现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚　升著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚 昇 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是现代数学丛书中的一种，汇集了作者从 1964 年起同他的合作者在这一领域中的科研成果，内容包括绪论，超球的 Cauchy 型积分，复超球面上的奇异积分方程，复超球面的 Hadamard 主值，Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分，矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分，强拟凸域的 Henkin 型积分等七章。本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及这方面的数学科研人员参考。

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚 昇 著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 9　字数 218,000

1982 年 11 月第 1 版　1982 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—12,800

统一书号：13119·1040　定价：（科五）1.35 元

Singular Integral in Several Complex Variables

This monograph collects the works of the author and his colleagues in singular integrals of several complex variables since 1964. The kernels that give rise to such singular integrals on the boundaries of the domain are Cauchy–Fantappiè kernels and Szegö Kernels. A brief description of these kernels is given as a preliminary in the introdution of the book. In the first chapter, the author starts from the most important simply connected irreducible domain, i.e., the ball in C^n, and makes an extensive investigation on the integral of Cauchy type on the hypersphere. The author's conclusion shows that, quite different from the case of one complex variable, there are many ways to define the principle value of Cauchy integral, and accordingly, various forms of Plemelj formula are obtained. With these results as a tool, the author advances the theory of singular integral equations with constant coefficients and variable coefficients on the hypersphere in chapter two. This was something completely new at that time. In chapter three, the concept of Hadamard priciple value is extended to the space of several complex variables. They define the Hadamard priciple value of singular integral on hypersphere, in terms of which, the limiting values of the derivative of the Cauchy integral can then be expressed. The next two chapters deal with the Cauchy integral on two kinds of classical domains defined by prof.L.K. Hua. The author points out that the limiting value of the integral on the characteristic manifold is essentially different from that on the other parts of the boundary. Finally, in chapter six, the Cauchy integrals defined by Henkin–Ramirez kernel and Stein–Kerzman kernel of the strictly pseudo convex domains are studied, and generalized plemelj formula is obtained.

目　　录

绪　论

§0.1 引　言

1964年起，我与孙继广同志一起研究了多复变数的Cauchy型积分以及奇异积分方程. 十年浩劫，前后中断了十多年，1979年起，我与史济怀同志一起重新开始继续研究多复变数的奇异积分这个课题. 多复变数的奇异积分是多复变数函数论中一个重要而活跃的分支，内容丰富*)，我无意在这本书中，对国内外的成果作全面的介绍与论述. 这本书的主要内容，只是我与我的合作者在这方面所做研究工作的一个阶段性小结.

Cauchy型积分在复变数函数论中的重要性已毋庸多说，它不但有着函数论本身的重要意义，而且是奇异积分方程、边界值问题等学科中不可缺少的工具. 最基本最简单的不可约域之一是超球，所以本书从研究$\mathbb{C}^n$中超球的Cauchy型积分开始. 有趣的是：与单复变数时不一样，在多复变数时，有多种的Cauchy主值，以及多种式样的Plemelj公式，这是第一章的内容.

众所周知，一维的奇异积分方程是以单复变数的Cauchy型积

*) 例如可参阅Kerzman[1]，此文对多复变数的奇异积分的最近发展作了很好的介绍.

分作为主要工具的. 第二章的内容是将第一章中所得到的有关 $\mathbb{C}^n$ 中超球的 Cauchy 型积分的结果,应用到高维奇异积分方程中去, 建立了 $\mathbb{C}^n$ 中复超球面上的奇异积分方程理论. 这项工作, 在当时也许是首次将多复变数的 Cauchy 型积分作为工具来研究高维奇异积分方程, 因为在以往高维奇异积分方程的研究中似乎均未用到多复变数的 Cauchy 型积分.

作为奇异积分的 Cauchy 主值的推广, Hadamard 考虑了高阶发散奇异积分的有限部分, 并用此来解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题. Fox 将此想法推广到复平面. 在第三章中,将 Hadamard 主值的概念推广到多复变数空间, 研究了 $\mathbb{C}^n$ 中复超球面上的 Hadamard 主值, 并用此来研究超球的 Cauchy 型积分的导数.

