整　函　数

〔苏联〕А. И. 马尔库什维奇　著
张顺燕　译

上海科学技术出版社

Алексей Иванович Маркушевич
Целые Функции
Изд. «Наука», М., 1965

整 函 数

〔苏联〕А. И. 马尔库什维奇 著
张 顺 燕 译
上海科学技术出版社出版
(上 海 瑞 金 二 路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 3.625 字数 77,000
1984 年 7 月第 1 版 1984 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—17,000

统一书号: 13119·1168 定价: 0.43 元

目　录

第一章

整函数的概念

1. 处处收敛的幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

是多项式概念的自然推广.

如果式中从某一个 $n+1$ 开始所有的系数都转化为零，那末，作为这种幂级数的特殊情况，我们就得到次数不超过 n 的多项式：

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n. \tag{2}$$

从中学课本就已知道的最简单的幂级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

不是处处收敛的；它仅当 $|x|<1$ 时收敛. 在 $|x|\geqslant1$ 时，因系数太大(这里对任何 n 都有 $a_n=1$)而不能收敛.

可以证明，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0 \tag{3}$$

时，幂级数(1)才对任何 x 收敛.

这里我们仅限于证明条件的充分性. 在 $x=0$ 时，级数(1)收敛. 今设 $x\neq0$. 于是，由条件(3)我们可以找到这样一个 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2|x|}$ 或 $|a_n||x^n|<\frac{1}{2^n}$ 成立. 但是，这意味着当 $n>N$ 时，幂级数(1)的所有项按绝对值比以 $\frac{1}{2}$ 为公比的几何级数的项来得小. 所以级数(1)不

但收敛，并且绝对收敛.

以下我们将认为条件(3)是满足的. 实际上，有时为方便计，我们利用级数(1)处处收敛的一个更简单的充分条件(但非必要条件)：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0. \tag{3'}$$

事实上，在这种情况下，级数(1)的后项与前项的比

$$a_{n+1}x^{n+1}:a_nx^n=(a_{n+1}:a_n)x$$

(假定 $a_n\neq 0, x\neq 0$)的极限同样是零. 根据著名的达朗贝尔判别法就可知道，级数对任意 x 收敛.

例如，因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以级数 $$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}+\cdots$$

处处收敛.

级数 $$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

同样处处收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right]=0.$$

2. 处处收敛的幂级数(1)的和叫做整函数.

由此得出，每一个多项式都是整函数.

整函数的其它例子有指数函数 $a^x(0<a, a\neq 1)$, $\cos x$, $\sin x$. 事实上，在数学分析教科书中(借助于泰勒公式)已证明了它们中的每一个都可表为处处收敛的幂级数的和：

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n(\ln a)^n}{n!}+\cdots, \tag{4}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots, \tag{5}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots. \tag{6}$$

在 $a=e=2.71828\cdots$(e 是无理数)的特殊情况下，我们由公式(4)得到:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots. \tag{7}$$

从这些公式出发，可以得到整函数的其它一些简单的例子:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$e^{x^3}=1+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^6}{2!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{n!}+\cdots,$$

$$\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{n!}+\cdots,$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots,$$

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{5!}+\cdots,$$

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\cdots,$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

等等。

所有这些例中的整函数或者是初等的(指数函数和三角函数)，或者是初等函数的简单组合。

但是，当然，整函数远不是总能表成初等函数的组合. 例如整函数

$$f(x)=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}+\cdots,$$

$$g(x)=\frac{x^2}{(\ln 2)^2}+\frac{x^3}{(\ln 3)^3}+\cdots+\frac{x^n}{(\ln n)^n}+\cdots,$$

$$h(x)=x+\frac{x^2}{2^4}+\frac{x^3}{3^6}+\cdots+\frac{x^n}{n^{2n}}+\cdots$$

就是这种例子，还有无穷多个由形如(1)的级数定义的其它例子，只要它们的系数满足唯一的条件(3).

