图书在版编目(CIP)数据

统计信号处理理论计算与题解/王宏禹主编. —北京:国防工业出版社,1996.1

ISBN 7-118-01419-2

Ⅰ.统… Ⅱ.王… Ⅲ.数字信号-信号处理-计算方法 Ⅳ.TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 00306 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 10⅜ 274 千字

1996 年 1 月第 1 版 1996 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—2000 册 定价:13.40 元

目　　录

第一章　离散统计信号分析

离散统计信号是随时刻 n 而变化的随机变量序列$\{\mathbf{x}_n\}$，故随机变量与其序列的统计知识可完全刻画这个统计信号。离散统计信号的统计特性传统上是用概率和统计平均量来表征，近年来则大量采用了时间序列信号模型的方法来研究。

§1-1　离散统计信号传统描述法概要

一、概率分布函数与概率密度函数

令 $\mathbf{x}$ 与 x 分别表示一随机变量和它的一个样本值(它们是两种不同定义的量，分别用小写黑体 $\mathbf{x}$ 和普通小写 x 表示，但当已熟习其概念后，可仅用 x 表示，自然会分清 x 何时表示随机变量，何时表示其相应的样本值，请读者注意)，P 表示概率，概率分布函数定义为 $P(\mathbf{x}\leqslant x)$，它满足

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant P(\mathbf{x}\leqslant x)\leqslant 1,P(\mathbf{x}<-\infty)=0,P(x<\infty)=1\\&P(x_i<\mathbf{x}\leqslant x_j)=P(\mathbf{x}\leqslant x_j)-P(\mathbf{x}\leqslant x_i)\end{aligned}\right\}\tag{1-1-1}$$

若 $\mathbf{x}$ 在连续域取值，也可用概率密度函数 $p(x)$表征，它定义为概率分布函数的导数，即

$$p(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(\mathbf{x}\leqslant x)\tag{1-1-2}$$

两个随机变量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的联合概率密度函数定义为

$$p(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P(\mathbf{x}\leqslant x,\mathbf{y}\leqslant y)\tag{1-1-3}$$

其条件概率密度定义为

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}, p(x) \neq 0 \tag{1-1-4}$$

若
$$p(x,y) = p(x)p(y) \tag{1-1-5}$$
则称随机变量 x, y 统计独立。

上述两个随机变量的概念可推广于 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ N 个随机变量情况，不再赘述。

二、随机变量函数

若已知 N 个随机变量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 的联合概率密度函数为 $p_x(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，而随机变量 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 与 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 为下列函数关系

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ &\vdots \\ y_N &= g_N(x_1, x_2, \cdots, x_N) \end{aligned}\right\} \tag{1-1-6}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, y_2, \cdots, y_N) \\ x_2 &= f_2(y_1, y_2, \cdots, y_N) \\ &\vdots \\ x_N &= f_N(y_1, y_2, \cdots, y_N) \end{aligned}\right\} \tag{1-1-7}$$

则 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 的联合概率密度为

$$p_y(y_1, y_2, \cdots, y_N) = p_x(x_1, x_2, \cdots, x_N)|J| \tag{1-1-8}$$

其中 J 为雅可比行列式，即

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_N} & \cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial y_N} \end{vmatrix} \tag{1-1-9}$$

三、特征函数

随机变量 x 的特征函数定义为

$$C(\mathrm{j}\omega) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x \tag{1-1-10}$$

两个随机变量 x 和 y 的特征函数定义为

$$C(\mathrm{j}\omega,\mathrm{j}\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1\text{-}1\text{-}11)$$

若随机变量 x 和 y 统计独立，则 $z=x+y$ 的特征函数为

$$C_z(\mathrm{j}\omega) = C_x(\mathrm{j}\omega)C_y(\mathrm{j}\omega) \qquad (1\text{-}1\text{-}12)$$

四、统计平均量

1．均值（数学期望）

连续随机变量 x 的均值定义为

$$m = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \qquad (1\text{-}1\text{-}13)$$

离散随机变量 x 的均值定义为

$$m = E[x] = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \qquad (1\text{-}1\text{-}14)$$