E. Cartan 证明了: 在 $\mathbb{C}^n$ 中可递的不可约的有界对称域仅有六种可能性,其中四类为典型域,二类例外域. 华罗庚在他的名著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》一书中, 对此作了十分深刻的研究. 在这基础上, 对典型域的 Cauchy 型积分进行研究是第四章及第五章的内容. 在第四章中讨论了第四类典型域的 Cauchy 型积分, 即Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分. 在第五章中讨论了第一类典型域的 Cauchy 型积分, 即矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分. 可以看出, 这两章的工作是与前面几章相关联的. 还可以看出,当点从区域内部趋于特征流形时, Cauchy 型积分的极限值只有一种表达形式,而趋于边界的其余部分时,其表达形式仍是多样的.

全纯域一定是拟凸域, 而 Levi 猜想指出, 拟凸域一定是全纯域, 所以拟凸域在多复变数中成为十分重要的研究对象. 在本书的最后一章中, 对于强拟凸域的 Henkin-Ramirez 核及 Stein-Kerzman 核所定义的 Henkin-Ramirez 型积分及 Stein-Kerzman 型积分进行了研究, 得到一些也许是有趣的结果. 在第一章中所

提到的那种现象，即当点趋于边界时，相应的奇异积分的极限值的表达方式是多样的，在这里，这种现象依然发生．至于非强拟凸域，由于它与强拟凸域是有本质上的区别的，它的奇异积分还有待于进一步的探讨．在这一章的最后，对一般域上的 Bochner-Martinelli 型积分顺便进行了讨论，主要指出：这时候，上述现象，不再发生．

本书的内容取自龚昇[1]，[2]，龚昇、孙继广[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，龚昇、史济怀[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，孙继广[1]以及史济怀[1]．

多复变数函数的积分表示的核是很多的，同样多复变数的奇异积分也是很多的，但以上所讨论的也许是一些最主要的核所定义的奇异积分．

由于作者水平有限，写得也很匆忙，一定有不少不妥甚至错误之处，希望能得到读者的批评与指正．

§0.2 Cauchy-Szegö 核

在多复变数中，没有与单复变数完全相当的 Cauchy 核．人们从各种不同的观点来推广单复变数的 Cauchy 核到多复变数中去．

一种重要的观点是从 Hilbert 空间的观点来看待 Cauchy 核．

考虑 $\mathbb{C}$ 中单位圆 $|z|<1$，边界为 $w=e^{i\theta}$，则 Cauchy 核

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{1-ze^{-i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}z^n e^{-in\theta}d\theta.$$

显然，$\left\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是 $|z|<1$ 中解析的函数类的完备正交系；而 $\left\{\frac{w^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ 是在 $|w|=1$ 上的连续函数的就范正交系．这样就可得到：在 $|z|\leqslant 1$ 上连续，在 $|z|<1$ 中解析的函数，可以用 Cauchy 积分表达之，即 Cauchy 核对这类函数有再生性质．在这

种观点下得到的核，称为 Cauchy-Szegö 核. 当 $\mathbb{C}$ 中的区域不是单位圆时，所得的 Cauchy-Szegö 核就不再是 $\frac{1}{2\pi i}\frac{dw}{w-z}$.

因之，想把单复变数的 Cauchy-Szegö 核推广到多复变数空间 $\mathbb{C}^n$ 中的域 Ω 上去，只要找到 $\mathbb{C}^n$ 中的一组函数 $\{\varphi_\nu(z)\}$ ($\nu=0,1,2,\cdots$)，$\{\varphi_\nu(z)\}$ 在 Ω 中，对 Ω 中的解析函数类而言，组成完备正交系，在 Ω 的边界 $b\Omega$ 上(或其中一部分，如特征流形上)，$\{\varphi_\nu(z)\}$ 是就范正交的，如果 $\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}$ ($z\in\Omega$, $w\in b\Omega$) 一致收敛，则这就是所要的 Cauchy-Szegö 核.

华罗庚[1]证明了：若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, Ω 是圆型、有界、单连通域，包有原点，且对原点而言是星状的，Ω 的特征流形为 $\mathscr{L}$，且 $\mathscr{L}$ 也是圆型的、紧致的，那末 Ω 的 Cauchy-Szegö 核是存在的. 他给出了 $\varphi_\nu(z)$ 的具体作法，这时，$\varphi_\nu(z)$ 均为 z 的齐次多项式，从而可以具体地作出 Cauchy-Szegö 核来. 例如他给出了 $\mathbb{C}^n$ 中超球的 Cauchy-Szegö 核.

