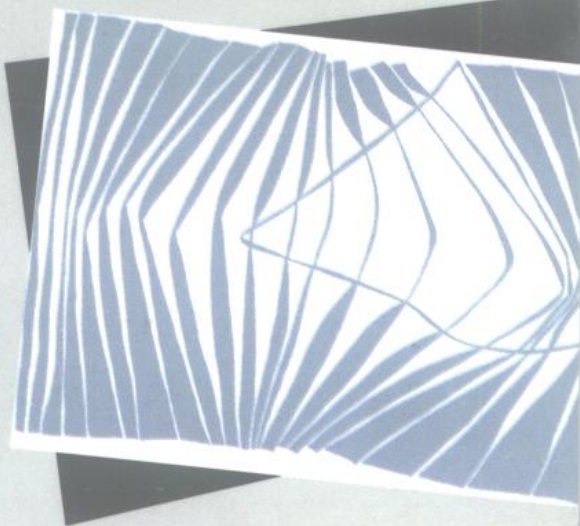


工程数学的内容、方法与技巧

概率论 与数理统计

曹 阳 熊德之 邓泽清 魏正红



▲ 华中理工大学出版社

EA01/01
图书在版编目(CIP)数据

工程数学的内容、方法与技巧丛书
概率论与数理统计/曹 阳等主编
武汉:华中理工大学出版社, 1996年8月
ISBN 7-5609-1359-8

I. 概…

II. 曹…

III. 概率论-数理统计

IV. O21

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书

概率论与数理统计

曹 阳等 主编

责任编辑:林化夷 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社照排室排版

武汉市青联彩印厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:10.875 插页:1 字数:245 000

1996年8月第1版 1999年4月第3次印刷

印数:13 001—17 000

ISBN 7-5609-1359-8/O · 157

定价:11.60 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

内 容 介 绍

本书是《工程数学的内容、方法与技巧》丛书的第三册,内容以工科数学教学《基本要求》为依据,与现行浙江大学编《概率论与数理统计》教材同步,各章分为知识要点、释疑解难、范例分析、习题提示几大部分,书末附有自测题及答案与提示.本书可供大、专学生和自学者作为学习《概率论与数理统计》课程的参考书阅读和教师参考.

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书

主 编 黄光谷 焦岷江 胡友思 王世敬

副主编 徐蕴珍 方金华 孙清华 吴汉民

序

我怀着喜悦的心情为《工程数学的内容、方法与技巧》丛书和《大学数学考试指南》各书作序,它们集众家之长,并具有各自的特色,主要表现在如下三个方面.

一、这些书的作者们在高等院校从事高等数学和工程数学教学多年,具有丰富的教学实践经验和长期教学研究经历.编写的这些书,是他们耕耘在大学数学教学园地上辛勤劳动的结晶.

二、这些书紧扣高等院校现在所使用的教材,是配合这些教材的较好的教与学辅导书.文字叙述精炼,通俗易懂,便于自学.

三、这些书考虑到不同层次的要求.由于这些书是根据国家教委制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》的要求编写的,所以它们既能作为高等院校工科各专业的本(专)科学生学习高等数学和工程数学各课程的自学辅导书或习题课教材,也能作为报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生的数学复习资料之用.

由于这些书具有以上三大特点,因此,我相信它们的出版定能受到众多的大学生、自学者及大学数学教师、工程技术人员等的欢迎和青睐,它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一批奇葩.

华中理工大学教授 林化夷

1996年3月 武汉

前 言

国家要实现四个现代化,关键在人才.而人才来自于教育.数学教育是教育事业的重要组成部分.不少学生和自学者对数学有畏惧心理,虽日夜苦学,然而不得要领.本丛书就是为了帮助读者解决学习工程数学中的三门主课的困难而编写的,它凝聚了 30 多位编审者多年的教学经验和良苦用心.

本丛书包括线性代数,复变函数,概率论与数理统计,共三册.各册与工程数学教材同步,可与现行教材配套使用.各章按四大部分编写,力求做到:“知识要点”提纲挈领,便于读者系统地掌握有关基础知识;“释疑解难”抓住要害,能解决读者在学习中的遇到的疑难问题;“范例分析”题型典型,有分析引导或注释说明,可培养读者的基本技能;“习题提示”恰到好处,对浙江大学编《概率论与数理统计》教材各章习题较难者作了提示,以减少读者做题的困难.

编写此丛书,得到华中理工大学出版社,武汉纺织工学院,国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、《应用数学》杂志副主编兼编辑部主任林化夷教授,武汉市洪山区教委贺贤座副主任等人的关心和支持,在此我们对他们表示衷心的感谢!

