概率论与数理统计学习指导

于学汉　主编

张丽宏　董秀媛　王　宏　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

3602/ 564 94

本书是概率论与数理统计课程的学习指导书，与《概率论与数理统计教程》（于学汉，兵器工业出版社，1996年）配套，但也可单独使用．

本书内容条理清楚，论述严谨、基本概念确切，基本理论体系完整，基本方法和技巧亦有较多的介绍．全书共十章，每章均由基本要求、内容提要、问题与思考、典型例题、习题与答案等五部分组成．

本书可作为工科本科生、专科生、考研者或自学者的参考用书，也可供工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/于学汉主编．—北京：北京理工大学出版社，1999.8

ISBN 7-81045-598-2

Ⅰ．概…　Ⅱ．于…　Ⅲ．①概率论②数理统计　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第46155号

责任印制：王　军　　责任校对：陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路7号）

邮政编码 100081　电话(010)68912824

各地新华书店经售

北京地质印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米　16开本　12.75印张　297千字

1999年8月第1版　1999年8月第1次印刷

印数：1—4000册　定价：16.50元

前　言

正如书名所示，本书是概率论与数理统计课程的学习指导书，与一般的概率论与数理统计课程的教科书是有所区别的．作为教学参考书和辅导教材，本书与目前北京理工大学使用的教材《概率论与数理统计教程》（于学汉．兵器工业出版社，1996年，以下简称《教程》）配套．本书的章次，书中的概念、记号、论述等都与《教程》一致．但是，本书也可以独立于《教程》，单独使用．

本书汇集了北京理工大学从事工科本科概率论与数理统计教学工作的有关教师们多年来的实践经验与成果．本书最初是一本内部讲义，1993年初酝酿编写，1995年初投入本科教学实践，几经重印．在使用中受到了读者的欢迎，同时也发现了其中的一些错误和缺憾．1997年，我们又在教学实践的基础上，对其进行了完善、修改与补充，现在正式出版发行．

参加本书编写的同志有：于学汉（第一、四、五章）、张丽宏（第二、三章）、董秀媛（第六、七、八章）、王宏（第九、十章）．于学汉同志是本书的主编．

本书内容条理清楚，在工科本科数学知识的范围内，论述严谨、基本概念确切、基本理论体系完整、基本方法和技巧亦有较多的介绍．

本书共十章，每章均由基本要求、内容提要、问题与思考、典型例题、习题与答案等五部分组成．

每一章的基本要求部分，都是根据全国高等学校工科数学课程教学指导委员会审订的“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写的．它规定了每一章教学上应达到的基本要求．它是一个纲，纲举目张；内容提要部分，是一章主要内容的简要概括，便于读者将一章的内容进行归纳、总结，使之条理化，也为读者阅读其他部分提供方便；问题与思考部分，是有针对性地提出一些容易产生误解的概念、理论、方法和一些值得探讨的问题，并作了较为透彻的释疑，使读者能从不同侧面加深对基本概念、基本理论和基本方法的理解；典型例题部分，精选了一些例题，题型较为多样，通过对一些例题的分析，引出思路与设想，再进行推导、论证，或在解题之后，对所用的方法、技巧稍加总结，为培养读者分析问题和解决问题的能力，提高解题技巧，提供帮助；习题与答案部分，目的是希望读者能自己进行分析，找出解题思路，亲自推导、论证．考虑到考研读者的需要，本书也适当增加了一些考研试题中常见的题型．以上所述，是我们编写本书的一些设想与目的，能否符合客观实际，还有待实践的检验．

本书初稿完成后，北京航空航天大学数理系副主任邵鸿飞副教授及郭绍建副教授审阅了书稿，并提出了很多宝贵意见．在此，一并表示衷心的感谢．

限于水平，书中的错误和不当之处在所难免，恳请读者批评、指正．

编　者

1999年6月于北京

目　录

第一章　随机事件与概率

一、基本要求

①了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算．

②了解概率的定义（包括古典概率、几何概率、概率的频率定义和概率的公理化定义），掌握概率的性质并会应用它们进行概率计算．

③理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式并会应用它们进行概率计算．

④理解事件独立性的概念并会应用它进行概率计算．

⑤掌握伯努利（Bernoulli）概型并会应用它进行概率计算．

二、内容提要

1．随机事件

(1)随机试验．

是指满足下述三个条件的试验．

①可以在相同的条件下重复进行．

②试验的全部可能结果不止一个，并且在试验之前能明确知道它们或知道它们包含在某个范围内．

③每次试验必发生全部可能结果中的一个且仅发生一个，但某一次试验究竟发生哪一个可能结果，在试验之前不能预言．

随机试验简称试验，用 E 表示．

(2)样本空间．

试验 E 的全部可能结果构成的集称为 E 的样本空间，用 S 表示．

试验 E 的一个可能结果称为 E 的一个基本事件，用 ω 表示．基本事件 ω 是样本空间 S 的元素，基本事件也称为样本点．

(3)随机事件．

试验 E 全部可能结果中某一确定的部分称为随机事件，简称为事件．事件可以用大写字母 A、B、C 等表示．事件是由基本事件组成的，事件是样本空间的子集．但是，在概率论中，并不总是把样本空间的一切子集都当成事件，而是样本空间中具有某种性质的子集才是事件*．