若 $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $u=(u_1,\cdots,u_n)$, 且 $z\bar{z}'<1$, $u\bar{u}'=1$, 则 $z\bar{z}'<1$ 的 Cauchy-Szegö 核为

$$\omega_{2n-1}^{-1}(1-z\bar{u}')^{-n}\dot{u}, \tag{0.2.1}$$

这里 ω_{2n-1} 为 $u\bar{u}'=1$ 的体积，它等于 $\frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$, $\dot{u}$ 为 $u\bar{u}'=1$ 的体积元素.

超球的 Cauchy-Szegö 核是十分简洁的，但是对于这样一个重要的不可约域，正如 W. Rudin 在[1]中所指出的，直到 1958 年华罗庚的名著[1]出版之前，谁也没有写出这个核来.

不但如此，华罗庚在[1]中应用群表示论，具体给出了四类典型域的 Cauchy 核，详细请参阅他的原著.

对于前述华罗庚所讨论的圆型域，我们还证明了：凡在 Ω 内解析的函数 $f(z)$，如果属于 Hardy 族 H_1，则可表为 Cauchy 积分

和 Schwarz 积分，而且 $f(z)\in H_1$ 是 $f(z)$ 可表为 Poisson 积分的充要条件．(龚昇，孙继广[1].)

由于这些结果以后要用到，我们给予证明如下．

若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，$\Omega$ 满足上述条件，$\mathscr{L}$ 是它的特征流形，称 Ω 内解析的函数 $f(z)$ 属于 Hardy 族 H_1，若

$$\int_{\mathscr{L}}|f(r\xi)|\dot{\xi}$$

对 $0\leqslant r<1$ 一致有界，这里 $\xi\in\mathscr{L}$，$\dot{\xi}$ 表示 $\mathscr{L}$ 的体积元素．我们有

定理 0.2.1 若 $f(z)\in H_1$，则 $f(z)$ 可以表为 Cauchy 积分．

证 华罗庚[1]证明了：对于上述圆型域 Ω，存在一组完备正交函数系 $\psi_m(z)$，它在 $\mathscr{L}$ 上是就范正交的，于是 Ω 的 Cauchy 核 (Cauchy-Szegö 核，简称 Cauchy 核，下同) $H(z,\bar{\xi})$ 等于

$$\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m(z)\overline{\psi_m(\xi)}, \tag{0.2.1}$$

这里 $z\in\Omega$，$\xi\in\mathscr{L}$，而每一个 $\psi_m(z)$ 为齐次多项式．由假设 $f(z)\in H_1$，根据 Bochner[1] 的一条定理知道，境界值 $f(\xi)$ 绝对可积．于是作 Cauchy 型积分

$$g(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)H(z,\bar{\xi})\dot{\xi},$$

它是存在的，并且表示一个对 z 的解析函数．由 Cauchy 核的定义，知

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m(z)\int_{\mathscr{L}}f(\xi)\,\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi},$$

这是因为固定 z 时，级数(0.2.1)的收敛对 ξ 是一致的．记

$$C_m=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)\,\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi}, \tag{0.2.2}$$

于是
$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\psi_m(z).$$

因为 $f(z)$ 在 Ω 内解析，故有 Taylor 展开

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\psi_m(z),$$

取 $z=r\eta$, $\eta\in\mathscr{L}$, $0<r<1$, 由于 ψ_m 为齐次多项式, 设其次数为 k_m, 则

$$f(r\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m r^{k_m}\psi_m(\eta).$$

当 $r<1$ 固定时, 它对 η 在 $\mathscr{L}$ 上的收敛是一致的. 于是

$$\int_{\mathscr{L}}f(r\xi)\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi}=\int_{\mathscr{L}}\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^{k_l}\psi_l(\xi)\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi}=r^{k_m}a_m. \qquad (0.2.3)$$

由(0.2.2), (0.2.3)得

$$C_m-a_m r^{k_m}=\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)-f(r\xi))\psi_m(\xi)\dot{\xi}.$$

因而 $$|C_m-a_m r^{k_m}|\leqslant M_m\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)-f(r\xi)|\dot{\xi},$$

此处 $M_m=\max\limits_{\xi\in\mathscr{L}}|\psi_m(\xi)|$. 由于 ψ_m 为齐次多项式, $\mathscr{L}$ 是紧致的, 故 M_m 是存在的. 令 $r\to1$, 由 Riesz 定理知 $C_m=a_m$, 故 $g(z)=f(z)$, 即 $f(z)$ 可以用 Cauchy 积分表达

$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}, \qquad (0.2.4)$$

证毕.