2．矩

连续随机变量 x 的 n 阶原点矩定义为

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\mathrm{d}x \qquad (1\text{-}1\text{-}15)$$

其 n 阶中心矩定义为

$$E[(x-m)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^n p(x)\mathrm{d}x \qquad (1\text{-}1\text{-}16)$$

两个连续随机变量 x 和 y 的 $(n+k)$ 阶联合矩定义为

$$E[x^n y^k] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1\text{-}1\text{-}17)$$

3. 均方值与方差

随机变量 x 的均方值定义为 x 的二阶矩，即

$$P_x = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x \qquad (1\text{-}1\text{-}18)$$

而 x 的方差 Var x 或 σ_x^2 定义为 x 的二阶中心矩，即

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\ x = \sigma_x^2 &= E[(x-m)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x)\mathrm{d}x \\ &= P_x - m^2 \end{aligned} \qquad (1\text{-}1\text{-}19)$$

9610111

五、相关函数、协方差函数及功率谱密度函数

1. 相关函数与协方差函数

自相关函数是描述统计信号在 n 和 m 两个不同时刻的值与值之间依赖性的一个量度，它定义为

$$r_{xx}(n,m) = E[x_n, x_m^*] \tag{1-1-20}$$

统计信号的自协方差函数定义为

$$\mathrm{Cov}(x_n, x_m) = E[(x_n - m_{x_n})(x_m - m_{x_m})^*] \tag{1-1-21}$$

$r_{xx}(n,m)$ 与 $\mathrm{Cov}(x_n, x_m)$ 的关系为

$$\mathrm{Cov}(x_n, x_m) = r_{xx}(n,m) - m_{x_n} m_{x_m}^* \tag{1-1-22}$$

当均值 $m_{x_n} = m_{x_m} = 0$ 时，有

$$\mathrm{Cov}(x_n, x_m) = r_{xx}(n,m) \tag{1-1-23}$$

若统计信号是平稳的，则

$$r_{xx}(m) = r_{xx}(n, n+m) = E[x_n x_{n+m}^*] \tag{1-1-24}$$

互相关函数是描述两个不同统计信号之间的依赖性的一个量度，它定义为

$$r_{xy}(n,m) = E[x_n y_m^*] \tag{1-1-25}$$

互协方差函数定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(x_n, y_m) &= E[(x_n - m_{x_n})(y_m - m_{y_m})] \\ &= r_{xy}(n,m) - m_{x_n} m_{y_m}^*\end{aligned} \tag{1-1-26}$$

当 $m_{x_n} = m_{y_m} = 0$，有

$$\mathrm{Cov}(x_n, y_m) = r_{xx}(n,m) \tag{1-1-27}$$

对于两个各自平稳且联合平稳的统计信号，其互相关函数定义为

$$r_{xy}(m) = r_{xy}(n, n+m) = E[x_n y_{n+m}^*] \tag{1-1-28}$$

若对所有 m，有

$$r_{xy}(m) = 0 \tag{1-1-29}$$

则它们是不相关的。统计独立的两个信号必然是不相关的，但不相关的两个信号不一定是统计独立的。

2. 功率谱密度函数

功率谱密度函数定义为相关函数的傅里叶变换

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m)e^{-jmT\omega} \tag{1-1-30}$$

$$S_{xy}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)e^{-jmT\omega} \tag{1-1-31}$$

而

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} S_{xx}(\omega)e^{jmT\omega}d\omega \tag{1-1-32}$$

$$r_{xy}(m) = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} S_{xy}(\omega)e^{jmT\omega}d\omega \tag{1-1-33}$$

式中 $\Omega=\pi/T$，T 为相关函数的采样间隔。通常可令 $T=1$，这时 $\Omega=\pi$。

功率谱密度函数还可在 Z 域定义为

$$S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m)z^{-m} \tag{1-1-34}$$

$$S_{xy}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)z^{-m} \tag{1-1-35}$$

其收敛域为

$$R_a < |z| < \frac{1}{R_a}, 0 \leqslant R_a \leqslant 1$$

六、具有统计输入信号的线性系统

设离散线性系统的脉冲响应为 $h(n)$，与其对应的传递函数为 $H(z)$，当输入为实平稳统计信号 $x(n)$ 时，其输出为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{1-1-36}$$

