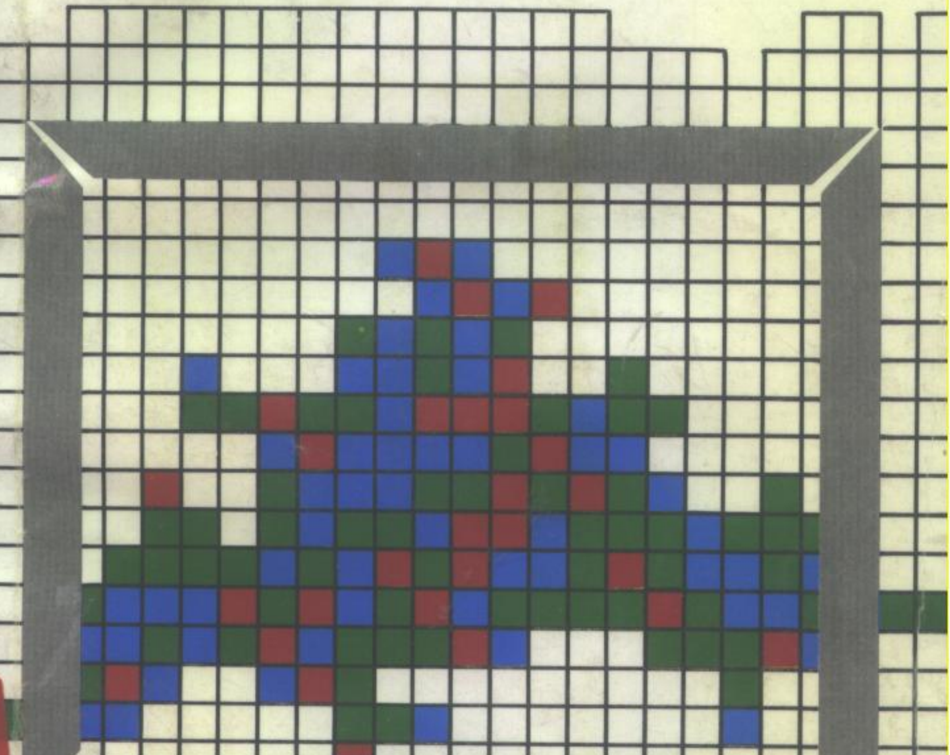
矩阵论及其应用

黄有度　狄成恩　朱士信　编著



中国科学技术大学出版社

矩阵论及其应用

矩阵论及其应用

黄有度　狄成恩　朱士信　编著

中国科学技术大学出版社
1995·合肥

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论及其应用/黄有度等编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,1995年8月

ISBN 7-312-00679-5

Ⅰ 矩阵论……

Ⅱ 黄……

Ⅲ ①矩阵 ②数学 ③大学教学

Ⅳ O

凡购买中国科大版图书,如有白页、缺页、倒页者,
由印刷厂负责调换

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:8.875 字数:230千

1995年8月第1版 1995年8月第1次印刷

印数:1—3000册

ISBN 7-312-00679-5/O·162 定价:9.80元

内 容 提 要

本书较为全面、系统地介绍了与工程技术联系密切的矩阵理论及其应用. 全书共分为五章，分别介绍了线性空间与线性变换、λ-矩阵与 Jordan 标准形、矩阵分析及矩阵函数、矩阵微分方程、广义逆矩阵等内容. 各章后面配有一定数量的习题，并在书末附有习题答案或提示.

本书可作为工科院校研究生和高年级本科生的教材，也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书.

前　　言

作为数学的一个重要分支，矩阵理论有着悠久的发展历史和极其丰富的内容. 作为一种基本的数学工具，矩阵理论在数学学科与其他科学技术领域，诸如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、运筹学、控制论、系统工程等学科都有广泛的应用，甚至在经济管理、社会科学等方面，矩阵的理论和方法也起着十分重要的作用. 现代科学技术的发展，特别是电子计算机及计算技术的发展，为矩阵理论的应用开辟了更广阔的前景. 因而，学习和掌握矩阵的基本理论和方法，对于将来从事工程技术工作的工科研究生来说已是必不可少的. 因此，我们根据国家教委制定的工科研究生学习《矩阵论》课程的基本要求编写了这本教材.

本书较全面、系统地介绍了与工程技术联系密切、应用广泛的矩阵理论与方法. 编写过程中力求做到深入浅出、简明易懂、深度与广度适中. 因而，本书较为实用，既便于教又便于学.