3. 到现在为止我们研究的整函数都默不作声地假定了幂级数的系数是实数，并且变量 x 也取实值. 但是没有什么会妨碍我们把这一级数或那一级数认为是复数的，只要预先假定级数的系数满足条件(3). 事实上，在复数 x 取任何模值的情况下，这个条件保证了级数的绝对收敛性. 下面，为了避免误会起见，我们继续用字母 x 表示实数，而复自变量我们将用字母 z 来表示，设 $z=x+iy$，其中 x 和 y 是实数，$i=\sqrt{-1}$. 象通常一样，复数 z 在几何上用以 x 和 y 为坐标的平面上的点来表示. 特别地，当 $y=0$ 时 z 就取实值 $z=x$. 任何整函数都可以看作定义在全平面上的复变量 z 的函数. 对指数函数和三角函数我们将沿用以前的名称和记号，我们有：

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots, \tag{7}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots, \tag{8}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots. \tag{9}$$

4. 整函数是复变量解析函数的特殊情况. 如果复平面上任一区域 G 内的每一点 z 都对应于一个确定的复数 w，就说

在区域 G 上定义了一个复变量 z 的函数；w 称为函数在 z 的值，并记为

$$w=f(z);$$

符号 f 可换用其它拉丁字母或希腊字母来表示．

设 $w=f(z)$ 是定义在区域 G 上的一个函数，如果对于区域 G 内的每一点 z_0，都可以指出一个邻域（即以这一点为中心的圆），在这个邻域中函数值可以表示为 $z-z_0$ 的幂级数的和：

$$w=f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots +c_n(z-z_0)^n+\cdots, \tag{10}$$

那么，这个复变函数叫做在区域 G 内的解析函数．

特别地，当区域 G 是以点 z_0 为中心的圆时，要 $f(z)$ 在区域 G 内是解析的，只要级数(10)在整个圆内表示函数 $f(z)$ 就可以了．

为了得到 $f(z)$ 在这个圆的另外任意一点 z_1 的邻域中的幂级数展式，只要在公式(10)中把 $z-z_0$ 表示为

$$z-z_0=(z-z_1)-(z_0-z_1),$$

并按差 $z-z_1$ 的幂展开级数的每一项 $a_n(z-z_0)^n$，然后把 $z-z_1$ 的同次幂的项归并在一起（也就是合并同类项）．

对于圆形区域所说的话，同样适用于当 G 是整个复平面的情况；整个复平面可视为中心在任何一点，譬如说在坐标原点，半径为无穷大的圆．

在这种情况下，在公式(10)中可设 $z_0=0$，并要求级数在整个平面上收敛（正如上面所说的，是处处收敛的幂级数）．

于是，整函数 $f(z)$ 可定义为在整个复平面 z 上解析的复变函数．

5． 复变函数 $f(z)$ 在它的定义域内任一点 z 的导数定义

为当 $z_1\to z(z_1\neq z)$ 时比 $\dfrac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}$ 的极限(如果它存在)，也就是

$$f'(z)=\lim_{z_1\to z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}.$$

由导数的这个定义可以导出求导数的法则，这些法则对于实变函数的情形已经建立了，对于复变函数的情况仍然保持成立．特别是，

$$[(z-z_0)^n]'=n(z-z_0)^{n-1}.$$

可以证明，在以 z_0 为中心的某一圆内收敛的幂级数(10)的和在这一圆内具有任意阶导数．其中每一个导数都可用对级数(10)进行相应次数的逐项微商的方法得到：

$$\begin{aligned}
f'(z)&=c_1+2c_2(z-z_0)+3c_3(z-z_0)^2+\cdots\\
&\quad+nc_n(z-z_0)^{n-1}+\cdots,\\
f''(z)&=1\cdot2c_2+2\cdot3c_3(z-z_0)+\cdots\\
&\quad+(n-1)nc_n(z-z_0)^{n-2}+\cdots,\\
f'''(z)&=1\cdot2\cdot3c_3+2\cdot3\cdot4c_4(z-z_0)+\cdots\\
&\quad+(n-2)(n-1)nc_n(z-z_0)^{n-3}+\cdots,
\end{aligned}$$

……………………………………………

作为例子，用逐项求导数的办法从公式(7)，(8)和(9)我们得到

$$(e^z)'=e^z,\quad (\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z.$$

在 $f(z)$，$f'(z)$，$f''(z)$，$\cdots$，$f^{(p)}(z)$，$\cdots$的级数中设 $z=z_0$，我们得到

$$c_0=f(z_0),\quad c_1=f'(z_0),$$

$$c_2=\frac{f''(z_0)}{2!},\ \cdots,\quad c_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!},\ \cdots;$$

