因为前者可能会是有毒液体，后者尽管不是太干净，但是一定能喝。这个例子说明隶属函数和概率不是一回事，不能相互替代。但是，这两者又可能相互结合，那就是模糊概率，用来描述模糊随机事件的概率。例如求“明天下大雨”的概率，其中“下大雨”便是模糊事件。

2. 模糊逻辑与多值逻辑的区别和联系

模糊逻辑是在多值逻辑的基础上发展起来的，因此有人误认为模糊逻辑就是多值逻辑，而实际上两者是有区别的。二值逻辑排斥真值的中介过渡性，认为事物在形态和类属方面是非此即彼的。多值逻辑首先突破了真值的两极性，承认了真值具有中介过渡性，认为事物在形态和类属方面并非是非此即彼，是可能此亦可能彼，或者可能非此也可能非彼。但是，多值逻辑是通过穷举中介的方法表示过渡性，把所有的中介看成是彼此独立、界限分明的对象，真值是精确的。因此，多值逻辑本质上是一种精确逻辑，只不过是二值逻辑的简单推广。而模糊逻辑不仅承认真值的中介过渡性，还认为事物在形态和类属方面具有亦此亦彼性、模棱两可性，或者说是模糊性，相邻之间是相互交叉和渗透，其真值也是模糊的。

3. 模糊逻辑与人工智能

人工智能是一门新兴的边缘学科，它主要研究怎样能使计算机去做原来只有人才能做的具有智能性质的工作。所谓智能是指人在认识或者实践活动中所具有的感知观察能力、记忆能力、逻辑思维能力和语言表达能力等综合心理机能。人脑功能模型的关键是对人的自然智能逻辑进行形式化的问题。传统电子计算机是以二值逻辑为基础的，其特点是建立在加法和移位基础上的各种计算能力，对确定性问题具有逻辑推理能力，并且可以比人具有更高的速度、精度和效率。然而这样的计算机并不具有人脑那样灵活处理语言信息和像人一样的创造性思维的能力。事实上要用二值逻辑来模拟人的思维过程是不可能的，这是因为目前的计算机理论仍然是经典数学的精确方法，即以非此即彼的二值逻辑为基础，即使已经引进了概率统计等随机数学方法，但是仍然不能解决对普遍存在的模糊信息进行处理的问题，不能模拟人的模糊化思维的逻辑机制。

模糊逻辑技术经常与人工智能相联系，因为这是一种模仿人推理过程的计算机推理设计技术。相对而言，模糊逻辑在数学上并不算复杂，而它确实体现了目前所知的许多人工智能要素。当然模糊逻辑也不可能是包罗万象的技术，我们应该把模糊技术看成是现有技术和方法的集成技术。人工智能和模糊逻辑有联系，但是两者又有关键性的差别。目前的人工智能实际上是指用来模仿人的精神方面而加到计算机上的“智能”。而模糊逻辑实质上是一种方法，用这种方法计算机就有可能更可靠地去处理那些无法用数字表示的概念、现象和问题。

4. 模糊逻辑和专家系统

所谓专家系统就是这样一种信息系统，它可以对用户提出的问题从其知识库中提取恰当的答案。典型的专家系统都具有不寻常的推理能力，特别是它具有根据不精确、不完整或者不完全可靠的前提进行推理的能力。因为专家系统的知识库都是由专家提供的知识构成的，其中很多知识都含有经验成分，实际上是不精确的。在专家系统设计中，基本问题就是如何利用计算能力从前提到结论去分析不确定性的传递，并且把结论与一般称作不确定因素的东西联系起来。在专家系统中以模糊逻辑作为处理不确定性的框架，就可使我们有可能去考虑用传统方法不能正确处理或者不能有效处理的许多问题。方法是在专家系统中引入模糊规则，模糊规则看起来非常像传统专家系统中的产生式规则，它们有不止一个前提和一个以上的结论。在传统专家系统中，如果前提是真，规则就被激活。而在模糊专家系统中，如果其前提是非零值，即某种程度的真，规则就被激活。

