常微分方程

〔美〕理查德·米勒 安东尼·米歇尔 著 傅希林 阮炯 译

河南教育出版社

常微分方程

〔美〕理查德·米勒
安东尼·米歇尔 著

傅希林 阮炯 译

河南教育出版社

常微分方程

〔美〕理查德·米勒
安东尼·米歇尔 著

傅希林　阮炯 译

责任编辑　侯耀宗

河南教育出版社出版
河南第一新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

850×1168毫米　32开本　12.875印张　312千字
1989年6月第1版　1989年12月第1次印刷
印数1—1,500册

ISBN7-5347-0424-3/0·10
定价　5.00元

内 容 简 介

本书是一本阐述现代常微分方程基本问题及其应用的教科书与参考书。全书包括绪论、基本理论、线性方程组、边值问题、稳定性、线性系统的摄动、二维系统的周期解、一般系统的周期解等共八章内容。

该书取材现代，注重应用，论述严谨，通俗易懂。并配有很多例题与习题。

本书可供大学理工科学生、研究生、教师及其他科技工作者参考。

译者前言

R.K.米勒和A.N.米歇尔的《常微分方程》取材现代，注重应用，论述严谨，通俗易懂。全书共分八章，包括绪论、基本理论、线性方程组、边值问题、稳定性、线性系统的摄动、二维系统的周期解、一般系统的周期解。

与传统的教材相比，本书具有很大不同。而取材现代是它最显著的特点。本书不但简明扼要地阐述了常微分方程的基本理论及线性系统的理论，而且着重研究了非线性系统，用相当大的篇幅阐述了稳定性、定性、摄动和周期解的理论与应用，并介绍了近年来迅速发展的分支理论。这样取材，便于读者迅速掌握现代常微分方程理论的概貌。

实例生动丰富是本书的另一突出特点。本书所有的理论和定理都配有精选的实例。特别是第一章里给出了十九个精彩的实际例子，其中力学的平移系统、转动系统的例子，电学的电路系统、电机系统的例子都独具特色，不落俗套；还有生态学方面的例子，Volterra人口增长率方程的例子等也饶有趣味，使人感到耳目一新。这些例子配以直观的图示，对于读者加深理解常微分方程理论的实际背景极有裨益。

集严谨性与通俗性于一体，是本书论述技巧的一大特色。一方面，本书的所有定理都采用现代数学语言，进行了严格准确的论证，其中某些个别章节还涉及比较高深的现代数学知识（譬如微分流形等拓扑知识），这对有一定基础的读者是很有必要的。另一方面，作者又注意了论述简明、易懂、通俗，并经精心安排将所需预备知识压缩到最低限度，使读者只须具备分析、代数的基本知识，就完全可以避免个别段落而不影响系统性地顺利阅读。这样，不论是初学者，还是有一定基础的读者，都可以从中受益，起到了雅俗共赏的作用。

总之，本书是一本阐述现代常微分方程基本问题及其应用的教科书与参考书。本书可供大学理工科学生或有关专业研究生、教师及其他科技工作者参考。

对本书的翻译，复旦大学数学系金福临教授给予了热情推荐、支持和帮助，在此谨表由衷地感谢。另外，山东师范大学数学系张立琴同志参加了本书翻译的部分工作。由于译者水平所限，加之时间仓促，难免有不足之处，望读者指正。

傅希林　阮　炯

一九八八年三月

序　言

本书是在依阿华州立大学数学系和电子工程系从事多年教学研究的结晶。它可以作为数学系、工程系以及其他理科学生的教科书，也可以作为一年级研究生微分方程课程的教材。尽管微分方程是一门比较经典的、传统的成熟学科，但是在现代典型课题的探讨过程中，本书仍然可以提供生动丰富的资料；在素材的取舍及研究问题的方法技巧上，本书亦有独到新颖之处，可以引起读者极大的兴趣。为使本书更具有普遍适应性，我们将所需预备知识压缩到最低限度，并力图涉及微分方程的全部论题，以此吸引广泛的读者。

