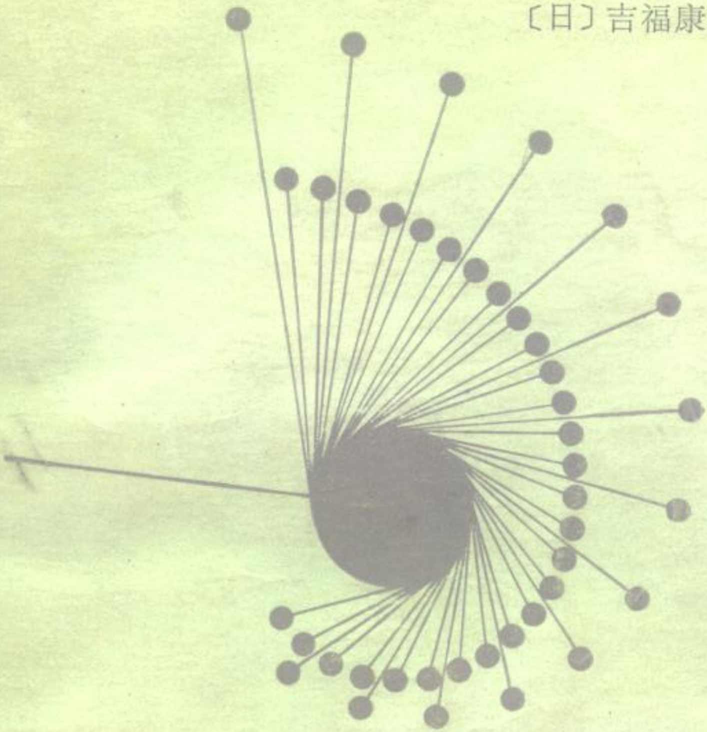
〔日〕吉福康郎 著



趣味数学物理

怎样解答"为什么？"

科学普及出版社

趣味数学物理

——怎样解答“为什么?”——

〔日〕 吉福康郎 著

田明华 译

张金榜 吕品 校

科学普及出版社

内 容 提 要

书中列举了舰船转换航向，钢缆下垂的长度与自身重量的关系，刚克柔，自行车与自行车赛，掷链锤，跳绳，金字塔形状的决择，汽车飞越障碍，比萨馅饼的工艺学，热茶快喝，巨型动物的体温调节，盛夏比夏至晚，从永动机想起的，节能等等有趣的物理问题，通过推导方程式的过程，阐述各个有关的物理现象，引导读者学会运用数学语言来表达物理概念。这是一本高等院校数学物理学参考书，又是一部科学性强并充满趣味性的高级科普读物。

本书适于高等院校数学、物理系师生，自学青年和有关科技人员阅读参考。

楽しむ数理物理

——“なせ？”をどう解くか——

吉福康郎

講談社

* * *

趣味数学物理

——怎样解答“为什么？”——

〔日〕吉福康郎 著

田明华 译

张金榜 吕 品 校

责任编辑：纪 思

装帧设计：赵一东

插 图：王 蕾

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

妙峰山印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：4 3/4 字数：102千字

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数：1—15,200册 定价：0.70元

统一书号：13051·1453 本社书号：0515

原 著 前 言

本书作者在理工科大学教物理学，讲课时总是先简单讲几句，作为说明理论的开场白，或作为理论的具体应用例子，就象本书中所列举的话题那样。大部分学生兴致勃勃，凝神倾听。此外，每当作者同一些其它学科的专家朋友们谈到这些物理趣话时，他们也是兴味盎然。这些事实表明，大多数人对物理至少都有潜在性的爱好，这是无可非议的。

但是每当作者为了详细分析事例中所涉及到的现象，而在黑板上书写数学公式时，学生们的欢悦神态顿时消失，心情蓦地沉重起来。

具体的物理现象为什么要与抽象的数学联系在一起呢？作者本人刚进大学，初次接触物理教科书时，也曾有过同样想法。即便能够解方程式，也感受不到解方程式的现实意义，越学也就越觉得数学公式与具体的物理现象脱节，以致达到不想学物理的地步，造成一时的极度苦恼。