如果 $f(z)\in H_1$, 则由定理 0.2.1, 它可表为 Cauchy 积分, 即 (0.2.4) 成立. 固定 $w\in\Omega$ 时, $f(z)H(z,\bar{w})$ 也属于 H_1, 故由 (0.2.4),

$$\int_{\mathscr{L}}f(\xi)H(\xi,\bar{w})\dot{\xi}=f(0).$$

取共轭, 得

$$\int_{\mathscr{L}}\overline{f(\xi)}\,H(w,\bar{\xi})\dot{\xi}=\overline{f(0)}. \qquad (0.2.5)$$

在(0.2.5)中取 $w=z$, 于是

$$\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}=f(z)+\overline{f(0)},$$

即
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}$$
$$-\frac{1}{2}(f(0)+\overline{f(0)})+i\mathrm{Im}f(0)$$
$$=\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}$$
$$-\frac{1}{2V(\mathscr{L})}\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})\dot{\xi}+i\,\mathrm{Im}\,f(0),$$
这里 $V(\mathscr{L})$ 表示 $\mathscr{L}$ 的体积. 所以, 若记 $f(z)=u(z)+iv(z)$, 则有
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)\left(2H(z,\xi)-\frac{1}{V(\mathscr{L})}\right)\dot{\xi}+i\,\mathrm{Im}f(0).$$

我们称
$$S(z,\xi)=2H(z,\xi)-\frac{1}{V(\mathscr{L})} \tag{0.2.6}$$
为 Ω 的 Schwarz 核. 于是有

定理 0.2.2 若 $f(z)\in H_1$, 则 $f(z)$ 可以表为 Schwarz 积分
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)S(z,\xi)\dot{\xi}+i\,\mathrm{Im}f(0), \tag{0.2.7}$$
其中 $u(z)=\mathrm{Re}f(z)$, $S(z,\xi)$ 如(0.2.6)所示.

华罗庚从 Cauchy 核出发, 定义
$$P(z,\bar{\xi})=\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{z})}{H(z,\bar{z})} \tag{0.2.8}$$
为 Poisson 核, 并称由 $\mathscr{L}$ 上的连续函数 $u(\xi)$ 所定义的 Poisson 积分 $\int_{\mathscr{L}}u(\xi)P(z,\xi)\dot{\xi}$ 为调和函数.

由定理 0.2.1, 可得

定理 0.2.3 若 $f(z)$ 在 Ω 中解析, 则 $f(z)$ 可以表为 Poisson 积分
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)P(z,\xi)\dot{\xi} \tag{0.2.9}$$
的充分必要条件为 $f(z)\in H_1$.

证 充分性. 若 $f(z)\in H_1$, 则当 w 固定时, 易见
$$f(z)H(z,\bar{w})\in H_1,$$

故由定理 0.2.1, 有

$$f(z)H(z, \bar{w})=\int_{\mathscr{L}} f(\xi)H(\xi, \bar{w})H(z, \bar{\xi})\dot{\xi}.$$

特别取 $w=z$, 除以 $H(z, \bar{z})$ 即得(0.2.9).