在传统专家系统中，规则要么被激活，要么就不被激活。如果对一组输入，仅有一个规则被激活，那么这个规则就完全控制了专家系统的输出。但是在模糊专家系统中，规则不是开关式响应，而是可以不同程度地被激活，那就是说，规则产生的是“灰度”响应，而这灰度的大小取决于在每一个规则前提下的可信度。通常对于给出的一组输入，可有不止一个规则被激活。那么专家系统的输出可能是几条规则结合的结果。这样，模糊专家系统就能与人对大量的问题进行直观思考的方法相一致，成为一种对非线性编码系统易于理解的方法，并且可以在现有传统计算机上以更快的速度运行。

5. 模糊逻辑与神经网络

神经网络是被相互连接起来的处理器结点矩阵，每个结点是一个神经元，这是对人大脑神经细胞的简单近似模拟。每个神经元接受一个以上与权因子相乘的输入，并把这些输入加到一起去产生输出。神经元可被分层安排，第一层接受基本输入，然后传递其输出到第二层，第二层又有自己的权因子与代数和等，直到最后一层产生输出。

神经网络本质上是模糊的，但是使用模糊逻辑的系统并不一定非要神经网络结构。神经网络有两个与用传统方法进行信息处理完全不同的性质。第一，神经网络是自适应和可以被训练的，它有自修改能力。如果最后的输出不正确，系统可以调整权重加到每个输入上去产生一个新的结果，这可以通过一定的训练算法来实现。第二，神经网络本身就决定了它是大规模并行机制，也就是说，神经网络从原理上看就比传统方法要快得多，它擅长通过大量复杂的数据进行分类和发现模式或规律。神经网络的关键特性和基本限制是神经网络所知的信息是隐含的，如果要理解它几乎是不可能的，而安排它的权值是决定它工作情况的关键，然而却又无法知道权值和理解神经网络在做什么，那就是说，神经网络所用的“语言”我们是难以理解的。

模糊逻辑系统并不是像神经网络那样的学习系统，它所具有的“知识”可通过该领域的专家提供。模糊逻辑控制规则是靠人的直觉经验制定的，它本身并不具有学习功能。在用软

件实现的复杂系统中，模糊控制规则越多，控制运算的实时性越差，而且需要识别和建立规则的时间随规则数增加而以指数形式增长。正因为如此，模糊逻辑的应用范围受到限制，其作用长期不能得到充分发挥。由此可见，模糊逻辑技术与神经网络技术各有长处和局限性。如果把模糊控制技术与神经网络技术结合起来，就能各取所长，共生互补。

6. 模糊逻辑的不足之处

模糊逻辑是一项正在发展中的技术，至今它还没有成为完善的系统分析技术，一般而言，目前在理论上还无法像经典控制理论那样证明运用模糊逻辑的控制系统的稳定性。已经熟悉经典控制理论的人喜欢用系统分析方法是很自然的事。经典控制理论是把实际情况加以简化以便于建立数学模型，一旦建立数学模型以后，经典控制理论的深入研究就可对整个控制过程进行系统分析。尽管如此，这种分析对实际控制过程依然是近似的，甚至是非常粗糙的。近似的程度取决于建立数学模型过程中的简化程度。模糊逻辑把更多的实际情况包括在控制环内来考虑，整个控制过程的模型是时变的，这种模型的描述不是用确切的经典数学语言，而是用具有模糊性的语言来描述的。

经典控制表面上看是精确控制，而实际上是简单控制，只有在数学模型与实际情况比较相符时才较为精确。模糊控制则把经典控制中被简化的部分也综合起来考虑了。

第二节　模糊集合和隶属函数

一、模糊集合的定义

在经典集合论中，任何一个元素与任何一个集合之间的关系，只有“属于”和“不属于”两种情况，两者必居其一，而且只居其一，绝对不允许模棱两可。比如“不大于 5 的自然数”是一个清晰的概念，该概念的内涵和外延均是明确的。可是，我们也经常遇到没有明确外延的概念，这种概念实质上是模糊概念。例如，“比 5 大得多的自然数”就是一个模糊概念。可以想见无法划定一个明确的界限，使得在这个界限内所有自然数都比 5 大得多，而界限外的所有自然数都不比 5 大得多。只能说某个数属于“比 5 大得多”的程度高，而另一个数属于“比 5 大得多”的程度低，比如 50 属于“比 5 大得多”的程度比 10 属于“比 5 大得多”的程度高。