阅读本书的读者假设已具备如下大学生常微分方程的知识：变量分离，一阶和二阶线性常微分方程组及拉普拉斯变换的基本技巧。我们还假定读者通晓近代分析和矩阵论、向量空间导引的课程。这些知识对于数学系、工程系和其他一些理科的学生都是同样要求的，是非常基础的。偶然地，书中个别地方需要使用某些实变函数或复变函数的基本定理，在这些段落和习题处都用星号（*）明显标出。这样安排布置，能够便于我们对其省略而不影响整体。我们认为，预备知识的这种选择和题材的这种

安排，可以使本书在使用时具有最大的机动性。

第一章的意图是引出论题，并且简要地讨论某些在科学和工程技术中出现的微分方程重要例子。§1.1作为第二章的背景是必要的，而§1.2在初次阅读时可以省略。第二章和第三章论述了线性和非线性微分方程的基本理论。特别是§2.1～§2.7、§3.1～§3.5中的结论，对于以后诸章都是不可少的。在第四章中研究了线性边值问题，主要集中讨论了个别情形——二阶的情形。第五章讨论了李雅普诺夫稳定性理论，而在第六章我们考虑线性系统的摄动。第五章对于§6.2～§6.4是必需的。第七章论述了庞卡莱—班狄克森理论和二维范得坡方程。第八章研究了一般方程组的周期解。在学习第八章之前，学习第七章是有益的，但并非完全必需的；然而第五章包含了§8.6必不可少的背景材料。

本书的内容，如果作为一个学期的课程是太多了；如果作为一学年的课程，教师可以根据需要来选取或增补某些内容。依照学生的实际情况与兴趣的不同，可以采用各种不同的方式来编排或补充这本书的内容。譬如，倘若学生具备复变函数的知识，那么可以增添复值线性系统孤立奇点的内容；倘若学生具备实变函数和泛函分析的必要知识，那么第四章边值问题的内容可以进行相当大的扩充。类似地，如果具备泛函分析和拓扑知识，第八章周期解的

内容也可以增补。此外，可以考虑增补的其他论题有：控制论、具滞后变元的微分方程和巴拿赫空间的微分方程。

书中诸章使用阿拉伯数字依次编号。在给定的章节内，各个定理和方程式也按次序编号。譬如，当读第五章时，“§5.2”、“方程(3.1)”和“定理3.1”分别表示“第五章的第二节”、“第五章第三节的第一个方程”和“第五章第三节的第一个定理”。类似地，当读第五章时，遇到“§3.2”、“方程(2.3.1)”、“定理3.3.1”和“图3.2”，则分别表示“第三章的第二节”、“第二章第三节的第一个方程”、“第三章第三节的第一个定理”和“第三章的第二个插图”。

目　　录

第一章 绪 论

本章介绍微分方程的初值问题，并给出一些初值问题的例子。

§1.1 初值问题

本节由五部分组成，目的在于介绍常微分方程的初值问题，并对其进行分类。在A段中考虑一阶常微分方程，在B段中考虑一阶常微分方程组，在C段给出一阶微分方程组的分类，在D段考虑 n 阶常微分方程，而在E段中介绍复值常微分方程。

A.一阶常微分方程

设R表示实数集，$D\subset R^2$是一个区域（即D是 R^2 的非空连通开子集），f 是一个在D上定义且连续的实值函数。设$x'=\dfrac{dx}{dt}$表示 x 关于 t 的导数。我们称

$$x'=f(t,\ x) \tag{E'}$$

为**一阶常微分方程**。设ϕ是定义在$J=\{t\in R: a<t<b\}$ 上的实值连续可微函数，对所有的$t\in J$满足：$(t,\ \phi(t))\in D$，并且