教科书的特点是，内容整理得过于概括，偏重于一般和抽象。结果，反而把要以数学公式表示现象的过程，也就是说把富有兴趣的部分给丢掉了。因此，光靠教科书学习物理，就会不知不觉地失掉浓厚的兴趣，还容易养成死背公式的习惯，考试一结束，公式也就忘光了，到头来，什么都没有记住。厌烦物理的人，恐怕或多或少都经历过这样一个过程吧。

由此便显示出教科书之外有启发性的参考书的必要性

了。它们是为了弥补在教科书中所未写进的、运用数学之前的那一部分内容。本书就具有这样的使命。

那么，首先让我们考虑一下，物理学为什么离不开数学？为了描述一种物理现象，必须注意与其实质有关的几个变量，并指出它们之间的定量关系。如果用一般的语言来表达这些关系的话，不但相当麻烦，而且也不确切，这就不得不借助于数学了。至于在不同的情况下，用什么样的数学形式表达合适，这一问题我们留待绪论中再谈。

数学是以独立的形式存在着的有关数量的抽象的知识体系。只要回顾一下历史，就不难看出，数学有相当一部分是为了更好地说明物理现象而逐步发展起来的。就拿牛顿发展微积分的理论来说吧，决不是与行星的运动毫无关系。由此可见，物理和数学本来就有不可分割的关系。

作为讲授物理的学者，我的目的并不是想把抽象的数学应用到物理学中来，而是想把二者仍然作为一体来使用。重点不只放在解方程式上，而且还要放在推导方程式的过程上。就是说想运用数学语言，来达到说明物理的目的。

本书强调了如何把物理思想化为方程式，并如何根据解方程式的结果分析其物理意义。这可以说是一本引导读者怎样学会运用数学语言来熟练地表达物理概念的书。但是本书并没有以读者具有解微分方程式的知识为前提。因此，在解微分方程式的过程中，须根据物理学的要求来确定近似的方法，并选择适当的解，而不可能把更高深的数学方法也包括进来。这些留待有关专著去解决。

本书所列举的是关于力学、热学与热力学、分子运动论的例子，尽可能选择常见的题材。其中也有因过于复杂而不易处理的问题。在遇到这种情况时，则尽量把现象简化，采

用所谓的“模型”予以计算。书中理想化、简单化的地方很多，但没有一一加以说明。由此所得的结果，严格说来，也许或多或少与实际有出入。不过，只要能抓住复杂现象的实质部分，那么，这种处理方法，作为数学公式化的例子，倒可以说更恰当些。其次，在解释物理现象方面，作者认为不仅要懂得理论是如何有力，同时也要看到它并不是绝对正确和万能的。本书如果能在读者寻求物理学的趣味性的过程中有所助益的话，那也就是作者的莫大荣幸了。

最后，本书在计划和初稿的审校期间，承蒙讲谈社小宫浩先生大力帮助，并得到了该社高桥忠彦先生的关心协助，才使初稿最后编订成册。在此谨向二位表示由衷的感谢。

一九七八年初冬

著者

目　录

绪论——物理为什么离不开数学?

由物理学这一名词会引起什么样的感想呢?有许多人会联想到学生时代为了应付考试而拼命死记硬背许多公式的情景。这些人对物理学似乎有着这样一种印象,即认为“它是专门大量摆弄复杂数学公式的,令人费解的学问”。

从我和我的同事这样一些以物理学为专业的人的观点来看,持有这种不佳印象的人如此之多,无论怎么说,不能不令人感到遗憾。把他们从对物理学的这种数学公式恐怖症中解救出来,这就是我的愿望之一。

诸位读者恐怕都看到过歌曲的乐谱吧。在歌曲中,节奏时而欢快,时而微妙地转慢等,有各种不同的旋律。要把这些旋律如实地表达出来,乐谱是相当复杂的。我有一次在朋友那里看到过一首新的曲子,本想唱一唱,可怎么也唱不上来。于是那位朋友扬扬得意地唱给我听了。我惊讶地说:“那么复杂的东西,你竟如此地熟练!”那位朋友回答说:“怎么,这还是从买的唱片直接记下来的呢。”类似这样的事情,在文艺界的歌唱演员之中是常见的。

举这个例子对于读者是否恰当,我心里并没有谱,尽管唱歌与乐谱有着密切的关系,但它们并不是一样的。不过,对于那些不太熟悉歌曲的人,或者今后要学习唱歌的人来说,刚一接触到乐谱,常常会把唱歌与乐谱混为一谈,或者由于不能很好地识谱,而体会不到唱歌的乐趣,结果也就只能认定“唱歌就是能够阅读复杂乐谱的问题了。”