L. A. Zadeh 在 1965 年把普遍集合中的元素对集合的隶属度只能取 0 和 1 这两个值，推广到可以取区间 [0，1] 中的任意一个数值。即可以用隶属度定量去描述论域 U 中的元素符合概念的程度，实现了对普通集合中绝对隶属关系的扩充，从而用隶属函数表示模糊集合，用模糊集合表示模糊概念。

定义 1　论域 U 中的模糊子集 A，是以隶属函数 μ_A 为表征的集合。即由映射

$$\mu_A: U \to [0, 1]$$

确定论域 U 的一个模糊子集 A。μ_A 称为模糊子集的隶属函数，$\mu_A(u)$称为 u 对 A 的隶属度，它表示论域 U 中的元素 u 属于其模糊子集 A 的程度。它在 [0，1] 闭区间内可连续取值，隶属度也可简记为 $A(u)$。

定义 2　在给定论域 U 上，对于不同的映射（即不同的隶属函数）可以确定不同的模糊子集。所有这些子集组成的模糊集合的全体，称为 U 的模糊幂集，记为 $F(U)$，即

$$F(U)=\{A \mid \mu_A: U \to [0,1]\}$$

关于模糊子集 A 和隶属函数 μ_A 须做如下几点补充说明：

(1) 论域 U 中的元素是分明的，即 U 本身是普通集合，只是 U 的子集是模糊集合，故称

A 为 U 的模糊子集，简称模糊集。

(2) $\mu_A(u)$的值越接近 1,表示 u 从属于 A 的程度越大;反之,$\mu_A(u)$的值越接近于 0,则表示 u 从属于 A 的程度越小。显然,当 $\mu_A(u)$的值域为{0,1}时，隶属函数 μ_A 已蜕变为普通集合的特征函数，模糊集合 A 也就蜕变成为一个清晰集合。因此，可以这样来概括经典集合和模糊集合间的互变关系：即模糊集合是清晰集合在概念上的拓广，或者说清晰集合是模糊集合的一种特殊形式；而隶属函数则是特征函数的扩展，或者说，特征函数只是隶属函数的一个特例。

(3) 模糊集合完全由它的隶属函数来刻画。隶属函数是模糊数学的最基本概念，借助于它才能对模糊集合进行量化。正确地建立隶属函数，是使模糊集合能够恰当地表达模糊集合的关键，是利用精确的数学方法去分析处理模糊信息的基础。

二、模糊集合的表示方法

对于论域 U 上的模糊集合 A，通常采用的表达方式有如下几种。

1. Zadeh 表示方法

当 U 为离散有限域 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 时，按照 Zadeh 表示法，有

$$A=\frac{A(u_1)}{u_1}+\frac{A(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{A(u_n)}{u_n}$$

式中$\frac{A(u_i)}{u_i}$并不代表“分式”,而是表示元素 u_i 对于集合 A 的隶属度 $\mu_A(u_i)$和元素 u_i 本身的对应关系;同样,“+”号也不表示“加法”运算,而是表示在论域 U 上,组成模糊集合 A 的全体元素 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$间排序与整体间的关系。

当 U 是连续有限域时，按 Zadeh 给出的表示为

$$A = \int_U = \frac{\mu_A(u)}{u}$$

式中$\int$(积分符号)也并不表示求积分运算,而是表示连续论域U上的元素 u 与隶属度 $\mu_A(u)$一一对应关系的总体集合。

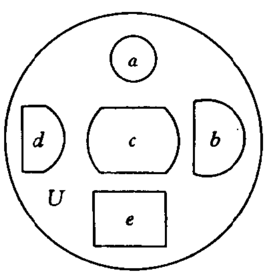

图 1.1　论域 U 中的元素

例如,如图 1.1所示的$U=\{a,b,c,d,e\}$,对每一个元素“块”选定一个关于“圆块”A 的隶属度,即给定 U 到[0,1]的一个映射:

$$\mu_A(a)=1,\mu_A(b)=0.9,\mu_A(c)=0.4$$

$$\mu_A(d)=0.2,\mu_A(e)=0$$

这样便确定一个模糊子集 A,它是“圆块”这一模糊概念在论域U 上的表现,可记为

$$A=\frac{1}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0.4}{c}+\frac{0.2}{d}+\frac{0}{e}$$