因此，幂级数的系数用级数和的诸导数在点z_0的值表示了出来。所以，表示函数 $f(z)$ 的级数可以记为

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)$$
$$+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}(z-z_0)^p+\cdots.$$

这种形式的级数叫做函数 $f(z)$ 的泰勒级数。这样一来，解析函数 $f(z)$ 的幂级数就是它的泰勒级数。

由幂级数的系数表达式可得，如果两个按$z-z_0$的幂展开的幂级数的和在某个以z_0为中心的某一个圆内重合，那末，$z-z_0$的同次幂项的系数一定两两相等。

事实上，如果

$$a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$
$$=b_0+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots=f(z),$$

那末，
$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{和} \quad b_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

这就是，在$n=0, 1, 2, 3, \cdots$时，$a_n=b_n$（$f^{(0)}(z)$所指的是和函数$f(z)$本身，而$0!$理解为等于1）。

由幂级数的和有导数这一事实推出，在区域G内解析的函数$f(z)$在这个区域的每一点有导数，也就是在区域G内可微；所以它在区域G内也是连续的。

这就是为什么复变数的解析函数的定义可以表述为下面的形式：定义在某个区域G内的复变数z的函数$f(z)$，如果它在G内是可微的，则称它在这个区域内是解析的。在函数论的教科书中通常用的就是这个定义。

因此，整函数可以定义为在全平面可微的函数。

设$f(z)$和$g(z)$是任意两个整函数。由求导法则可得：

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}\quad (若 g(z)\neq 0),$$

$$\{f[g(z)]\}'=f'[g(z)]g'(z).$$

由前两个公式可得，两个整函数的和、差、积是整函数.

由第三个公式可得，当分母处处不为零时，两个整函数的商仍然是整函数.

第四个公式是复合函数求导法，由它可得，整函数的整函数仍然是整函数.

例如函数

$$e^{\sin z},\quad e^{e^z},\quad \sin(e^z),\quad \sin(\cos z)$$

等等都是整函数.

6. 由于处处收敛的幂级数的(绝对)收敛性，它具有许多有限和的性质.

在任何情况下，对幂级数施行加法、减法和乘法运算，象对依 z 的升幂排列的多项式施行相应的运算一样，服从相同的法则. 例如，如果

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$
$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots,$$

那末，

$$\left.\begin{aligned}f(z)\pm g(z)=&a_0\pm b_0+(a_1\pm b_1)z+(a_2\pm b_2)z^2+\cdots\\&+(a_n\pm b_n)z^n+\cdots,\\f(z)g(z)=&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z\\&+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\&+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}\\&\quad+\cdots+a_nb_0)z^n+\cdots.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

如果还知道$g(z)$对任何的z都不为零，那末可以断言(见5)，商$f(z):g(z)$是整函数；相应的幂级数由$g(z)$的幂级数去除$f(z)$的幂级数得到，除法法则与排列好的多项式的除法相同。

我们来做这个运算的前面几步：

$$
\begin{array}{l|l}
a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots & b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots \\
\cline{2-2}
 & \dfrac{a_0}{b_0}+\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}z+\cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-a_0+\dfrac{a_0b_1}{b_0}z+\dfrac{a_0b_2}{b_0}z^2+\cdots \\
\hline
\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\dfrac{a_2b_0-a_0b_2}{b_0}z^2+\cdots \\[2ex]
-\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\dfrac{(a_1b_0-a_0b_1)b_1}{b_0^2}z^2+\cdots \\
\hline
\dfrac{(a_2b_0-a_0b_2)b_0-(a_1b_0-a_0b_1)b_1}{b_0^2}z^2+\cdots
\end{array}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

于是，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots, \tag{12}$$

这里c_0, c_1, c_2, $\cdots$具有上面所求出的值(见商的前几项)。可以相信，商的每一个系数c_n可由前面的系数$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$通过公式

$$c_n=-\frac{c_0b_n+c_1b_{n-1}+\cdots+c_{n-1}b_1}{b_0} \tag{13}$$

来表示。

7. 我们看整函数(7)，(8)和(9)。在公式(7)中设$z=iw$，其中w仍是复变数，我们求得：

$$
\begin{aligned}
e^{iw} &= 1+\frac{iw}{1!}-\frac{w^2}{2!}-\frac{iw^3}{3!}+\frac{w^4}{4!}+\cdots \\
&= \left(1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\cdots\right) \\
&\quad +i\left(w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\cdots\right),
\end{aligned}
$$