本书编委还有(以姓氏笔画为序):马俊、王一凡、刘磊、宋占奎、李刚、杨云、吴振之、吴菊珍、张志军、姚钰、熊德文、谭代富、穆汉林、魏正红.由于我们水平有限,加上时间仓促,书中可能有不妥之处,恳请读者提出宝贵意见,以便再版时修改.

编 者

1996 年 3 月

目 录

第一章	概率论的基本概念.....	(1)
第二章	随机变量及其分布	(43)
第三章	多维随机变量及其分布	(97)
第四章	随机变量的数字特征.....	(156)
第五章	大数定律及中心极限定理.....	(195)
第六章	样本及抽样分布.....	(209)
第七章	参数估计.....	(227)
第八章	假设检验.....	(263)
第九章	方差分析及回归分析.....	(294)
附 录	自我测验题.....	(330)

第一章 概率论的基本概念

知 识 要 点

一、内容提要

1. 随机试验

定义 1 如果一个试验具有下列三个特性,就称这个试验是**随机试验**,简称**试验**,记作 E :

- 1° 可以在相同的条件下重复地进行;
- 2° 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;
- 3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

定义 2 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S . 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**.

3. 随机事件

1) 试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**,简称**事件**.

在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,就称这一事件发生.

2) 由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 由若干基本事件复合而成的事件称为**复合事件**.

3) 样本空间 S 包含所有的样本点, 它是 S 自身的子集, 在每次试验中它总是发生的, 称为**必然事件**. 空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点, 也是 S 的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为**不可能事件**.

4. 事件的关系与运算

1) 若事件 A 发生必导致事件 B 发生, 则称事件 B **包含** 事件 A , 或称 A 是 B 的**子事件**, 记为 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记为 $A = B$.

2) 事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**, 当且仅当 A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.

3) 事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**, 当且仅当 A, B 中同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生, $A \cap B$ 也记作 AB .

4) 事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的**差事件**, 当且仅当 A 发生、 B 不发生时事件 $A - B$ 发生.

5) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 是**互不相容或互斥**的, 即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

6) 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**或称 A 与 B 互为**对立事件**. 即每次试验中, 事件 A 与 B 必有一个发生且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$, 显然

$$\bar{\bar{A}} = S - A.$$

7) 事件的运算律

交换律 $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$.

结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C; A \cap (B \cup C)$
 $= (A \cap B) \cup C$.

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C)$

$$=(A \cap B) \cup (A \cap C).$$

德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

5. 概率的定义与性质

1) 定义3 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数, 记为 $P(A)$ 称为事件 A 的概率. 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1°非负性 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;

2°规范性 $P(S) = 1$;

3°可列可加性 设 $A_1, A_2, \dots$, 是两两互不相容的事件, 即 $i \neq j$ 时, $A_i A_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots$, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$

2) 性质

1° $P(\emptyset) = 0$;

2°若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

3°设 A, B 是两个事件, 且 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A);$$

$$P(B) \geq P(A).$$

4°对于任一事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5°对于任意两事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

6. 等可能概型(古典概型)

1) 定义4 设试验 E 具有如下两个特征:

1° 样本空间的元素只有有限个, 即

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\};$$

2° 每一个基本事件的概率相等, 即

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n).$$

则称试验 E 所对应的概率模型为等可能概型(古典概型).

2) 对于古典概型, 事件 A 的概率公式为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中所含基本事件数}}{\text{基本事件的总数}},$$

A 中所含基本事件数也称 A 的有利场合数.

3) 超几何分布的概率公式

设有 N 件产品, 其中有 D 件次品, 今从中任取 n 件, 则其中恰有 $k(k \leq D)$ 件次品的概率

$$P = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

7. 条件概率

1) 定义5 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率.

2) 计算方法

1° 在样本空间 S 中, 先计算 $P(AB)$ 、 $P(A)$, 再按公式

$P(B|A) = P(AB)/P(A)$, 求得 $P(B|A)$.

2° 在样本空间 S 的缩减样本空间 S_A 中计算 B 发生的概率, 就得到 $P(B|A)$.

3) 乘法定理

设 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

一般, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, $n \geq 2$, 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \\ \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1).$$

8. 全概率公式和贝叶斯公式

1) 全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ + \cdots + P(A|B_n)P(B_n),$$

其中, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且

$$P(B_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2) 贝叶斯(Bayes)公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

其中 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且

$$P(A) > 0, P(B_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

9. 事件的独立性

1) 两事件相互独立

定义 6 设 A, B 是两事件, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$ 则称 A, B 为相互独立的事件.