所有厌烦物理的人也是如此，他们在没有尝到从物理的角度思考问题的乐趣之前，大概也就屈服于数学公式的困难了。这里，我要向那些由于不懂数学公式而厌烦物理的人强调指出，物理的真正乐趣不是在于反复玩弄数学公式，而是在于别的方面。

可以这样说，学习音乐不仅仅是限于唱歌，但同样也离不开读谱。在有读谱能力的人当中，有些人甚至只要浏览一下交响曲的总谱，各部分的音节就会在耳边回响起来。对于这样的人，应该说已把音乐和乐谱溶为一体了。若能达到这样的程度，那么，在欣赏乐曲时的理解能力就会加深一步。

学习物理学也和学习音乐很类似。有些人只要一看数学公式，立刻就能掌握其中的物理意义，就是说“理解数学公式”。也有人能用数学公式来表达自己的思想，也就是说如果能“灵活运用数学公式”，自己就能够享受到物理学深处的真正乐趣。我写本书的目的就是希望它成为读者达到这样程度的一个开端。

书中反复地出现了微分方程式。微分方程式是含有未知函数的微商(导数)的方程式。求这一未知函数就叫作“解微分方程式”。运用微分方程式绝不是不必要地选择复杂的表现形式，而是因为在表达不同情况的物理内容时，微分方程式是最准确而简便的数学表现形式。不过，这一点在初期阶段是难以切实体会到的。因此，在这里就让我们通过几个例题逐步地来探讨一下什么是最简便的处理方法吧。

例1 把某个人的年龄乘3再加上15就得到75。求这个人的年龄。

解1 因为最后加上15，在加之前的数是：$75-15=60$ $\Big\}$ (A)

由于最初是乘3，因此，乘 3之前的数是：$60\div3=20$ } (B)

答：20岁。

解2 假设这个人的年龄是x岁，按照题意：

$$3x+15=75 \quad (1)$$

从公式（1）的两边减去15，得

$$3x=60 \quad (2)$$

如果再把公式（2）的两边除以3，得

$$x=20 \quad (3)$$

答：20岁。

若把解1和解2加以比较，就可以看出解1的(A)阶段与从解2的公式(1)过渡到(2)是相同的，B阶段和从公式(2)过渡到公式(3)是经过了相同的程序。但是，在解1中的各阶段都是边捉摸题意边解题的，而在解2中只要先列出公式(1)，那么，就是不再考虑题的意思，也可以自动地解出来。在这一点上它是和解1不同的。换句话说，解1虽然也能明白其意思，但是，要稍麻烦些，而解2虽然不易理解其意思，却有便于应用的特点。

再让我们来看一个稍微复杂一点的问题。

例2 苹果每个100元，桔子每个50元，总共买了10个，共计花了650元。问苹果和桔子各买了几个？

解1

苹　果	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
桔　子	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
价　格	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000

按表，答：苹果3个，桔子7个。

解2 假定10个都买桔子的话，那么，价钱应为：50元×10个＝500元。每个苹果和桔子的价格差是：100元－50元＝50元。如果把买桔子换成买苹果，相当于每个增加50元。 (A)

付出的价钱650元比光买桔子的钱还要多：650元－500元＝150元。这150元就等于上述每一个苹果和桔子的差额50元的3倍。因此，苹果的个数是3个，桔子是：10个－3个＝7个。 (B)

答：苹果3个，桔子7个。

解3 把苹果和桔子的个数分别假定为x和y。因为总数是10个，所以：$x+y=10$ （1）

由于价钱的总值是650元，因此：

$$100x+50y=650 \qquad (2)$$

由公式（1）求得：$y=10-x$ （1′）

把它代入公式（2），整理后即是：

$$50x+500=650 \qquad (2')$$

解公式(2′)得：$x=3$

把它代入公式(1′)，即：$y=7$

答：苹果3个，桔子7个。

解1是最初级的作法。因为苹果和桔子的个数是整数，所以才能够用这种方法求解。但是，当未知数扩大到非整数的实数时，那么，由于表的格数有限，一般不能求解。

解2总是使人感到它是一种良好的方法，未知数在一般实数的情况下都可以解出。而且，各阶段的意思也容易理解。但是，对于其它类型的问题，是否也能随时想出这样巧妙的方法呢？这是令人担心的问题。