本书第一章内容在《线性代数》课程中已讲授过，这里只作为在复习基础上的补充和提高，重点介绍线性空间、内积空间、矩阵特征值与特征向量的求法. 第二章主要介绍 λ-矩阵的概念与 Jordan 标准形的求法，为进一步学习第三章和第四章作好准备. 第三章介绍矩阵序列的极限、矩阵的微分与积分、向量和矩阵的范数，以及矩阵函数. 第四章介绍线性定常系统及线性时变系统状态矩阵微分方程的解法. 最后一章介绍广义逆矩阵 A^- 和 A^+ 的概念、性质及求法，并分别给出了它们在解相容方程组及不相容方程组中的应用. 本书按章配有一定数量的习题，书末附有习题答案或提示，以供读者练习之用.

本书曾作为讲义在合肥工业大学和安徽工学院多届研究生中

试用过，在广泛征求听课学员和有关专家意见的基础上，经过多次修改，并由黄有度、狄成恩、朱士信三位老师执笔编写而成．参与本书编写和修订工作的还有合肥工业大学宁日晖、苏家铎和安徽工学院赵宗杰三位教授．合肥工业大学数学力学系主任、《工科数学》杂志副主编苏化明在百忙之中仔细审阅了全部书稿，并为编著者提出了不少有益的建议．合肥工业大学校领导、研究生部领导与数学力学系领导对本书的编写与出版给予了大力支持和热情帮助，编著者在此谨表示衷心的感谢．

本书可作为工科院校研究生和高年级本科生的教材，也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书．

限于编者水平，书中如有不妥乃至谬误之处，祈望国内同行与读者批评指正．

编著者

1994 年 12 月

目　　次

第一章　线性空间与线性变换

§1.1　线 性 空 间

线性空间是线性代数的基本概念之一，在大学《工程数学》中已经学过，这里对其加以复习和提高.

1. 线性空间的定义

定义 1　设 V 是非空集合，P 为数域，在 V 中定义了一种代数运算，叫做加法，就是说，给定了一个法则，对于 V 中任意两个元素 α 与 β，在 V 中都有唯一的一个元素 γ 与它们对应，称为 α 与 β 的**和**，记成 $\gamma=\alpha+\beta$. 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数乘，就是说，对于 P 中任一数 k 与 V 中任一元素 α，在 V 中都有唯一的元素 δ 与它们对应，称为 k 与 α 的**数乘**，记成 $\delta=k\alpha$. 如果加法与数乘满足下述规则，则称 V 为数域 P 上的**线性空间**（有时也称为在 P 上的**向量空间**）.

加法满足下列四条规则：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 在 V 中有一个元素 0，使对 V 中任一元素 α 都有

$$\alpha+0=\alpha,$$

具有这个性质的元素 0 称为 V 的**零元素**；

(4) 对于 V 中每一个元素 α，都有 V 中元素 β，使得 $\alpha+\beta=0$，β 称为 α 的**负元素**，记为 $-\alpha$.

数乘满足下列四条规则：

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,

其中,k,l 为 P 中任何数,α,β,γ 为 V 中任意元素.

由定义知,几何空间全部向量组成的集合是一个实数域上的线性空间;分量属于数域 P 的全体 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 构成数域 P 上的一个线性空间,这个线性空间我们常用 P^n 来表示.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in P^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in P^n$, $k\in P$,则有

$$x+y\triangleq(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$kx\triangleq(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n).$$

当 P 为复数域 C 时,上述线性空间称为 n 元**复向量空间**,记成 C^n;当 P 为实数域 R 时,上述线性空间称为 n 元**实向量空间**,记成 R^n.

例 1 复数域 C 上次数不超过 n 的一元多项式全体 $C_n[x]$,按通常多项式加法和数与多项式乘法,构成一个复数域 C 上的线性空间.

例 2 元素属于复数域 C 的 $m\times n$ 矩阵,按矩阵的加法和矩阵与数的数乘,构成复数域 C 上的线性空间,用 $C^{m\times n}$ 表示.

例 3 全体实函数,按函数的加法和数与函数的数量乘法,构成一个实数域 R 上的线性空间.

例 4 给定 $A\in C^{m\times n}$,记

$$R(A)=\{y\mid y=Ax,x\in C^n\},$$

$$N(A)=\{x\mid Ax=0,x\in C^n\},$$

按 C^n 中的加法和数乘运算,则 $R(A)$ 和 $N(A)$ 都是复数域 C 上的线性空间.