事件的发生：在一次试验中，当且仅当 A 中的一个基本事件发生时，则称 A 发生．A 发生也称 A 出现．

在一次试验之前，不能预言哪一个基本事件一定发生，因此，也就不能预言事件 A 一定发

* 关于事件概念的确切含义，可见参考书目[1]P2、P12 的注．

生．这就是说，在一次试验中，事件 A 可能发生也可能不发生．

必然事件：在每次试验都必发生的事件，称为必然事件，用 S 表示．

不可能事件：在每次试验都必不发生的事件，称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示．

必然事件与不可能事件虽不具有“在一次试验中，可能发生也可能不发生”的特点，但是，它们仍是事件．

(4)事件的关系与运算．

①事件的关系与运算的概念．

设试验 E 的样本空间为 S，A、B、$A_i(i=1,2,\cdots)$ 为 E 中的事件．

含于或包含：若 A 发生必然导致 B 发生，则称 A 含于 B，记作 $A\subset B$；或称 B 包含 A，记作 $B\supset A$.

相等：若 $A\subset B$ 又 $B\subset A$，则称 A 等于 B，或称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

积或交：A 与 B 都发生称为 A 与 B 的积或交，记作 AB 或 $A\cap B$. A 与 B 都发生也叙述为 A 与 B 同时发生或 A 发生且 B 发生．

和或并：A 与 B 至少有一个发生称为 A 与 B 的和或并，记作 $A\cup B$. A 与 B 至少有一个发生也叙述为 A 发生或 B 发生．

差：A 发生而 B 不发生称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

互斥或互不相容：若 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥，或称 A 与 B 互不相容．否则，称 A 与 B 相容．

对立或互逆：若 A、B 满足 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$，即在每次试验中 A、B 必发生其一但不能同时发生，则称 B 为 A(或 A 为 B)的对立事件，记作 $B=\overline{A}$(或 $A=\overline{B}$)，或称 A 与 B 互为对立事件，或称 A 与 B 为互逆事件．

不发生：A 不发生记作 $\overline{A}$，显然 $\overline{A}=S-A$，$A=\overline{\overline{A}}$，$A$ 与 $\overline{A}$ 互为对立事件．

两个事件的积、和、互斥等概念可以推广到任意有限个事件或可列无穷多个事件的情形中去．

例如，A_1、A_2、$\cdots$、A_n 都发生，称为 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的交，记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_n$ 至少发生一个，称为 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_n$ 中任意两个事件都是互斥的，称这 n 个事件是互斥的或称这 n 个事件是两两互斥的．

类似地，可以给出可列无穷多个事件的积、和、互斥等概念，这里就不叙述了．

②一些常用的事件之间的关系式．

1° 对任意的事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset S$.

2° $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$.

3° $AB=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\Leftrightarrow B\subset\overline{A}$.

4° 对任意的两个事件 A、B，有

$$A=AB\cup A\overline{B},\ B=AB\cup\overline{A}B,$$

$$A\cup B=A\cup\overline{A}B=B\cup A\overline{B}=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB,$$

$$A-B=A\overline{B}=A-AB=(A\cup B)-B.$$

5° 对任意的三个事件 A、B、C，有

$$A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C,$$

$$A(B-C)=AB-AC=AB\overline{C}=AB-C=AB-ABC.$$

注：上述各式右端运算符$\cup$两边的事件有些是互斥的，运算符$-$的前后的两个事件有些是有包含关系的．

③事件运算所满足的性质．

1° 交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

2° 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(AB)C=A(BC)$.

3° 分配律 $(A\cup B)C=AC\cup BC$,

$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

4° 吸收律 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B, AB=A$；反之亦然，即若 $A\cup B=B$ 或 $AB=A$，则 $A\subset B$.

特别地，有 $A\cup A=A, A\cup S=S, A\cup\varnothing=A, AA=A, AS=A, A\varnothing=\varnothing$.

5° 对偶律（德·摩根律）

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分配律和对偶律还可以推广到任意有限个事件或可列无穷多个事件的情形中去．例如有

$(\bigcup_i A_i)B=\bigcup_i(A_iB), (\bigcap_i A_i)\cup B=\bigcap_i(A_i\cup B)$.