在论域 U 上,$A(u)>0$ 的元素称为 A 的台,显然,用台来表示一个模糊集合比较简单。故通常采用台的方法来表示模糊集合。此时,A 也可记为

$$A=\frac{1}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0.4}{c}+\frac{0.2}{d}$$

2. 矢量表示法

如果单独地将论域U 中的元素 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$所对应的隶属度值 $\mu_A(u_i)$,按序写成矢量形式来表示模糊子集 A,则可以是

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}(u_1),\boldsymbol{A}(u_2),\cdots,\boldsymbol{A}(u_n))$$

上式即是矢量表示法。应该注意的是：在矢量表示法中隶属度为 0 的项不能省略，必须依次列入。上述“圆块”$\boldsymbol{A}$ 的矢量表示法为

$$\boldsymbol{A}=(1,\ 0.9,\ 0.4,\ 0.2,\ 0)$$

3. 序偶表示法

若将论域 U 中的元素 u_i 与其对应的隶属度值 $\mu_A(u_i)$ 组成序偶 $\langle u_i, \mu_A(u_i)\rangle$，也可将 A 表示成

$$A=\{\langle u_1,\ \mu_A(u_1)\rangle,\ \langle u_2,\ \mu_A(u_2)\rangle,\cdots,\ \langle u_n,\ \mu_A(u_n)\rangle\}$$

上述“圆块”A 的序偶表示法为

$$A=\{\langle a,1\rangle,\ \langle b,0.9\rangle,\ \langle c,0.4\rangle,\ \langle d,0.2\rangle\}$$

4. 函数描述法

根据模糊集合的定义，论域 U 上的模糊子集 A 完全可以由隶属函数 $\mu_A(u)$ 来表征，而隶属函数 $\mu_A(u_i)$ 表示元素 u_i 对 A 的从属程度大小。这和清晰集合中的特征函数表示方法一样，可以用隶属函数曲线来表示一个模糊子集 A。

例如，以年龄做论域，取 $U=[0,200]$。Zadeh 给出了“年老”O 和“年轻”Y 两个模糊集合的隶属函数式，分别为

$$\mu_O(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 200\end{cases}$$

$$\mu_Y(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<u\leqslant 200\end{cases}$$

因此，可以用隶属函数曲线来表示模糊子集 O 和 Y，如图 1.2 所示。

三、模糊集合的运算

1. 模糊集合的包含和相等关系

定义 3 设 A、$B\in F(U)$，则

(1) 若 $\forall\ u\in U$，均有 $A(u)\geqslant B(u)$，则称 A 包含 B，或称 B 是 A 的子集，记作 $A\supseteq B$。

(2) 若 $\forall\ u\in U$，均有 $A(u)=B(u)$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

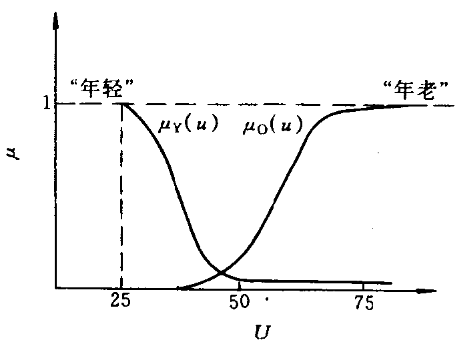

图 1.2 “年老”和“年轻”的隶属函数曲线

2. 模糊集合的并、交、补运算

定义 4 设 A、$B\in F(U)$，则

(1) A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，是指：若 $\forall\ u\in U$，均有 $(A\cup B)(u)=A(u)\cup B(u)=\max(A(u),B(u))$。