定理 1 (1) 设 A, B 是两事件, 且 $P(A) > 0$, 则

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

(2) 若 A, B 相互独立, 则 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

2) 三个事件两两独立

定义 7 设 A, B, C 是三事件, 如果有等式

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(BC) = P(B)P(C),$$

$$P(AC) = P(A)P(C),$$

则称三事件 A, B, C 两两独立.

3) 三(n)个事件相互独立.

定义 8 设 A, B, C 是三事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(BC) = P(B)P(C),$$

$$P(AC) = P(A)P(C),$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

则称 A, B, C 为相互独立的事件.

一般, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件, 如果对于任意 $k (1 < k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 具有等式

$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的事件.

10. 贝努利(Bernoulli)概型

定义 9 如果试验 E 只有两个可能的结果: A 及 $\bar{A}$, 并且 $P(A) = p (0 < p < 1)$, 把 E 独立地重复进行 n 次的试验构成了一个试验, 这个试验称作 n 重贝努利试验. 简称贝努利试验或贝努利概型.

定理 2 设事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 则在 n 重贝努利试验中事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

上式称为二项概率公式.

11. 几何概率

如果试验 E 的可能结果可以几何地表示为某区域 Ω 中的一个点(区域 Ω 可以是一维的, 二维的, 三维的, 甚至可以是 n 维的), 并且点落在 Ω 中某区域 A 的概率与 A 的测度(长度, 面

积, 体积等等)成正比, 而与 A 的位置及形状无关, 则称试验 E 为几何概型. 随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的测度}}{\Omega \text{ 的测度}}.$$

二、基本要求与重点、难点

1. 基本要求

- 1) 了解随机事件的概念, 掌握事件间的关系与运算.
- 2) 了解事件频率的稳定性和理解概率的含义, 掌握概率的基本性质和加法定理, 会计算简单的古典概率.
- 3) 理解条件概率的概念和事件独立性概念, 掌握乘法定理, 会利用全概率公式和贝叶斯公式.
- 4) 掌握贝努利概型和二项概率的计算方法.

2. 重点与难点

重点 掌握概率古典定义方法和适用范围

难点 如何用已知事件表达其它事件. 正确判断试验的概型.

释疑解难

1. 对立事件与互斥事件有何联系与区别?

答 它们的联系与区别是:

- (1) 两事件对立, 必定互斥, 但互斥未必对立.
- (2) 互斥的概念适用于多个事件, 但对立的概念只适用于两个事件.
- (3) 两个事件互斥只表明这两个事件不能同时发生, 即至多只能发生其中一个, 但可以都不发生. 而两事件对立则表示它

们有且仅有一个发生,即肯定了至少有一个发生.

2. 如何用已知事件表达有关的其它事件?

答 首先要熟练掌握事件间的关系与运算,以及事件的运算律;其次还必须对具体问题进行分析.下面举例予以说明:

例 1 (1)“ A 发生,而 B 与 C 都不发生”可表为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A(\overline{B\cup C})$;

(2)“ A, B, C 中恰有一个发生”可表为 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(3)“ A, B, C 中恰有两个发生”可表为 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$ 或 $AB \cup BC \cup CA - ABC$;

(4)“ A, B, C 中不多于一个发生”可表为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$.

上面的表示法是根据事件的关系与运算,以及事件的运算律得到的.比如 1),单个看,是 A 发生, B 不发生, C 也不发生,所以就是 $A\bar{B}\bar{C}$;把“ B, C 都不发生”一起看,它的逆事件是“ B, C 中至少一个发生”,即 $B \cup C$,于是“ B, C 都不发生”就是 $\overline{B \cup C}$,所以结果可以写成 $A(\overline{B \cup C})$.

例 2 三只考签由三个考生轮流有放回抽取一次,每次取一只.试用已知事件表示“至少有一只考签没有被抽到”这一事件.

设 $A_i (i=1, 2, 3)$ 表示“第 i 只考签被抽到”,则“至少有一只考签没有被抽到”可表为 $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ 或 $\overline{A_1 A_2 A_3}$.

3. 条件概率是不是概率? 它与无条件概率有何区别?