$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}, \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$.*

④事件的图示表示法．

它给出了事件的关系与运算的一种直观解释，读者可以采用这种方法来帮助理解某些事件之间的关系与运算．例如，前面给出的一些常用的事件之间的关系式、事件运算所满足的性质等．

2. 概率及其性质

概率是事件发生可能性的一种度量，它是概率论中最基本的概念之一．下面介绍它的几种定义．

(1)古典概率．

设试验 E 满足：

①样本空间 S 只含有 n 个基本事件，记作 ω_1、ω_2、$\cdots$、ω_n，即

$$S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

②基本事件 ω_1、ω_2、$\cdots$、ω_n 发生是等可能的．则称 E 为古典概型．

对于古典概型 E，若事件 A 是由 k 个基本事件组成的，则 A 的概率规定为$\frac{k}{n}$，即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}. \tag{1.1}$$

用公式(1.1)计算的概率称为古典概率．

(2)几何概率．

在概率论发展的早期，人们还研究了另一种试验，它的全部可能结果是无穷多个且具有

* $\bigcup_i A_i$ 表示 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，类似地，$\bigcap_i A_i$ 表示 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

“等可能性”. 在这种试验中,事件概率的计算一般可以利用几何的方法来解决 . 因此,人们把这种试验称为几何概型 .

我们以平面的情形来说明几何概型 . 在这种概型中,试验的全部可能结果构成平面上某一可求积的区域 S,其面积大于零 . S 是试验的样本空间,S 中一切可求积的子集是事件 . 事件 A 发生,即试验的结果为 A 中的点,或称试验结果落入 A. S 中的基本事件发生具有“等可能性”的含义是:事件 A 发生的概率与 A 的面积成正比,而与 A 的形状及它在 S 中的位置无关 . 于是,在这种几何概型中,事件 A 的概率规定为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}. \tag{1.2}$$

用公式(1.2)计算的概率称为几何概率 .

对于一维、三维或多维的几何概型问题,可仿平面的情形进行讨论 .

(3)概率的频率定义 .

①事件的频率及其稳定性 .

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的一个事件 . 把试验 E 重复进行 n 次,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 m 称为事件 A 的频数 . 事件 A 的频数 m 与试验的次数 n 之比,称为在这 n 次试验中事件 A 的频率,记作 $P^*(A)$,即

$$P^*(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.3}$$

显然,事件 A 的频率 $P^*(A)$ 与试验次数 n 有关;而且对于一个具体的数值 n,某一回 n 次试验与另一回 n 次试验所得到的事件 A 的频率 $P^*(A)$ 也未必相同 . 然而,实践表明:当试验次数 n 很大时,事件 A 的频率 $P^*(A)$ 几乎稳定地接近一个常数 P. 频率这种性质称为频率的稳定性,它是事件本身所固有的 .

②概率的频率定义 .

频率的稳定性使人们产生了这样的认识:

可以用事件的频率来描述事件的概率 . 于是,就有了概率的频率定义 .

定义 1.1　在一组不变的条件下,重复作 n 次试验,记 m 是 n 次试验中事件 A 发生的次数 . 当试验次数 n 很大时,如果频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某数值 p 附近摆动,而且一般地说,随着试验次数的增加,这种摆动的幅度越来越小,则称数值 p 为事件 A 在这一组不变的条件下发生的概率,记作 $P(A)=p$.

概率的频率定义也称为概率的统计定义 .

(4)概率的公理化定义 .

①概率的公理化定义 .

下面扼要地介绍一下概率的公理化定义 . 在这个定义中,概率是用列举其所具有的基本性质的方法来定义的,而事件可以简单地理解为样本空间 S 中具有某种性质的子集 .

定义 1.2　设试验 E 的样本空间为 S,如果对于每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应,且满足下面三条公理:

公理 1(非负性)　对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2(规范性)　对必然事件 S,有 $P(S)=1$;

公理 3(完全可加性)　若可列无穷多个事件 A_1、A_2、…、A_i、…互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.4}$$

那么称 $P(A)$为事件 A 的概率．

②概率的性质．

从概率的三条公理出发，可以推导出概率的其他性质．

性质 1 $P(\varnothing)=0$;

性质 2 （有限可加性） 若 A_1、A_2、…、A_n 互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.5}$$

性质 3 对任意事件 A，有

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \tag{1.6}$$

性质 4 若 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.7}$$

$$P(A)\leqslant P(B). \tag{1.8}$$

特别地，对任意事件 A，有

$$P(A)\leqslant 1. \tag{1.9}$$

性质 5（加法公式或加法定律） 对任意两个事件 A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.10}$$