(2) A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，是指：若 $\forall\ u\in U$，均有 $(A\cap B)(u)=A(u)\cap B(u)=\min(A(u),B(u))$。

(3) A 的补集，记作 A^c，是指：若 $\forall\ u\in U$，均有 $A^c(u)=1-A(u)$。

这里的 $\vee$、$\wedge$ 称为 Zadeh 算子，它们分别表示 sup 和 inf。在有限元素之间则表示 max 和 min，即取最大值和最小值。

例如，设论域 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，且

$$A=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.4}{u_2}+\frac{0.9}{u_3}+\frac{0.5}{u_5}$$

$$B=\frac{0.1}{u_1}+\frac{0.7}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}$$

则

$$A\cup B=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.4}{u_2}+\frac{0.9}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.5}{u_5}$$

$$A\cap B=\frac{0.1}{u_1}+\frac{0.7}{u_3}+\frac{0.3}{u_5}$$

$$A^{C}=\frac{0.8}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.5}{u_5}$$

$$B^{C}=\frac{0.9}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.7}{u_5}$$

3. 模糊集合运算的基本定律

设 U 为论域，A、B、$C\in F(U)$，则有下列等式成立：

(1) 幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

(2) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) 吸收律　$(A\cup B)\cap A=A$

$(A\cap B)\cup A=A$

(5) 同一律　$A\cup U=U$，$A\cap U=A$

$A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$

(6) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(7) 复原律　$(A^{C})^{C}=A$

(8) 对偶律　$(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$

模糊集合的并、交、补运算基本性质与经典集合的并、交、补运算基本性质的根本区别在于模糊集合并、交、补运算不满足互补律。

即

$$A\cap A^{C}\neq\phi,\quad A\cup A^{C}\neq U$$

这是因为模糊集合 A 没有明确的外延，因而其补集 A^{C} 也没有明确的外延，从而 A 与 A^{C} 存在重叠的区域，则有交集不为空集 ϕ，并集也不为全集 U。

例如，$A(u)=0.6$，则 $A^{C}(u)=0.4$

$$(A\cap A^{C})(u)=0.6\wedge 0.4=0.4\neq 0$$

$$(A\cup A^{C})(u)=0.6\vee 0.4=0.6\neq 1$$

四、隶属函数及其选择方法

模糊集合是通过隶属函数来定义的，正确地确定隶属函数是运用模糊集合理论解决实际问题的基础。隶属函数的确定实质上是人们主观对客观事物概念的外延不分明性(即中介过渡性)的定量描述，这种描述本质上是客观的。但因为每个人对同一模糊概念的认识理解上存在差异，因此又含有一定的主观因素。对于同一个模糊概念，不同的人会建立不完全相同的隶属

函数。但只要反映同一模糊概念，尽管形式不同，在解决和处理模糊信息问题中仍然殊途同归，只是有优劣之分。校验隶属函数建立得是否合适的标准是看其是否符合实际。通常是初步确定粗略的隶属函数，再通过“学习”和“校验”逐步修正完善，达到主观与客观的一致。

确定隶属函数的方法大致有下述几种。

1. 主观经验法

当论域是离散时，根据主观认识或个人经验，直接或间接给出元素隶属度的具体值，由此确定隶属函数。具体的实现方法有以下几种：

(1) 专家评分法　即综合多数专家的评分来确定隶属函数的方法，这种方法广泛应用于经济与管理的各个领域。

(2) 因素加权综合法　若模糊概念是由若干因素相互作用而成，而每个因素本身又是模糊的，则可综合考虑各因素的重要程度来选择隶属函数。

(3) 二元排序法　通过对多个事物之间两两对比来确定某种特征下的顺序，由此来决定这些事物对该特征的隶属函数的大致形状。

2. 分析推理法

当论域连续时，根据问题的性质，应用一定的分析与推理，决定选用某些典型函数作为隶属函数，比如三角形函数、梯形函数等。

3. 调查统计法

以调查统计结果所得出的经验曲线做为隶属函数曲线，根据曲线找出相应的函数表达式。

第三节　模糊关系和模糊矩阵

一、模糊关系

描述元素之间是否相关的数学模型称为关系，描述元素之间相关的程度的数学模型称为模糊关系。为了区别于模糊关系，又称关系为普通关系。显然，模糊关系是普通关系的拓广和发展，而普通关系可视为模糊关系的特例。模糊关系是模糊数学的重要组成部分。当论域有限时，可用模糊矩阵表示模糊关系。模糊矩阵为模糊关系的运算带来了极大的方便，成为模糊关系的主要运算工具。