输出与输入自相关函数的关系为

$$r_{yy}(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m-i)u(i) \tag{1-1-37}$$

式中

$$u(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(i+k) \tag{1-1-38}$$

由式(1-1-37)与式(1-1-38)得功率谱关系式为

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \tag{1-1-39}$$

输出与输入互相关函数的关系为

$$r_{xy}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) r_{xx}(m-k) \tag{1-1-40}$$

其功率谱关系式为

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega) \tag{1-1-41}$$

§1-2 统计信号传统研究法的计算与题解

[1-1] 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是零均值的联合正态随机变量，$E[\boldsymbol{x}^2]=\sigma_x^2$，$E[\boldsymbol{y}^2]=\sigma_y^2$，$E[\boldsymbol{xy}]=\rho\sigma_x\sigma_y$，试证明给定 $\boldsymbol{x}=x$ 后，$\boldsymbol{y}$ 的条件概率密度为

$$p(y|x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{[y-(\sigma_y/\sigma_x)x]^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right\}$$

证明　由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是零均值正态随机变量，其联合概率密度仍是正态的，为

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x\ \ y]\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\sigma_y^2x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y xy + \sigma_x^2y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right) \end{aligned}$$

而

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

故

$$\begin{aligned} p(y|x) &= \frac{p(x,y)}{p(x)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(-\dfrac{\sigma_y^2x^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y xy + \sigma_x^2y^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right)}{\dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_x} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{[y-(\sigma_y/\sigma_x)x]^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right\}$$

［1-2］ 对于连续随机变量 $\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，证明

$$p(w|x,y)p(x|y) = p(w,x|y)$$

证明

$$p(w|x,y) = \frac{p(w,x,y)}{p(x,y)}$$

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

故

$$p(w|x,y)p(x|y) = \frac{p(w,x,y)}{p(x,y)} \cdot \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

$$= \frac{p(w,x,y)}{p(y)} = p(w,x|y)$$

［1-3］ 推导出两个连续随机变量之积如 $z=xy(x,y\geqslant\varepsilon>0)$ 的概率密度表示式。

解　设随机变量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的概率密度函数分别为 $p(x)$ 和 $p(y)$，其联合概率密度函数为 $p(x,y)$。做下列变换

$$\begin{cases} z = xy & (x,y \geqslant \varepsilon > 0) \\ w = x \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} y = \dfrac{z}{w} \\ x = w \end{cases}$$

它的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{w} & 0 \\ -\dfrac{z}{w^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{w}$$

因此

$$p(w,z) = p\left(w, y = \frac{z}{w}\right)|J|$$

$$= p\left(w, \frac{z}{w}\right)\left|\frac{1}{w}\right|$$

$$p(z)=\int_0^{\infty} p\left(w,\frac{z}{w}\right)\frac{1}{w}\mathrm{d}w \quad (w,z>0)$$

[1-4]　若 $y=\ln x$，而且 y 是正态随机变量，则称随机变量 x 按对数正态分布，现 y 是均值和方差分别为 m 和 σ^2 的正态随机变量。

证明

(1)对数正态概率密度函数可表示为

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma x}\exp\left(-\frac{\ln x-m}{2\sigma^2}\right), x\geqslant 0$$

(2)x 的一阶矩和二阶矩为

$$E[x]=\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$E[x^2]=\exp(2m+2\sigma^2)$$

证明

(1)由题意，知

$$p(y)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

而

$$y=\ln x, x\geqslant 0$$

故由随机变量函数变换关系，有

$$p(x)=p(y=\ln x)\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|=p(y)/x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma x}\exp\left[-\dfrac{(\ln x-m)}{2\sigma^2}\right], & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

(2)　$E[x]=E[\mathrm{e}^y]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^y\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}y$$