性质 6（一般加法公式或一般加法定律） 对任意 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\leqslant i_1<i_2\leqslant n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{k-1}\cdot \sum_{i\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i). \tag{1.11}$$

特别地，当 $n=3$ 时，式(1.11)将变为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \tag{1.11'}$$

3．条件概率及有关的公式

(1)条件概率．

①条件概率的定义．

定义 1.3 设 A、B 是任意两个事件且 $P(B)>0$，在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的条件概率 $P(A|B)$定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.12}$$

②条件概率的性质．

利用条件概率的定义、概率的三条公理和性质，不难证明条件概率的如下一些性质．

设 $P(C)>0$，则

1°对任意的事件 A，有 $0\leqslant P(A|C)\leqslant 1$;

2°$P(S|C)=1$，$P(\varnothing|C)=0$;

3°对可列无穷多个互不相容的事件 A_1、A_2、…、A_i、…，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid C\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid C).\tag{1.13}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\mid C\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\mid C).\tag{1.14}$$

4° 对任意的事件 A,有

$$P(A\mid C)=1-P(\overline{A}\mid C).\tag{1.15}$$

5° 若 $A\subset B$,有

$$P(B-A\mid C)=P(B\mid C)-P(A\mid C).\tag{1.16}$$

$$P(A\mid C)\leqslant P(B\mid C).\tag{1.17}$$

6° 对任意两个事件 A、B,有

$$P(A\cup B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)-P(AB\mid C).\tag{1.18}$$

对任意 n 个事件 A_1、A_2、$\cdots$、A_n,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\mid C\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\mid C)-\sum_{i\leqslant i_1<i_2\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}\mid C)+\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}\cdot\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\mid C)+\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\mid C\right).\tag{1.19}$$

综上所述,可见条件概率与概率具有相同的性质 .

(2)乘法公式 .

对任意两个事件 A、B.

当 $P(B)>0$ 时,有 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$. (1.20)

当 $P(A)>0$ 时,有 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$. (1.20′)

对任意 n 个事件 A_1、$A_2\cdots A_n(n\geqslant2)$,当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).\tag{1.21}$$

式(1.20)、(1.20′)称为两个事件的乘法公式,式(1.21)称为 n 个事件的乘法公式或一般乘法公式 . 乘法公式也称为乘法定律 .

(3)全概率公式 .

若事件组 B_1、B_2、$\cdots$、B_n 满足

①B_1、B_2、$\cdots$、B_n 互不相容且 $P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$,

②$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,

则对任意事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).\tag{1.22}$$

式(1.22)称为全概率公式 .

满足条件①和②的事件组 B_1、B_2、$\cdots$、B_n 也称为完备事件组 .

注:a.完备事件组的条件②可改为 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i\supset A$,式(1.22)也成立;

b.完备事件组中事件的个数为可列无穷多时,全概率公式也成立 . 此时式(1.22)将变成为:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A\mid B_i).\tag{1.22′}$$

c.应用全概率公式解决问题的关键往往在于,找出适合解决该问题的一个完备事件组．把 B_1、B_2、…、B_n 看成事件 A 发生的各种“可能的原因”或“可能的前提条件”,这样一种看法将有助于找出这个完备事件组．

(4)贝叶斯(Bayes)公式．

若 B_1、B_2、…、B_n 是一完备事件组,则对任意事件 $A(P(A)>0)$,有

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{1.23}$$

式(1.23)称为贝叶斯公式．

4. **事件的独立性**

(1)事件独立性的概念．

定义 1.4 对任意两个事件 A、B,若

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.24}$$

则称 A、B 相互独立或称 A、B 独立．

定义 1.5 对任意三个事件 A、B、C,若

$$\left.\begin{aligned}&P(AB)=P(A)P(B)\\&P(AC)=P(A)P(C)\\&P(BC)=P(B)P(C)\\&P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

则称 A、B、C 相互独立,或称 A、B、C 独立．

一般地,对任意 n 个事件 A_1、A_2、…、$A_n(n\geqslant2)$,若

$$\left.\begin{aligned}&P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) && 1\leqslant i<j\leqslant n\\&P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) && 1\leqslant i<j<k\leqslant n\\&\quad\vdots\\&P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

则称 A_1、A_2、…、A_n 相互独立,或称 A_1、A_2、…、A_n 独立．

事件的独立性是概率论中一个重要的概念,对它有如下的几点说明．

①必然事件 S 和不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件相互独立．

②若事件 A、B、C 满足式(1.25)中前三个式子时,则称 A、B、C 是两两独立的．显然,若 A、B、C 相互独立,则 A、B、C 两两独立．反之不然．

③在实际问题中,有时不是用定义而是根据事件之间的实际意义来判断 n 个事件是否独立．这时要注意判断是否正确．

(2)事件独立性的性质．

性质 1 若 $P(B)>0$,则 A、B 独立的充分必要条件是:$P(A|B)=P(A)$;

若 $P(A)>0$,则 A、B 独立的充分必要条件是:$P(B|A)=P(B)$.