必要性. 若 $f(z)$ 可以表为(0.2.9), 取 $z=r\eta(0\leqslant r<1), \eta\in\mathscr{L}$, 则

$$\int_{\mathscr{L}}|f(r\eta)|\dot{\eta}\leqslant\int_{\mathscr{L}}\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)|P(r\eta, \xi)\dot{\xi}\dot{\eta}. \qquad (0.2.10)$$

由于 $P(r\eta, \xi)=P(r\xi, \eta)$, 故(0.2.10)的右端为

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{L}}\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)|P(r\xi, \eta)\dot{\xi}\dot{\eta}&=\int_{\mathscr{L}}\left(\int_{\mathscr{L}}P(r\xi, \eta)\dot{\eta}\right)|f(\xi)|\dot{\xi}\\&=\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)|\dot{\xi},\end{aligned}$$

所以 $f(z)\in H_1$. 这里的积分次序能够交换是因为 $|f(\xi)|$ 可积, 而且当 $0<r<1$ 固定时, $P(r\xi, \eta)$ 对 ξ, η 在 $\mathscr{L}$ 上是连续的, 这里同时利用了 Poisson 核的性质

$$\int_{\mathscr{L}}P(z, \xi)\dot{\xi}=1 \qquad (z\in\Omega).$$

在单复变数时, Poisson 核为 Schwarz 核的实部. 在现在一般来说是不对的, 因为调和函数未必是解析函数的实部. Schwarz 核的实部为

$$B(z, \xi)=H(z, \bar{\xi})+H(\xi, \bar{z})-\frac{1}{V(\mathscr{L})}, \qquad (0.2.11)$$

虚部为

$$C(z, \xi)=\frac{1}{i}(H(z, \bar{\xi})-H(\xi, \bar{z})). \qquad (0.2.12)$$

从 Schwarz 公式, 即得: 若 $f(z)=u(z)+iv(z)\in H_1$, 则

$$u(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)B(z, \xi)\dot{\xi}, \qquad (0.2.13)$$

$$v(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)C(z, \xi)\dot{\xi}+\operatorname{Im}f(0). \qquad (0.2.14)$$

从(0.2.13)、(0.2.14)可得，若 $f(z)\in H_1$，则

$$f(z)=\int_{\mathscr{L}} f(\xi)B(z,\ \xi)\dot{\xi}, \tag{0.2.15}$$

$$f(z)=i\int_{\mathscr{L}} f(\xi)C(z,\ \xi)\dot{\xi}+f(0). \tag{0.2.16}$$

即当 $f(z)\in H_1$ 时，$f(z)$ 可以用 $B(z,\ \xi)$，$C(z,\ \xi)$ 为核的积分表示之. B-调和函数也能用这些核来表达，问题在于对 B-调和函数来讲，Dirichlet 问题未必有解，并且容易看出 $B(z,\ \xi)$、$C(z,\ \xi)$ 都不是正的. 例如，若 $\eta\in\mathscr{L}$，则 $B(r\eta,\ -\eta)$ 等于

$$\frac{2}{V(\mathscr{L})}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n-1}^{m}(-r)^m-\frac{1}{V(\mathscr{L})}=\frac{1}{V(\mathscr{L})}\left(\frac{2}{(1+r)^n}-1\right),$$

若 $n>1$，且 r 充分接近 1 时，这是小于零的.

关于 Poisson 积分的进一步研究，请参阅华罗庚[1]，华罗庚与陆启铿[1]以及龚昇、史济怀[1]等.

一般来说，对于 $\mathbb{C}^n$ 中的域，很难将 Cauchy-Szegö 核明确地写出来. 但对于强拟凸域(见 § 0.4)，Fefferman[1] 及 Boutet de Monvel-Sjöstrand[1] 得出如下的重要结果:

若 Ω 为强拟凸域，则当 $z\in\overline{\Omega}$，$w\in b\Omega$，$z\neq w$ 时，Cauchy-Szegö 核 $H(z,\ w)$ 对 z, w 而言均属于 C^∞，且

$$H(z,\ w)=F(z,\ w)\psi^{-n}(z,\ w)+G(z,\ w)\log\psi(z,\ w),$$

这里 F, G, $\psi\in C^\infty(\overline{\Omega}\times b\Omega)$，$\psi$ 由 $b\Omega$ 明确地表达出来. 若 $z\neq w$，则 $\mathrm{Re}(\psi(z,\ w))>0$; 当 $w\in b\Omega$ 时，$F(w,\ w)\neq 0$.

这就明确地给出当 $z=w$ 时，$H(z,\ w)$ 的奇性.

§ 0.3 Cauchy-Fantappiè 核

另一种重要观点是从外微分形式的观点来看待 Cauchy 核. 由于当 $z\neq w$ 时，

$$d\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w-z}\,dw\right)=0,$$