令 $\frac{y-m}{\sigma}=z$，则

$$E[x]=\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2\right]\mathrm{d}z$$

$$=\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$E[x^2]=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2y}\exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]dy$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}+2\sigma z+2m\right)dz$$

$$=\exp(2m+2\sigma^2)\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(z-2\sigma)^2\right]dz$$

$$=\exp(2m+2\sigma^2)$$

[1-5] 把 n 个统计独立而且分布相同的随机变量表示为 x_1，$x_2,\cdots,x_n$，其概率分布函数与概率密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$。若定义随机变量 y 为 x_i 中最大的，即 $y=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，证明 y 的概率密度函数为

$$p(y)=nF^{n-1}(y)f(y)$$

如果 $f(x)=e^{-x}(x\geqslant 0)$，其结果如何？

证明 随机变量 y 的概率分布函数为

$$F_y(y)=P(y\leqslant y)=P[\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant y]$$
$$=P(x_1\leqslant y,x_2\leqslant y,\cdots,x_n\leqslant y)$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 统计独立且概率分布相同，故

$$F_y(y)=P(x_1\leqslant y)P(x_2\leqslant y)\cdots P(x_n\leqslant y)$$
$$=F^n(y)=\left[\int_{-\infty}^{y}f(x)dx\right]^n$$

y 的概率密度函数

$$p(y)=\frac{dF_y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}F^n(y)$$
$$=nF^{n-1}(y)f(y)$$

如果 $f(x)=e^{-x}(x\geqslant 0)$，则

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}f(x)dx=\int_0^y e^{-x}dx$$
$$=1-e^{-y}$$

故

$$p(y) = n(1 - e^{-y})^{n-1}e^{-y}$$

[1-6] 均值和方差分别为 m 和 σ^2的正态随机变量 x,试证

(1)x 的特征函数为

$$C(j\omega) = \exp\left(jm\omega - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)$$

(2)通过 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ 对 α 连续求导数,其偶次中心矩为

$$E[(x-m)^k] = 1\cdot3\cdot5\cdots(k-1)\sigma^k \quad (k \text{ 为偶数})$$

其奇次中心矩为零。

证明

(1)所给正态随机变量 x 的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1-2-1}$$

由特征函数定义

$$C(j\omega) \xlongequal{\text{def}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}p(x)dx \tag{1-2-2}$$

将式(1-2-1)代入式(1-2-2),有

$$\begin{aligned}
C(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx \\
&= \exp\left(jm\omega - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \\
&\quad \cdot \exp\left[-\frac{(x-m-j\sigma^2\omega)^2}{2\sigma^2}\right]dx \\
&= \exp\left(jm\omega - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

(2)由积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \pi^{1/2}\alpha^{-1/2} \tag{1-2-3}$$

将式(1-2-3)左边对 α 求 k 次导数,得

$$\frac{d^k}{d\alpha^k}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx\right] = (-1)^k\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx \tag{1-2-4}$$

将式(1-2-3)右边对 α 求 k 次导数,得

$$\frac{d}{d\alpha^k}(\pi^{1/2}\alpha^{-1/2})$$

$$= (-1)^k \pi^{1/2} 2^{-k} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) a^{-\frac{2k+1}{2}} \quad (1\text{-}2\text{-}5)$$

由式(1-2-4)和(1-2-5)有

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) 2^{-\frac{2k+1}{2}} a^{-\frac{2k+1}{2}} \quad (1\text{-}2\text{-}6)$$

正态随机变量 x 的 $2k$ 偶次阶中心矩为

$$E[(x-m)^{2k}] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2k}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx, k = 1,2,\cdots$$

令 $x-m=y$,则

$$E[(x-m)^{2k}] = E(y^{2k})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^{2k} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \quad (1\text{-}2\text{-}7)$$

将式(1-2-6)和(1-2-7)比较,得

$$E[(x-m)^{2k}] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\sigma^{2k}, k = 1,2,\cdots$$

正态随机变量 x 的奇次阶中心矩为

$$E[(x-m)^{2k-1}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2k-1} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

由于被积函数为奇函数,故

$$E[(x-m)^{2k-1}] = 0$$

[1-7] 假定随机变量 $x_i, i=1,2,\cdots,n$,它们统计独立,有均值 m_i 和方差 σ_i^2。

(1)定义样本平均为 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,证明其均值和方差分别为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \text{ 和 } \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

(2)假定各 x_i 为同分布的正态随机变量,均值皆为零。$\bar{x}$ 的概率密度函数是什么?是正态随机变量吗?