证 设 $y_1,y_2\in R(A)$,则存在 $x_1,x_2\in C^n$,使得 $y_1=Ax_1$, $y_2=Ax_2$. 又 C^n 为线性空间,故 $x_1+x_2\in C^n$,因此 $A(x_1+x_2)\in R(A)$.

又 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=y_1+y_2$，故 $y_1+y_2\in R(A)$. 同理，当 $k\in C$ 时有 $ky_1\in R(A)$. 由于 C^n 为线性空间，容易验证 $R(A)$中的加法和数乘满足 8 条规则(这 8 条规则，有时称为线性空间 8 条公理)，故 $R(A)$为 C 上的线性的空间.

对于 $N(A)$，也可类似证明. 设 $x_1,x_2\in N(A)$，即 $Ax_1=0,Ax_2=0$，因此 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=0$，故 $x_1+x_2\in N(A)$；设 $k\in C$，$A(kx_1)=kAx_1=0$，故 $kx_1\in N(A)$. 同样，可验证 $N(A)$中的加法和数乘满足 8 条规则，故 $N(A)$为 C 上的线性空间.

例 5 仅由 C 上线性空间 V 中的零元素 0 构成的单元素集合 $0=\{0|0\in V\}$，按 V 中的运算定义运算，则 0 是 C 上的一个线性空间，称为**零空间**.

事实上，对于 0 中的元素 0，以及 C 中的 k，显然有 $0+0=0$，$k0=0\in 0$，并容易验证它满足 8 条公理. 因此，它是 C 上的线性空间.

注 当 $b\neq 0$ 时，相容的线性非齐次方程组 $Ax=b$ 的解的全体 $S=\{x|Ax=b,x\in C^n\}$，按 C^n 中的运算，就不是线性空间. 用反证法，若 S 是线性空间，那么由 $x_1,x_2\in S$ 应有 $x_1+x_2\in S$，但 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=2b\neq b$，故 $x_1+x_2\overline{\in} S$，所以 S 不是线性空间.

例 6 n 阶线性齐次微分方程

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=0$$

的解的全体 $S=\{x(t)|L[x]=0\}$，以普通函数的加法、数乘为运算，构成 C 上的线性空间.

2. 基、维与坐标

定义 2 设线性空间 V 中，有 n 个元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关；

(2) V 中任一元素 α 总可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示；

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为线性空间 V 的一个**基**，n 称为线性空间 V 的**维**

数，记为 $\dim(V)=n$.

维数为 n 的线性空间称为 **n 维线性空间**，记为 V_n.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V_n 的一个基，则对任意元素 $\alpha\in V_n$，都存在一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n.$$

容易证明，这组数是唯一的. 事实上，若有另一组数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，使得

$$\alpha=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n,$$

则有

$$(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+\cdots+(x_n-y_n)\alpha_n=0,$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性无关性知

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \cdots,\ x_n=y_n.$$

反之，任给一组有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有唯一的元素 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示为

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\in V_n.$$

从而可知，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V_n 的一个基，则 V_n 中元素的全体可表示为

$$V_n=\{\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}.$$

这样，V 中的元素 α 与有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间构成一一对应关系. 因此，可用这组有序数表示 α.

定义 3　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V_n 的一个基，对于任一元素 $\alpha\in V_n$，有且仅有一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为元素 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的**坐标**，记作

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

例 7　求线性空间 $C_n[x]$的基、维数及向量 p 的坐标.

解　在线性空间 $C_n[x]$中，它的一个基为

$$p_1=1,\ p_2=x,\ p_3=x^2,\ \cdots,\ p_{n+1}=x^n,$$

其维数为 $n+1$. 任何次数不超过 n 的多项式

$$p=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

可表示为

$$p=a_0p_1+a_1p_2+\cdots+a_np_{n+1},$$

因此，p 在这个基下的坐标为

$$p=(a_0,a_1,\cdots,a_{n+1}).$$

如果在 $C_n[x]$中取另一个基

$$p_1'=1,\ p_2'=x-a,\ \cdots,\ p_{n+1}'=(x-a)^n,$$

则把 p 在 $x=a$ 处的按 Taylor 公式展开后，有

$$p=p(a)+p'(a)(x-a)+\cdots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

即得 p 在基 $p_1',p_2',\cdots,p_{n+1}'$下的坐标为

$$p=\left(p(a),p'(a),\cdots,\frac{p^{(n)}(a)}{n!}\right).$$

证明留给读者.

例 8 在 n 维线性空间 R^n 中，它的一个基为

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),$$
$$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1).$$

对于任一向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$，有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$

所以，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.