性质 2 若 A、B 独立,则 A、$\overline{B}$ 独立,$\overline{A}$、B 独立,$\overline{A}$、$\overline{B}$ 独立．

性质 2 可推广到 $n(n\geqslant2)$个事件独立的情形中去,其叙述如下:

若 A_1、A_2、…、A_n 独立,则 B_1、B_2、…、B_n 也独立,其中 B_i 为 A_i 或$\overline{A_i}(i=1,2,\cdots,n)$.

特别地，若 A_1、A_2、…、A_n 独立，则 $\overline{A_1}$、$\overline{A_2}$、…、$\overline{A_n}$ 也独立．

性质 3 若 A_1、A_2、…、$A_n(n\geqslant 2)$ 独立，则其中任意 $m(1<m<n)$ 个事件也独立．

性质 4 若 A_1、A_2、…、$A_n(n\geqslant 2)$ 独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]. \tag{1.27}$$

5. 伯努利(Bernoulli)概型

若试验 E 只有两个可能结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q(0<p<1)$，则称 E 为伯努利试验或伯努利概型．

设 E 是伯努利试验，"把 E 在相同的条件下，独立地重复进行 n 次"* 作为一个试验，则称这个试验为 n 重伯努利试验或 n 重伯努利概型，记为 E^n．在 n 重伯努利概型中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(\text{“}A\text{ 恰好发生 }k\text{ 次”})=b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n \tag{1.28}$$

三、问题与思考

1. 事件的和或者差的运算的等式两端一般是不能"移项"的．例如由

$$A\cup B=C \quad \not\Rightarrow \quad A=C-B,$$

由

$$A-B=D \quad \not\Rightarrow \quad A=D\cup B.$$

但是，增加一些条件便可以"移项"了．有下述结果：

(1)若 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=C$，则 $A=C-B$；

(2)若 $A\supset B$，且 $A-B=D$，则 $A=D\cup B$．

利用事件的图示表示法，容易验证上述两个结果是正确的．

2. 计算古典概率时，有些初学者常常会问：如果需要用排列或者组合计数时，在什么情况下用排列，在什么情况下用组合呢？

答 对于这个问题，要在搞清楚题意的基础上，根据解题的简洁与方便或者解题者的习惯，选择适合解决该问题的试验 E 及样本空间 S，由此决定采用排列或者组合来计数．

让我们通过下面的例子来说明上面的论述．

例 10 个产品中有 6 个正品 4 个次品，现从中任取 2 个，求下列事件的概率：

(1)A：这 2 个产品都是次品；

(2)B：这 2 个产品 1 个是次品 1 个是正品；

(3)C：第一次取到的是次品，第二次取到的是正品．

对于这个例子，有两点说明：

a.在没有特别指明的情形下，一般认为产品都是有不同编号的．例如，在此例中，可以认为编号为 1～6 的产品为正品，编号为 7～10 的产品为次品．

b.在概率论中，"任取 2 个"与"随机地不放回地取 2 个"含义相同．而且对于"任取 2 个"有两种理解：

---

* 关于此句话的含义，请看参考书目[1]P21 的解释．

第一种是，每次随机地取 1 个记录其编号后不放回，再取下一个．这样取了 2 次共取了 2 个产品．在这种理解下，任取 2 个产品是有先后顺序的．

第二种是，随机地不放回地一下子取了 2 个产品．在这种理解下，任取 2 个产品是没有先后顺序的．

上述两种理解都是对的．

解 (1)**法 1** 按照第一种理解，任取 2 个产品是有顺序的，基本事件总数 $n_1=A_{10}^2=90$，A 的有利场合数* $k_1=A_4^2=12$，于是所求概率为

$$p_1=P(A)=\frac{k_1}{n_1}=\frac{2}{15}.$$

法 2 按照第二种理解，任取 2 个产品是不计顺序的，基本事件总数 $n_1'=C_{10}^2=45$，A 的有利场合数 $k_1'=C_4^2=6$，于是所求概率为

$$p_1=P(A)=\frac{k_1'}{n_1'}=\frac{2}{15}.$$

(2)**法 1** 按照第一种理解，任取 2 个产品是有顺序的，基本事件总数 $n_2=A_{10}^2=90$，B 的有利场合数 $k_2=A_6^1A_4^1+A_4^1A_6^1=48$，于是所求概率为

$$p_2=P(B)=\frac{k_2}{n_2}=\frac{8}{15}.$$

法 2 按照第二种理解，任取 2 个产品是不计顺序的，基本事件总数 $n_2'=C_{10}^2=45$，B 的有利场合数 $k'_2=C_6^1C_4^1=24$，于是所求概率为