解 3 只要列出联立二元一次方程式(1)和(2)，以后就可以按照这里所用的代入法或加减法求解。公式(1)总是与“解1表”中的第一行和第二行中的任何对应格中的数值之和为10相吻合的。公式(2)的左边是表示计算表1第三行格中的合计价格时所用的公式。可以看出，在求解的过程中出现的公式(2′)意味着解2的(A)阶段(左边是表示把桔子10个中的x换成苹果时的价格)。而且，通过求解公式(2′)而导出的$x=3$是和(B)阶段相对应的。

解3的特点是，只要正确的列出最初的方程式，那么，在求解的过程中就自然地包括了解2中所涉及的计算技巧。也就是说，不需要考虑应用如解2那样的巧妙方法，也能推导出答案来。如果这样考虑的话，那就可以把解3看作是最“简便”的解法。但是，要弄通求解方程式的过程中出现的数学公式的意思（和理解解2相同）就困难了。

通过例1、2，可以说代数方法（例1的解2，例2的解3）在最初列方程式时，有必要彻底弄清楚题意，但是，到后面，则不去考虑它的意思也完全可以解出。实际上，这一倾向随着问题的深入，会越来越明显。现在我们再看看下面的问题。

例 3 有一个小的物体在流体中前进。由于流体粘滞性的阻力，物体的速度逐渐减慢。如果减速率和其速度成正比，每秒减少当时速度的1%。问100秒以后，物体的速度与最初比较变成多少？

解1。 由于每秒减速1%，所以，100秒应减100%

答：物体静止。

解1。 由于每秒减速1%，因此，可以认为前50秒减速50%，后50秒又减速50%。

即：$1/2\times 1/2=1/4$

答：变成原来速度的1/4，即0.25倍。

解 1.c 经最初的$100/3=33.3$秒后，速度是最初的$1-1/3=2/3$。经下面的100/3秒后，再减去1/3，成为$(1-1/3)^2=(2/3)^2$。经最后的100/3秒后再减去1/3，即变成$(1-1/3)^3=(2/3)^3=8/27$。

答：变成原来速度的8/27，即0.29倍。

解 1.d 经最初的$100/n$秒后，速度是最初的$1-1/n$。再经下一个$100/n$秒后是$(1-1/n)^2$。依此类推，当最后的$100/n$秒过去时，速度减为最初的$(1-1/n)^n$。当$n\to\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

答：变成原来速度的$\frac{1}{e}$。即约为0.36倍。

这里对于数e说明一下。e在物理中是经常出现的（下面的解2就是它的例子）。在开始时也许不容易掌握，可是用惯了它就会变成一个非常方便的数字。至于为什么方便，我想在读这本书的过程中会逐渐明白的。在这里，只要直观地弄清楚它是一个多大的数就可以了，e的定义是：

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182818\cdots\cdots。$$

如在极限符号里的$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$中，将$n=1$，2，……代入进去，用电子计算机计算，得：

$n=1$，$(1+1/1)^1=2$

$n=2$，$(1+1/2)^2=2.25$

$n=5$，$(1+1/5)^5=2.48832$

$n=10$，$(1+1/10)^{10}=2.5937425$

$n=50$，$(1+1/50)^{50}=2.691588$

$n=100$，$(1+1/100)^{100}=2.704814$

$n=365$，$(1+1/365)^{365}=2.7145675$

当n超过100时，就可以看出$(1+1/n)^n$已接近于e。按复利借过钱款的人，一般都会有与此相似的计算经验。比如，把10,000元钱以100%的年利借一年吧。如果把每天的利息转到第二天的本金里去的话（每天的复利），那么，一年以后的本利合计就成为上述公式里$n=365$时的值27,145元。

解 2　把t秒后的物体速度写成$v(t)$。则从时刻t秒到$t+\Delta t$秒（Δt秒是微小的时间间隔）之间的速度的增量（在本例中实际上是负数）为：

$$\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t) \qquad (1)$$

因为时间间隔Δt极其微小，所以Δv也是微小的。因此，在t秒～$t+\Delta t$秒期间，不妨把速度看作是等于$v(t)$。在这期间，速度只减少$v(t)(\Delta t/100)$。因此，（1）式可以写成：

$$v(t+\Delta t)-v(t)=-\frac{v(t)}{100}\Delta t \qquad (2)$$

将公式（2）两边除以Δt，得：

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=-\frac{v(t)}{100} \qquad (2')$$