由此(同公式(8)和(9)比较)

$$e^{iw}=\cos w+i\sin w. \tag{14}$$

这就是通过三角函数表达指数函数的著名的欧拉公式. 注意,在公式(8)和(9)中,余弦的分解式只包含变数的偶次幂,而正弦的分解式只包含变数的奇次幂; 因此, 对变数的复数值而言, 余弦是偶函数而正弦是奇函数. 所以把 w 换成 $-w$ 公式(14)就变为下面的公式:

$$e^{-iw}=\cos w-i\sin w. \tag{15}$$

把公式(14)和(15)逐项相加和相减, 又可得到两个用指数函数表示三角函数的欧拉公式:

$$\cos w=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}, \quad \sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}. \tag{16}$$

由欧拉公式知道,在整函数的领域中可以这样说,复变数的指数函数和三角函数是亲缘最近的.

从级数相乘的例子我们可构造出 e^{z_1} 的级数和 e^{z_2} 的级数的乘积,其中 z_1 和 z_2 是任意两个复数.

因为 $e^{z_1}=1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\cdots+\frac{z_1^n}{n!}+\cdots,$

$$e^{z_2}=1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}+\cdots,$$

所以

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2}=1&+\frac{1}{1!}(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)\\
&+\frac{1}{3!}\left(z_1^3+\frac{3!}{2!1!}z_1^2z_2+\frac{3!}{1!2!}z_1z_2^2+z_2^3\right)+\cdots\\
&+\frac{1}{n!}\left(z_1^n+\frac{n!}{(n-1)!1!}z_1^{n-1}z_2\right.\\
&\qquad+\frac{n!}{(n-2)!2!}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots\\
&\qquad\left.+\frac{n!}{1!(n-1)!}z_1z_2^{n-1}+z_2^n\right)+\cdots\\
=1&+\frac{1}{1!}(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1+z_2)^2\\
&+\frac{1}{3!}(z_1+z_2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n+\cdots,
\end{aligned}
$$

由此得出

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{17}$$

这个公式叫做指数函数的*加法定理*．我们看到了，当这一函数的两个值相乘时，相应的指数(复数 z_1 和 z_2)相加．

特别地，在这里设 $z_1=z$ 和 $z_2=-z$，我们就得到：

$$e^z\cdot e^{-z}=e^0=1. \tag{18}$$

由于这个公式，乘积 $e^z\cdot e^{-z}$ 不等于零，由此首先推出，*指数函数* e^z *永不为零*，也就是方程 $e^z=0$ 不仅没有实根也没有虚根(我们把不是实数的任何复数叫做虚数；例如 i，$(1-i)$ 都是虚数)．

等式(18)使得有可能用特殊的例子去检验，如果分母总不为零，则两个整函数的商是整函数(见第5段)．商 $1/e^z$ 显然满足这一条件．由公式(18)可得，

$$\frac{1}{e^z}=e^{-z}=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots;$$

这的确是一个整函数(在公式(7)中我们用 $-z$ 代替 z 就得到它).

下面将证明(见 9), 任何处处不为零的整函数 $g(z)$ 都可以表示成 $g(z)=e^{h(z)}$, 这里 $h(z)$ 也是一个整函数.

显然, 商 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 可以表示成积 $f(z)e^{-h(z)}$ 的形式, 由此又看到, 这是一个整函数(作为两个整函数的乘积).

把(14)和(15)乘起来, 我们得到:

$$e^{iw}\cdot e^{-iw}=(\cos w+i\sin w)(\cos w-i\sin w),$$

再由等式(18)得:

$$1=\cos^2 w+\sin^2 w. \tag{19}$$

因此, 对任何复变数的值正弦和余弦的平方和都等于 1.