$$p_2=P(B)=\frac{k_2'}{n_2'}=\frac{8}{15}.$$

(3)由题意知，这时需要考虑顺序．基本事件总数 $n_3=A_{10}^2=90$，C 的有利场合数 $k_3=A_4^1A_6^1=24$，于是所求概率为

$$p_3=P(C)=\frac{k_3}{n_3}=\frac{4}{15}.$$

由上述解法可见，对于(1)、(2)用排列或者组合都可以，对于(3)就需要用排列了．

3. 计算古典概率，要正确求出基本事件总数和事件的有利场合数．考虑欠全面时，容易发生重复计算或者漏算的情况．

让我们通过下面的例子来分析重复计算和漏算是怎样发生的．

例 一年有 12 个月，假定每人出生在任何一个月份是等可能的．任选四个人，求下列事件的概率：

(1)A：四个人出生的月份全不相同；

(2)B：四个人中至少有两个人出生月份相同．

解 基本事件总数 $n=12^4=20736$.

(1)A 的有利场合数 $k_1=A_{12}^4=11880$，于是所求概率为

$$p_1=P(A)=\frac{k_1}{n}=\frac{55}{96}.$$

---

* 习惯上，称 A 中的基本事件数为 A 的有利场合数．

(2)由于 $B=\overline{A}$,于是所求的概率为

$$p_2=P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{A_{12}^4}{12^4}=\frac{8856}{20736}=\frac{41}{96}.$$

对于 B 的有利场合数似乎还有下述两种求法:

①四个人中至少有两个人出生月份相同可如下实现:四个人中先任取两人,他们的出生的月份相同,可以是一年中任意一个月;另外两个人的出生月份分别是一年中任意的月份．由此可得 B 的有利场合数为 $k_2'=C_4^2\times 12\times 12^2$,于是所求的概率为

$$p_2=\frac{k_2'}{n}=\frac{1}{2}.$$

②四个人中至少有两个人出生月份相同可如下实现:四个人中恰有两人出生月份相同、恰有三人出生月份相同、恰有四人出生月份相同,这三种情况互不相容．由此可得 B 的有利场合为 $k_2''=C_4^2\times 12\times 11\times 10+C_4^3\times 12\times 11+C_4^4\times 12=12\times 705$,于是所求的概率为

$$p_2''=\frac{k_2''}{n}=\frac{235}{576}.$$

显然,(2)的上述两种解法都是有错误的．在①中,B 的有利场合数有重复计算;在②中,B 的有利场合数有漏算．下面让我们具体分析一下．

在①中,B 的有利场合数在下述三种情况中都有重复计算的情形发生:

a.四个人中有两人出生月份相同,另两人出生月份也相同(但与前两人出生月份不同).在这种情况下,把四人分成二人、二人的两个小组共有$\frac{1}{2}\times C_4^2=3$ 种可能的分法,而不是 $C_4^2=6$ 种可能的分法．实际上,不妨设四人为张、王、李、赵．分成二人、二人的两个小组的三种分法为$\boxed{\text{张、王}}$,$\boxed{\text{李、赵}}$;$\boxed{\text{张、李}}$,$\boxed{\text{王、赵}}$;$\boxed{\text{李、王}}$,$\boxed{\text{张、赵}}$;再没有其他的分法了．因此,在这种情况下,有利场合数为$\frac{1}{2}C_4^2\times 12\times 11$,而不是在 k_2'中所计算的 $C_4^2\times 12\times 11$. 也就是说,对于这种情况,在 k_2'中多算了$\frac{1}{2}C_4^2\times 12\times 11$ 个有利场合数．

b.四个人中有三人出生月份相同,另一人出生月份与前三人不同．在这种情况下,把四人分成三人、一人的两个小组共有 C_4^3 种可能的分法,而不是在 k_2'中所计算的 $C_3^2\times C_4^3$ 种可能的分法．原因如下,比如张、王、李三人出生月份相同,赵出生月份与他们不同．这一种情况我们记为$\boxed{\text{张、王、李}}$,赵;而在 k_2'中,由于是先任取两人,就将这一种情况误认为如下的三种情况了:$\boxed{\text{张、王}}$、$\boxed{\text{李}}$,赵;$\boxed{\text{张、李}}$、$\boxed{\text{王}}$,赵;$\boxed{\text{王、李}}$、$\boxed{\text{张}}$,赵．因此,在这种情况下,有利场合数为 $C_4^3\times 12\times 11$,而不是在 k_2'中所计算的 $C_3^2\times C_4^3\times 12\times 11$. 也就是说,对于这种情况,在 k_2'中多算了 $2\times C_4^3\times 12\times 11$ 个有利场合数．

c.四个人出生月份都相同．在这种情况下,仿照前面两种情况的分析可知,有利场合数为 $C_4^4\times 12$,而不是在 k_2'中所计算的 $C_4^2\times C_4^4\times 12$. 也就是说,对于这种情况,在 k_2'中多算了 $5\times C_4^4\times 12$ 个有利场合数．