$$\phi'(t)=f(t,\ \phi(t))$$

则称ϕ为微分方程(E') 在开区间上的**解**。

定义1.1 给定$(\tau,\ \zeta)\in D$，关于(E')的**初值问题**是

$$x'=f(t,\ x),\ x(\tau)=\zeta \tag{I'}$$

若ϕ是微分方程(E')在某个包含τ的区间J上的解，并且$\phi(\tau)=\zeta$，

则称函数ϕ是(I')的解。

初值问题(I')的解如图1.1所示。

我们可以用形如

$$\phi(t)=\zeta+\int_{\tau}^{t} f(s,\ \phi(s))ds \qquad (\text{V})$$

的积分方程来等价地表示初值问题(Ⅰ′)。为了证明此等价性，设ϕ是初值问题(Ⅰ′)的解，则$\phi(\tau)=\zeta$，并且对一切$t\in J$有

$$\phi'(t)=f(t,\ \phi(t))$$

将之从τ到t积分，得

$$\int_{\tau}^{t}\phi'(s)ds=\int_{\tau}^{t} f(s,\ \phi(s))ds$$

或者

$$\phi(t)-\zeta=\int_{\tau}^{t} f(s,\ \phi(s))ds$$

因此，ϕ是积分方程(V)的解。

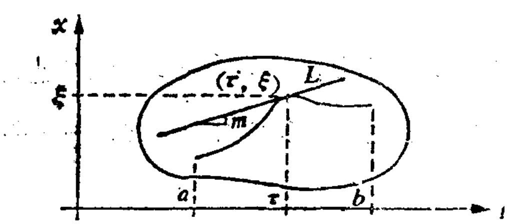

图 1.1　初值问题的解　t的区间$J=(a,\ b)$，m（直线L的斜率$=f(\tau,\ \phi(\tau))$

反之，设ϕ是积分方程(V)的解，则$\phi(\tau)=\zeta$，并且对(V)两边关于t微分，得

$$\phi'(t)=f(t,\ \phi(t))$$

所以ϕ是初值问题(Ⅰ′)的解。

B.一阶常微分方程组

我们能够进一步考虑一阶常微分方程组的初值问题。设$D\subset R^{n+1}$是区域，即是R^{n+1}的非空连通开子集。为方便起见，我们常把R^{n+1}称作$(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$空间。设$f_1,\ \cdots,\ f_n$是在D上定

义且连续的 n 个实值函数，即 f_i: $D \to R$，并且 $f_i \in C(D)$，$i=1, \cdots, n$。我们称

$$x_i'=f_i(t, x_1, \cdots, x_n), \ i=1, \cdots, n \qquad (E_i)$$

为 n **维一阶常微分方程组**。考虑定义在区间 $J=(a, b)$上的 n 个实值连续可微函数$\phi_1, \cdots, \phi_n$，若对一切 $t \in J$ 满足：$(t, \phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)) \in D$并且

$$\phi_i'(t)=f_i(t, \phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)), \ i=1, \cdots, n$$

则称$\phi_1, \cdots, \phi_n$是常微分方程组(E_i)的**解**。

定义1.2 设$(\tau, \zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in D$，则相应于$(E_i)$ 的**初值问题**是

$$\begin{cases} x_i'=f_i(t, x_1, \cdots, x_n), & i=1, \cdots, n \\ x_i(\tau)=\zeta_i, & i=1, \cdots, n \end{cases} \qquad (I_i)$$

若函数组$(\phi_1, \cdots, \phi_n)$是方程组(E_i) 在某个包含τ 的区间J上的解，并且$(\phi_1(\tau), \cdots, \phi_n(\tau))=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$，则称$(\phi_1, \cdots, \phi_n)$是$(I_i)$的**解**。