在等式(17)中设 $z_1=z$ 是任意一个复数, 而 $z_2=2\pi i$, 我们得到:

$$e^z e^{2\pi i}=e^{z+2\pi i}.$$

但是根据欧拉公式(14)

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1;$$

因此

$$e^z=e^{z+2\pi i}, \tag{20}$$

即, 指数函数是以纯虚数 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

再计算复数 e^z 的模和幅角. 根据公式(17)我们得到:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}.$$

但是 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$; 因此,

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$$

我们得到了 e^z 的三角函数表示: $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 由此得出,

$$|e^z|=e^x,\quad \operatorname{Arg}(e^z)=y+2n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

所得公式的第一个指出, 为了计算 e^z 的模只要在指数中留下

实部 x 就行了(去掉被加数 iy); 例如, $|e^{1+i\sqrt{2}}|=e$.

8. 我们来研究方程

$$e^z=A. \tag{21}$$

因为我们知道,当 $A=0$ 时这个方程没有任何一个根,所以我们认为 $A\neq 0$. 由复数 e^z 和 A 相等导出,它们的模相等,而幅角只可以相差 2π 的整数倍. 但是在第 7 段中已经指出, 如果 $z=x+iy$, 那末, e^z 的模是 e^x, 而 e^z 的一个幅角值是 y.

所以由(21)必定得到等式:

$$e^x=|A|,\quad y=\arg A+2n\pi\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

因此, $x=\ln|A|$ 而

$$z=x+iy=\ln|A|+i(\arg A+2n\pi), \tag{22}$$

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

于是, 方程(21)的任意一个根都应该包含在公式(22)中. 反之,形如(22)的每一个数(它们有无穷多个!)都是这个方程的根. 事实上,

$$e^z=e^{\ln|A|+i(\arg A+2n\pi)}=e^{\ln|A|}e^{i(\arg A+2n\pi)}$$

$$=|A|[\cos(\arg A+2n\pi)+i\sin(\arg A+2n\pi)]$$

$$=|A|[\cos(\arg A)+i\sin(\arg A)]=A.$$

这就证明了,方程(21)对任何的 A, 除去一个例外值 $A=0$, 有无穷多个根(22). 换言之, 无穷高次方程

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=A$$

对任何复数 $A\neq 0$ 有无穷多个根.

自然地, 方程(21)的每一个根叫做复数 A 的(自然)对数值. 以 e 为底产生 A 的幂指数一般记为 $\mathrm{Ln}\,A$, 由此公式(22)可改写为下面的形式:

$$\mathrm{Ln}\,A=\ln|A|+i\,\mathrm{Arg}\,A=\ln|A|+i(\arg A+2n\pi), \tag{22'}$$

其中 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

由此得到，任何复数有无穷多个对数值，它们彼此相差 2π 的整数倍. 当 $n=0$ 时，公式(22′)给出的值称为对数的主值：

$$\ln A=\ln|A|+i\arg A. \tag{22''}$$

9. 我们把方程(21)中的复数 A 作为自变数，而把它所对应的值 z，即方程的根，作为 A 的函数来研究. 这个函数 $z=\operatorname{Ln} A$ 叫做指数函数 $A=e^z$ 的反函数. 在第 8 段中我们已经发现，$\operatorname{Ln} A$ 是一个定义在除去点 $A=0$ 之外的全平面内的多值函数，并由公式(22′)表示.

由反函数的求导法则，这一法则对于复变函数的相应叙述仍然有效，得出导数 $(\operatorname{Ln} A)'$ 存在并等于

$$\frac{1}{(e^z)'}=\frac{1}{e^z}=\frac{1}{A} \quad (A\neq0).$$

我们用复自变数的习惯表示 z 来代替 A. 这时有

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z,$$

$$(\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z} \quad (z\neq0).$$

函数 $\operatorname{Ln} z$ 不是整函数，第一是因为它在点 $z=0$ 无定义(在这点它变为 ∞)，第二是因为它是多值的，它的值彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍.

但是如果 $g(z)$ 是任意一个整函数，它在平面的任何一点都不为零，那末 $f(z)=\operatorname{Ln} g(z)$ 同样是整函数(精确些说，$\operatorname{Ln} g(z)$ 代表无穷多个整函数，它们彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍).

事实上，根据复合函数求导的一般法则，我们得到

$$[\operatorname{Ln} g(z)]'=\frac{1}{g(z)}\, g'(z)=\frac{g'(z)}{g(z)},$$

即，函数 $\operatorname{Ln} g(z)$ 在复平面的每一点都有导数(我们记得，