综上所述,B 的有利场合数应为 k_2'减去上面三种情况中多算的有利场合数,即

$$\begin{aligned}&C_4^2\times 12^3-\frac{1}{2}\times C_4^2\times 12\times 11-2\times C_4^3\times 12\times 11-5\times C_4^4\times 12\\&=10368-396-1056-60=8856.\end{aligned}$$

在②中,遗漏了四个人中有两人出生月份相同,另两人出生月份也相同(但与前两人出生

月份不同这种情况．于是 B 的有利场合数应为 k''_2 加上这种情况的有利场合数 $\frac{1}{2}C_4^2\times 12\times 11$，即

$$C_4^2\times 12\times 11\times 10+C_4^3\times 12\times 11+C_4^4\times 12+\frac{1}{2}\times C_4^2\times 12\times 11$$
$$=7920+528+12+396=8856.$$

上述计算虽然繁琐，但是它提供了全面考虑问题，避免重复计算和漏算的一种具体作法，这有助于提高我们分析问题的能力．

4. 一些初学者有这样的想法：既然在概率的公理化定义中规定了概率具有完全可加性(公理3)，那么概率的有限可加性(性质2)就自然而然地成立了，何必证明呢？这种想法对吗？

答 这种想法不对．有这种想法的初学者的推理过程，是利用了认为显然成立的一个命题："一个结论对可列无穷多个的情形成立，对有限多个的情形也成立．"实际上，这个命题是不对的．让我们举一个例子来说明这个命题不对．自然数{1,2,3,…}是可列无穷多个数组成的集，它存在一个真子集(比如正偶数{2,4,6,…})与自然数本身一一对应．实际上，我们还可以得到更一般的结论："可列无穷多个数组成的集，至少存在它的一个真子集与其一一对应．"而有限多个数组成的集，它的任何一个真子集都不能与其一一对应．所以，有限多个数组成的集不具有可列无穷多个数组成的集的上述性质．这个例子说明：有些结论对可列无穷多个的情形成立，对有限多个的情形未必成立．因此，虽然根据概率的公理化定义知道概率具有完全可加性，但是概率具有有限可加性这条性质还是需要证明的．

5. 有些初学者容易混淆条件概率 $P(A|B)$(或者 $P(B|A)$)与 $P(AB)$ 的区别，认为 $P(A|B)=P(AB)$．

答 这种认为是不对的．我们通过古典概率和几何概率的两个例子来说明 $P(A|B)$、$P(B|A)$ 与 $P(AB)$ 的区别．

例1 一个班级有35名同学，他们组成的情况如下表：

性别＼籍贯	北京籍	非北京籍	总计
男	8	15	23
女	2	10	12
总计	10	25	35

从这个班中随机地任选一名同学，设

A：男同学，B：北京籍

由古典概率知：

随机地任选一名同学既是男同学又是北京籍的概率为 $P(AB)=\frac{8}{35}$．

随机地任选一名同学，在已知他是北京籍的条件下他又是男同学的概率为 $P(A|B)=\frac{8}{10}$．

随机地任选一名同学，在已知他是男同学的条件下他又是北京籍的概率为 $P(B|A)=\frac{8}{23}$．

例2 设 S 为平面上的一个矩形区域，A、B 为 S 中两个相交的圆(如图1－1)．

在以 S 为样本空间的几何概型中，圆 A、圆 B 及这两个圆相交的部分是 S 中的三个事件，分别用 A、B 及 AB 表示．由几何概率和条件概率的定义知：

$$P(B)=\frac{B\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}},P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}},$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{AB\text{ 的面积}}{B\text{ 的面积}},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{AB\text{ 的面积}}{A\text{ 的面积}}.$$

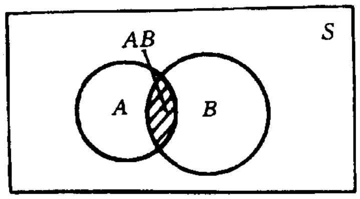

图 1－1

这表明：

$P(AB)$是 AB 的面积与 S 的面积的比，$P(A|B)$是 AB 的面积与 B 的面积的比，$P(B|A)$是 AB 的面积与 A 的面积的比．

6. 为了搞清楚两个事件相互独立与互不相容之间的关系，我们先证明一个命题：

命题 1 设 A、B 为两个事件，若

$$0<P(A)<1,0<P(B)<1, \tag{1.29}$$

则 A、B 相互独立，A、B 互不相容，$A\subset B$ 或 $B\subset A$，这三种情形中的任何两种不能同时成立．

证 在条件(1.29)下，

当 A、B 相互独立时，有 $P(AB)=P(A)P(B)$. (1.30)