(3)假定各 x_i 为同分布的指数随机变量,即

$$p(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)}{\sigma}\right),x\geqslant a,\sigma>0$$

$\bar{x}$ 是指数分布吗?

解

(1)证明如下:由于

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,E[x_i]=m_i$$

故

$$E[\bar{x}]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_i]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$$

又

$$\mathrm{Var}\bar{x}=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}x_i)$$

现 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 统计独立,且 $\mathrm{Var}x_i=\sigma_i^2$,故

$$\mathrm{Var}\bar{x}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}x_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$$

(2)由于各 x_i 为同分布的正态随机变量,均值为零,即

$$p(x_i)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

由题[1-6]知,它的特征函数为

$$C_{x_i}(\mathrm{j}\omega)=\exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}\right),i=1,2,\cdots,n$$

令 $y=\sum_{i=1}^{n}x_i$,由于各 x_i 统计独立,故

$$C_y(\mathrm{j}\omega)=C_{x_i}^n(\mathrm{j}\omega)=\exp\left(-\frac{n\omega^2\sigma^2}{2}\right)$$

又 $\bar{x}=\frac{1}{n}y$,则

$$C_{\bar{x}}(\mathrm{j}\omega)=\exp\left(-\frac{\omega^2\sigma^2}{2n}\right)$$

因此,$\bar{x}$ 是均值为零、方差为 σ^2/n 的正态随机变量。

(3)已知

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)}{\sigma}\right], x \geqslant a, \sigma > 0$$

其特征函数为

$$C_{x_i}(\mathrm{j}\omega) = \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x} p(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}}{\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)}{\sigma}\right]\mathrm{d}x$$

令 $(x-a)/\sigma=y$,则

$$C_{x_i}(\mathrm{j}\omega) = \int_0^{\infty}\exp[\mathrm{j}\omega(a+\sigma y)-y]\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y(1-\mathrm{j}\omega\sigma)}\mathrm{d}y$$

由于被积函数在平面解析,故

$$C_{x_i}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}}{1-\mathrm{j}\omega\sigma}$$

令 $y=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$,则

$$C_y(\mathrm{j}\omega) = C^n{}_{x_i}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega a}}{(1-\mathrm{j}\omega a)^n}$$

又 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{n}y$,所以

$$C_{\bar{x}}(\mathrm{j}\omega) = C_y(\mathrm{j}\omega/n) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}}{\left(1-\mathrm{j}\frac{\omega a}{n}\right)^n}$$

由概率论知,特征函数唯一确定分布函数,故 $\bar{x}$ 不是指数分布。

[1-8] 假定上题中各随机变量 x_i 不统计独立,并定义

$$\sigma^2_{|i-j|} \xlongequal{\text{def}} E[(x_i-m_i)(x_j-m_j)]$$

证明样本平均的方差可以表示为

$$\mathrm{Var}\bar{x} = \frac{\sigma_0^2}{n} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\sigma_i^2$$

证明

$$\mathrm{Var}\bar{x} = E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_i)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_i)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right]$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n}E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n}\sigma_{|i-j|}^2$$

令 $k=|i-j|$,则

$$\mathrm{Var}\bar{x} = \frac{\sigma_0^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\sigma_k^2$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sigma_k^2$$

[1-9] 证明

$$E[|x_{n+m} \pm x_n|^2] = 2\mathrm{Re}[r_{xx}(0) \pm r_{xx}(m)]$$

证明

$$E[|x_{n+m} \pm x_n|^2] = E[(x_{n+m} \pm x_n)(x_{n+m}^* \pm x_n^*)]$$

$$= r_{xx}(0) \pm r_{xx}(m) \pm r_{xx}^*(m) + r_{xx}(0)$$

$$= 2\mathrm{Re}[r_{xx}(0) \pm r_{xx}(m)]$$

[1-10] 复函数 $x_n=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n+\theta)}$,$\theta$ 是在$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量,求

(1)$E[x_n x_{n+m}^*]$;

(2)$E[x_n x_{n+m}]$。

解

(1)由于 $x_n=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega n+\theta)}$,故