当$\Delta t\to 0$时，得到微分方程式：

$$\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{v(t)}{100} \qquad (3)$$

解此方程（求解过程省略），得：

$$v(t)=v_0e^{-t/100} \qquad (4)$$

其中v_0是在$t=0$时的速度（$v(0)=v_0$），因此，100秒后（$t=100$）的速度为：

$$v(100)=v_0e^{-1}=v_0/e \qquad (5)$$

答：是最初的速度的$1/e$，即0.36…倍。

读者也许已注意到，解1_a、1_b、1_c是近似的解，解1_d和解2是严格的解。那么前面那3个为什么不是严格的解呢？这是由于把减速的整个时间100秒分成了1～3个阶段，各个阶段的时间间隔过大，不能把速度看成是不变的缘故（请注意，在解2中划线的部分）。在解1_d中，是把各阶段的时间间隔分成无限小（$n\to\infty$的时候，$100/n\to 0$），所以才变成了严格的解。解1_a，1_b，1_c分别相当于$n=1$，2，3的情况。这里，要注意，随着n的增大，时间间隔缩小，随之逐步接近于严格的解。

但是，解1_d的方法的成功是因为这个问题比较简单，当减速之比，在对速度的依赖关系更加复杂的情况下，一般地说，公式变得过于烦琐而不能实用。所以，当$n\to\infty$时的极限值就不能象解1_d的（1）式那样简单地求得。

下面让我们研究一下解2的情况。从公式（1）到公式（2）这一阶段，实质上是和1_a～1_d相同的。例如，把公式（2）改写一下，就变为：

$$v(t+\Delta t)=(1-\frac{\Delta t}{100})v(t)。$$

在这里如果和解1_d时一样取$\Delta t=100/n$，将成为：

$$v(t+\frac{100}{n})=(1-\frac{1}{n})v(t)$$

这一式子正是意味着时间每经过$100/n$秒，速度就减为1—

$1/n$倍。

若把公式（2）稍加变换，就可以得微分方程式（3），所以，它的意思是和公式（2）相同的，从这种意义上，也可以说在微分方程式（3）中，几乎包括了解1_d中求解最终答案的整个过程。实际上，根据电子计算机使用的数值计算来解公式（3）的时候，所采用的方法与解1_d中取n为较大整数值，例如$n = 1,000$时是相同的。

无论如何，并不是靠偶然的想象，而只要是遵循着一定的程序，谁都能够求出正确结果的这种代数方法，尤其是微分方程式，才可以说是最简便而稳妥的解法。

那么，先用代数法解微分方程式（3），再求解（4），然后进一步到求出公式（5）的最终结果，这一过程是和解1_d的哪一阶段相对应呢？实际上这个问题是难以回答的。如果勉强回答的话，也许可以说，它是运用了在实质上与计算机的数值计算相同的，不用任何近似的，最严密的代数方法。

这样，到列出微分方程式为止，其意思也就明白了（反过来讲，如果不明白其意思的话，那也就列不出方程式来），但一到求解阶段，那就完全成了脱离物理的单纯数学上的问题了。所以要这样说，是因为不仅限于这个问题，即便是几乎不懂物理的数学家也可以解物理的微分方程式。但是，在解的过程中，他也许不理解其解的物理意义。

对于物理学家，要求会解微分方程式，这是理所当然的事情。不过，对于那些非物理学家来说，如果能够理解推导方程式的过程的话，那么就可以认为已经懂得了这一问题的意思（包括解的方法）了。本书就是基于这种立场，没有涉及任何微分方程式的解法，只给出解的结果，而着重于从物理的角度对其结果进行解释。但这绝不是轻视解方程式技术

的重要性。我在开头已强调过，因为只有“理解数学公式”和“能灵活运用数学公式”的人，才能享受到物理学的乐趣，所以，这是最基本的。

那么，无论是对数学有信心的人也好，还是害怕数学公式的人也好，先让我们暂且记住这些。下面就进入新的章节。