当 A、B 互不相容时，有 $P(AB)<P(A)P(B)$. (1.31)

当 $A\subset B$(或 $B\subset A$)时，有 $P(AB)>P(A)P(B)$. (1.32)

在条件(1.29)下，式(1.30)、(1.31)、(1.32)中的任何两个不能同时成立．因此，在条件(1.29)下，A、B 相互独立，A、B 互不相容，$A\subset B$ 或 $B\subset A$，这三种情形中的任何两种不能同时成立．

命题 1 表明：在条件(1.29)下，若两个事件相互独立时，必不互不相容，也不一个包含另一个，而只能是相容了．

在命题 1 中，如果去掉条件(1.29)情况将如何呢？请看命题 2：

命题 2 若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则 A 与任何事件 B 相互独立．

证 若 $P(A)=0$，又 $AB\subset A$，故 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$.

于是 $P(AB)=0=P(A)=P(A)P(B)$，

所以 A 与任何事件 B 相互独立．

若 $P(A)=1$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)=0$.

由前面所证知，$\overline{A}$ 与任何事件 B 相互独立．再由事件独立性的性质 2 知，$\overline{\overline{A}}$ 与 B 相互独立，即 A 与 B 相互独立．

另种方法证明：由 $P(A)=1$ 知 $P(\overline{A})=0$，进而有 $P(\overline{A}B)=0$.

又 $B=AB\cup\overline{A}B$ 且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容，故

$$P(A)P(B)=P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(AB).$$

即 A 与 B 相互独立．

命题 2 表明：如果 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，那么 A 与某一个事件 B 既可以相互独立，又可

以互不相容(此时,取 $B=\overline{A}$ 即可);A 与某一个事件 C 既可以相互独立,又可以一个包含另一个(此时,取 $C=A$ 即可).

四、典型例题

1. 设 A、B 为任意两个事件,化简下式

$$(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})$$

分析 考虑到所需化简之式的特点,利用事件积对和的分配律:$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$即可.

解 利用事件积对和的分配律所给之式化为

$(A\overline{A}\cup B)(\overline{A}A\cup\overline{B})=(\varnothing\cup B)(\varnothing\cup\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing.$

2. 设 A、B 为两事件,

(1)若 $AB=A\cup B$,则 A 与 B 应满足什么关系;

(2)若 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,则 A 与 B 应满足什么关系.

分析 要充分利用事件的关系与运算的一些性质和常用的关系式.

解 (1)由 $AB=A\cup B=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB$ 知,$\overline{A}B\subset AB$

又 $\overline{A}B$、$A\overline{B}$、AB 互不相容,从而有,$\overline{A}B=(\overline{A}B)(\overline{A}B)\subset(\overline{A}B)(AB)=\varnothing$

故 $\overline{A}B=\varnothing$,从而有 $B\subset A$;

仿上述推导可得 $A\overline{B}=\varnothing$,从而有 $A\subset B$;

于是得 $A=B$.

(2)由 $AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$,有

$$\varnothing=(A\cup B)(\overline{A\cup B})=(A\cup B)AB=AB,$$

$$S=(A\cup B)\cup(\overline{A\cup B})=(A\cup B)\cup AB=A\cup B.$$

上述两式表明 A 与 B 是互为对立事件,即,$A=\overline{B}$.

3. 一射手向目标射击 3 发子弹,A_i 表示第 i 发子弹打中目标($i=1,2,3$). 试用 A_1、A_2、A_3 及其运算表示下列事件:

(1)B_1:3 发子弹都打中了目标;

(2)B_2:3 发子弹至少有 1 发打中了目标;

(3)B_3:3 发子弹至少有 1 发未打中目标;

(4)B_4:3 发子弹至少有 2 发打中了目标;

(5)B_5:3 发子弹恰有 1 发打中了目标;

(6)B_6:3 发子弹至多有 1 发打中了目标.

解 (1)$B_1=A_1A_2A_3$;(2)$B_2=A_1\cup A_2\cup A_3$;

(3)$B_3=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$;又 $\overline{B}_3=B_1$,故 $B_3=\overline{A_1A_2A_3}$;

(4)$B_4=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$;

(5)$B_5=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;或 $B_5=B_2-B_4=(A_1\cup A_2\cup A_3)-(A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3)$;

(6)$B_6=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;由 $\overline{B}_6=B_4$ 知,$B_6=\overline{A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3}$;