1. 模糊关系的定义

定义 5　两个非空集合 U 与 V 之间直积

$$U\times V=\{\langle u,v\rangle \mid u\in U, v\in V\}$$

中的一个模糊子集 $\boldsymbol{R}$ 被称为 U 到 V 的模糊关系，又称二元模糊关系。其特性可以由下面的隶属函数来描述

$$\mu_{R}: U\times V\rightarrow [0, 1]$$

隶属函数 $\mu_R(u,v)$ 表示序偶 $\langle u, v\rangle$ 的隶属程度，也描述了 (u, v) 间具有关系 $\boldsymbol{R}$ 的量级。特别在论域 $U=V$ 时，称 $\boldsymbol{R}$ 为 U 上的模糊关系。当论域为 n 个集合 U_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 的直积 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 时，它们所对应的模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 则称为 n 元模糊关系。

例如，设 A、B 是实数集合，元素对 (a, b)，$a\in A$，$b\in B$，则对于“b 与 a 大致相等”这样的模糊关系，得到隶属函数

$$\mu_R(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(a-b)^4} & |b-a|\leqslant 5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

2. 模糊关系的性质

(1) 自反性　设 $\boldsymbol{R}$ 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$\mu_R(u,v)=1,\quad \forall\ u\in U$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 具有自反性的模糊关系。具有自反性的模糊关系，其所有元素 u 与模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 间的隶属程度为 1。反之，如果

$$\mu_R(u,v)=0,\quad \forall\ u\in U$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 具有反自反性的模糊关系，其模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的对角线元素均为 0。

自反性的模糊关系具有如下性质：

当关系 $\boldsymbol{R}$ 是自反的，$\boldsymbol{P}$ 为任意模糊关系，

则
$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P}\supseteq\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{P}。$$

其中　符号“$\circ$”表示合成运算。

当关系 $\boldsymbol{R}$ 是自反的，则 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$。

当关系 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{P}$ 是自反的，则 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{P}$ 以及 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P}$ 也是自反的。

(2) 对称性　设 $\boldsymbol{R}$ 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$\mu_R(u,v)=\mu_R(v,u),\quad \forall\ u,v\in U\times V$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 为具有对称性的模糊关系，其相应的模糊矩阵应满足 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^T$。

此外，当 $\mu_R(u,v)>0$，如果 $\mu_R(v,u)>0$，则 $u=v$；当 $u\neq v$ 时，如果 $\mu_R(u,v)>0$，那么 $\mu_R(v,u)=0$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为反对称性的，其相应的模糊矩阵满足 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^T\leqslant\boldsymbol{I}$。

对称性的模糊关系 R 具有下列性质：

当关系 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{P}$ 是对称的，则 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{P}$ 以及 $\boldsymbol{R}^m$ 也是对称的。

当 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{P}$ 是对称的，且 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{R}$ 成立时，则 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P}$ 也是对称的。

(3) 传递性　设 $\boldsymbol{R}$ 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$\bigvee_{v}\{\mu_R(u,v)\wedge\mu_R(v,w)\}\leqslant\mu_R(u,w)$$

也就是所有在 u 与 v 隶属于模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 的程度和 v 与 w 隶属于关系 $\boldsymbol{R}$ 的程度中取较小的一个值都小于 u 与 w 隶属于关系 $\boldsymbol{R}$ 的程度，则称 $\boldsymbol{R}$ 为具有传递性的模糊关系，其相应的模糊矩阵满足 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2\subseteq\boldsymbol{R}$。

传递性的模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 具有如下性质：

当 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{P}$ 是传递的，$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{P}$ 也是传递的，但 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{P}$ 未必是传递的。