可以证明

$$\varepsilon_1'=(1,1,\cdots,1),$$
$$\varepsilon_2'=(0,1,\cdots,1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n'=(0,0,\cdots,1)$$

也是 R^n 中的一个基. 在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$下，对任一向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$，有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1'+(a_2-a_1)\varepsilon_2'+\cdots+(a_n-a_{n-1})\varepsilon_n'.$$

所以，α 在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$下的坐标为

$$\alpha=(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1}).$$

例 9 线性空间 $C^{m\times n}$的一个基为

$$E_{ij}=\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \}i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2\cdots,n).$$

$$\qquad\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{j}$$

在 E_{ij}中，除第 i 行第 j 列的元素是 1 外，其余元素都是 0.

对于任一 $m\times n$ 矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

都可表示为

$$\begin{aligned} M &=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+\cdots+a_{1n}E_{1n}+a_{21}E_{21}+\cdots+a_{mn}E_{mn} \\ &=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}, \end{aligned}$$

因此，$\dim(C^{m\times n})=m\times n$，矩阵 $M=(a_{ij})_{m\times n}$的坐标为

$$M=(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn}).$$

引进了线性空间 V_n 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 以后，不仅把 V_n 中抽象的向量 α 与具体的有序数组向量

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

联系起来了，而且还把 V_n 中抽象的线性运算与有序数组向量的线性运算联系起来了.

设 $\alpha,\beta\in V_n$，$\lambda\in R$，记

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n.$$

于是有

$$\alpha+\beta = (x_1+y_1)\alpha_1 + (x_2+y_2)\alpha_2 + \cdots + (x_n+y_n)\alpha_n,$$

$$\lambda\alpha = (\lambda x_1)\alpha_1 + (\lambda x_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda x_n)\alpha_n,$$

即 $\alpha+\beta$ 的坐标为

$$(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n) = (x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n),$$

$\lambda\alpha$ 的坐标为

$$(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n) = \lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

这样，线性空间 V_n 与其对应的坐标空间 R^n 从代数结构上看，就没有本质上的区别了.

定义 4 设 V 与 V^* 同为域 P 上的两个线性空间，若 V 与 V^* 的元素之间可建立一一对应关系

$$x \longleftrightarrow x' \qquad (x\in V, x'\in V^*),$$

且当

$$x \longleftrightarrow x', \quad y \longleftrightarrow y'$$

时，必有

$$x+y \longleftrightarrow x'+y',$$

$$kx \longleftrightarrow kx' \qquad (k\in P),$$

则称在域 P 上的线性空间 V 与 V^* 是**同构的**，且称一一对应为 V 与 V^* 之间的**同构对应**.

显然，任何域 P 上的 n 维线性空间都与 P^n 同构. 因此，域 P 上维数相等的线性空间也都彼此同构.

3. 基变换与坐标变换

众所周知，在线性空间 V_n 中含有 n 个向量的线性无关组不是唯一的，因此它的基是可供选择的. 同一个元素在不同的基下应有不同的坐标，那么不同坐标之间有怎样的关系呢？下面来讨论这个问题.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性空间中的两个不同的基，令

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n,\\
&\beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n,\\
&\cdots\cdots\\
&\beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

把 n 个有序元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 记作$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，利用向量和矩阵的形式，将(1.1)式表示为

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1}\\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2}\\ \cdots & & & \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = P^T\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

或

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P, \tag{1.2}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \cdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}.$$

(1.1)式或(1.2)式称为**基变换公式**. 矩阵 P 称为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**过渡矩阵**.

由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关，故过渡矩阵 P 为可逆矩阵.

定理 1 设元素 $\alpha\in V_n$，它在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，若两个基满足关系式(1.2)，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

证 因为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix},$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故(1.3)式成立.

定理1的逆命题也成立.若线性空间 V_n 中任一元素的两种坐标满足变换公式(1.3)，则两个基满足基变换公式(1.2).

例 10 设 R^4 空间中的向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的表达式为

$$\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4,$$

求 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标，这里

$$\begin{aligned}\beta_1&=\alpha_1+3\alpha_2-5\alpha_3+7\alpha_4\\\beta_2&=\alpha_2+2\alpha_3-3\alpha_4,\\\beta_3&=\alpha_3+2\alpha_4,\\\beta_4&=\alpha_4.\end{aligned}$$

解 从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\-5&2&1&0\\7&-3&2&1\end{pmatrix},$$

由此可得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\11&-2&1&0\\-38&7&-2&1\end{pmatrix}.$$