在讨论方程组时，使用向量记号是方便的。为此目的，设

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \zeta=\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}, \quad \phi=\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

$$f(t,x)=\begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

并将$x'=dx/dt$表示为分量形式，即

$$x'=\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

现在能够把初值问题(I_i)表示为

$$x'=f(t, x), \ x(\tau)=\zeta \qquad (I)$$

象纯量情形那样，上述初值问题(I) 可以用等价的积分方程

来表示。

现在假定(I)对于t在包含τ的区间J上有唯一解ϕ。所谓过(τ, ξ)的**运动**是指集合

$$\{(t, \phi(t)): t\in J\}$$

当然，它是函数ϕ的图象。所谓过(τ, ξ)的**轨线**或者**轨道**是指集合

$$C(\xi)=\{\phi(t): t\in J\}$$

正半轨线（或者**正半轨道**）被定义为

$$C^+(\xi)=\{\phi(t): t\in J\text{并且}t\geq\tau\}$$

而**负半轨线**（或者**负半轨道**）被定义为

$$C^-(\xi)=\{\phi(t): t\in J\text{并且}t\leq\tau\}.$$

C.一阶微分方程组的分类

我们考虑的微分方程或初值问题有一些特殊的种类，这里列举如下。

(1) 如果在(I)中，对一切$(t, x)\in D$有$f(t, x)=f(x)$，即$f(t, x)$不依赖于t，则有

$$x'=f(x). \tag{A}$$

我们称(A)是一阶常微分方程**自治系统**。

(2) 如果在(I)中，当$(t, x)\in D$时$(t+T, x)\in D$，并且对一切$(t, x)\in D$，f满足：$f(t, x)=f(t+T, x)$，则有

$$x'=f(t, x)=f(t+T, x). \tag{P}$$

这样的系统称为T周期的一阶微分方程**周期系统**。使得(P)成立的最小数$T>0$是该系统的**最小周期**。

(3) 如果在(I)中，$f(t, x)=A(t)x$，这里$A(t)=[a_{ij}(t)]$是$n\times n$实值矩阵，其元素$a_{ij}(t)$在t的某区间J上有定义并且至少分段连续，则有

$$x'=A(t)x \tag{LH}$$

且称它是常微分方程**线性齐次系统**。

(4) 如果在 (LH) 中，$A(t)$ 对所有实值 t 有定义，并且存在$T>0$，使对一切 t 有$A(t)=A(t+T)$，则有

$$x'=A(t)x=A(t+T)x \tag{LP}$$

这个系统称为常微分方程**线性周期系统**。

(5) 如果在(Ⅰ)中，$f(t,\ x)=A(t)x+g(t)$，这里 $g(t)^T=[g_1(t),\ \cdots,\ g_n(t)]$，$g_i: J\to R$，则有

$$x'=A(t)x+g(t) \tag{LN}$$

称它为常微分方程**线性非齐次系统**。

(6) 如果在(Ⅰ)中，$f(t,\ x)=Ax$，这里$A=[a_{ij}]$是$n\times n$ 实的常数矩阵，则有

$$x'=Ax。 \tag{L}$$

这种类型称为常微分方程**线性自治齐次系统**。

D．n 阶常微分方程

我们也能够阐明 n 阶常微分方程初值问题。设D是实的 $(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 空间的区域，h 是在D上定义且连续的实值函数，又设$y^{(k)}=d^ky/dt^k$，则

$$y^{(n)}=h(t,\ y,\ y^{(1)},\ \cdots,y^{(n-1)}) \tag{En}$$

是 **n 阶常微分方程**。若定义在 t 的区间$J=(a,b)\subset R$上的实值函数ϕ有 n 阶连续导数，并且对一切$t\in J$满足：

$$(t,\ \phi(t),\ \cdots,\ \phi^{(n-1)}(t))\in D\text{和}$$
$$\phi^{(n)}(t)=h(t,\ \phi(t),\ \cdots,\ \phi^{(n-1)}(t))$$

则称ϕ是(En)的**解**。

定义1.3 给定$(\tau,\ \zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)\in D$，关于$(E_n)$ 的**初值问题**是

$$y^{(n)}=h(t,y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}),y(\tau)=\zeta_1,\cdots,y^{(n-1)}(\tau)=\zeta_n \tag{I_n}$$

若ϕ是方程(E_n)在包含τ的某区间上的解，并且 $\phi(\tau)=\zeta_1,\ \cdots,$