当 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{P}$ 是传递的，且 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{R}$ 成立，则 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P}$ 是传递的。

当 $\boldsymbol{R}$ 是传递的、对称的，则有 $\mu_R(u,v)\leqslant\mu_R(u,u)$。

当 $\boldsymbol{R}$ 是自反的、传递的，则 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$。

(4) 对比性　设 $\boldsymbol{R}$ 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$u\neq v\ 时，\mu_R(u,v)>0\ 或\ \mu_R(v,u)>0$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 为具有对比性的模糊关系。

3. 模糊关系的合成

在日常生活中，两个单纯关系的组合可以构成一种新的合成关系。例如，有 u、v、w 三个人，若 v 是 u 的妹妹，而 u 又是 w 的丈夫，则 v 与 w 就是一种新的关系，即姑嫂关系。用关系式表示的话，就可写作

姑嫂＝兄妹·夫妻

模糊关系和普通关系一样，两种模糊关系可以组合成一种合成关系。

定义 6 设 $\boldsymbol{P}$ 是 $U\times V$ 上的模糊关系，$\boldsymbol{Q}$ 是 $V\times W$ 上的模糊关系，则 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 是 $U\times W$ 上的模糊关系，它是 $\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{Q}$ 的合成。其隶属函数被定义为

$$\mu_{R}(u,w)\Leftrightarrow\mu_{P\circ Q}(u,w)=\bigvee_{v\in V}(\mu_{P}(u,v)\wedge\mu_{Q}(v,w))$$

若式中算子 ∧ 代表“取小—min”，∨ 代表“取大—max”运算，这种合成关系即为最大值-最小值合成，合成关系 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{Q}$。

模糊关系的合成可以是多种多样的。如果把上述的合成关系认为是模糊关系 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的一种 sup-min 合成关系，可写成

$$\mu_{P\circ Q}(u,w)=\sup_{v\in V}[\min(\mu_{P}(u,v),\mu_{Q}(v,w))]$$

那么，下面一种合成关系的定义

$$\mu_{S}(u,w)\Leftrightarrow\mu_{P\otimes Q}(u,w)=\bigwedge_{u\in V}(\mu_{P}(u,v)\wedge\mu_{Q}(v,w))$$

就是模糊关系 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的一种 inf-max 合成关系，可写成

$$\mu_{P\otimes Q}(u,w)=\inf[\max(\mu_{P}(u,v),\mu_{Q}(v,w))]$$

并且这两种合成关系间存在下列联系规则：

$$\overline{\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{Q}}=\overline{\boldsymbol{P}}\otimes\overline{\boldsymbol{Q}}$$

4. 模糊关系合成的基本性质

(1) $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$

(2) $\boldsymbol{R}\circ O=O\circ\boldsymbol{R}=0$

(3) $\boldsymbol{R}^{m+n}=\boldsymbol{R}^{m}\circ\boldsymbol{R}^{n},\boldsymbol{R}^{0}=\boldsymbol{I}$

(4) 若 $\boldsymbol{S}\subseteq\boldsymbol{T}$，则 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\subseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}$

(5) $\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\cup\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\cup(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T})$

$(\boldsymbol{S}\cup\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})\cup(\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R})$

$\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T})\subset(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\cap(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T})$

$(\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{R}\subset(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})\cap(\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R})$

(6) $\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{Q})=(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{P})\circ\boldsymbol{Q}$

(7) $(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^{T}=\boldsymbol{S}^{T}\circ\boldsymbol{R}^{T}$

例如，设模糊集合 X、Y、Z 分别为

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$

$$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$$

$$Z=\{z_1,z_2\}$$

并设 $\boldsymbol{Q}\in X\times Y,\boldsymbol{R}\in Y\times Z,\boldsymbol{S}\in X\times Z$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6 & 0.3\\0.7 & 0.4 & 1\\0 & 0.8 & 0\\1 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\0.8 & 0.4\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

则可得模糊关系 $\boldsymbol{Q}$ 对 $\boldsymbol{R}$ 的合成

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}=(s_{ij})_{4\times 2}=\bigvee_{k=1}^{3}(q_{ik}\wedge r_{kj})$$