答 条件概率是一种概率,可以验证,它满足概率定义中的三个条件.具体地说, $P(B|A)$ 是在原条件组 S 的基础上又加上“ A 发生”这个条件时, B 发生的概率.它与无条件概率(普通概率) $P(B)$ 的区别,就在于后者发生的条件,还是原来的条件组

S. 这里所谓“无条件”是指“无新条件”，原来的条件组 S 并非可无。

4. 条件概率 $P(B|A)$ 与积事件的概率 $P(AB)$ 有何区别？

答 $P(AB)$ 表示在样本空间 S 中，计算 AB 发生的概率，而 $P(B|A)$ 表示在缩减的样本空间 S_A 中，计算 B 发生的概率。用古典概率公式，则 $P(B|A) = AB$ 中基本事件数 / S_A 中基本事件数； $P(AB) = AB$ 中基本事件数 / S 中基本事件数。一般说， $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大。初学者在计算条件概率问题时，有时比较容易将积事件概率与条件概率混淆，这时须弄清：条件概率一定是在某事件已发生的条件下该事件发生的概率。

5. 两事件相互独立与两事件互斥这两个概念有何联系？

答 没有必然的联系。我们说两个事件 A, B 相互独立，其实质是事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率。而说 A, B 互斥，则是指 A 的发生必然导致 B 不发生，或者 B 的发生必然导致 A 不发生，即 $AB = \emptyset$ 。这就是说事件 A 的发生对事件 B 发生的概率有影响。

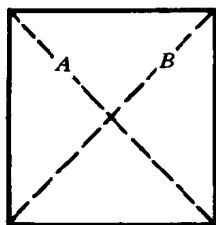


图 1-1

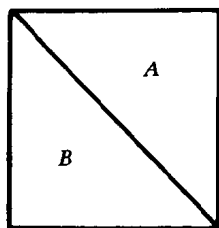


图 1-2

现再从直观上予以解释。图 1-1 与图 1-2 都是边长为 1 的正方形。由图 1-1 知， $P(A) = 1/2$ ， $P(B) = 1/2$ ， $P(AB) = 1/4$ 。因此 A, B 相互独立，但 A, B 不互斥。由图 1-2 知， $P(A) = 1/2$ ，

$P(B)=1/2, AB=\emptyset, P(AB)\neq P(A)P(B)$. 因此 A, B 互斥, 但 A, B 不是相互独立的.

那种认为“两事件相互独立必定互斥”是错误的. 在 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 的条件下, 若 A, B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$, 而若 A, B 互斥, 则 $P(AB) = 0$, 两种概念出现矛盾.

6. “ n 个事件相互独立”与“ n 个事件两两独立”是否一回事?

答 不是的. 后者只是前者的条件之一, 由前者可以推出后者, 但反过来不行.

7. 如何使用全概率公式和贝叶斯公式?

答 全概率公式是应用广泛的一个公式, 它把事件 A 的概率(不太好求), 分成几个比较好计算的概率之和, 形似繁琐, 实则简单. 在分析问题过程中, A 可视为 $B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ 的子事件, 或者把 B_i 看成 A 发生的原因, A 是结果. 而 $P(B_i)$ 及 $P(A|B_i)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是较易求得的, 于是可由“原因”求“结果”.

贝叶斯公式有时称为验后概率公式, 它实际上是条件概率. 是在已知结果发生的情况下, 求导致结果的某种原因的可能性大小. 比如求 $P(B_1|A)$, 当 $P(A)$ (常用全概公式计算), $P(B_1)$, $P(A|B_1)$ 较易求得时, 就要用贝叶斯公式, 它是由“结果”求“原因”.

8. 在全概率公式与贝叶斯公式中, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 S 的一个划分. 问 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中的每一个是否都是引起事件发生的“原因”?

答 不一定. 我们仅以全概率公式为例给以说明. 从图 1-3 可见, $B_1, B_2, \cdots, B_6$ 是 S 的一个划分, 事件 A 是伴随事件 B_1, B_2, B_3, B_5 这几个“原因”(假设)出现的; 而 B_4 和 B_6 都与 A 不相交, 即不能与 A 同时出现, 亦即 B_4A 和 B_6A 都是不可能事件, 故

$P(B_4A) = P(B_5A) = 0$. 所以全概率公式中的 $P(B_4)P(A|B_4)$ 和 $P(B_5)P(A|B_5)$ 这两项实际上消失了. 我们实际上只是把 B_1, B_2, B_3, B_5 这 4 个事件当作 A 的“原因”. 因此全概率公式中“ $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是 S 的一个划分”这一条件可以降低: “两两互斥的事件组 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 能够盖住 A ”. 再降低一点: “ $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是 A 的一个划分”, 即 A 当且仅当 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中某一事件出现时才出现. 不过, 为了讨论方便, 我们通常还是找出 S 的一个划分, 还是把每个 B_i 都称作“原因”(或假设), 这没有什么关系.

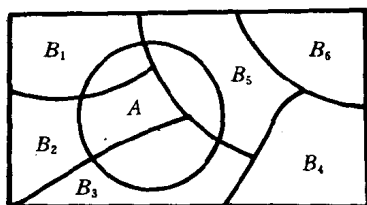


图 1-3

9. 后验概率与先验概率有何区别?

答 贝叶斯公式中, 已知事件 B_i 的概率 $P(B_i)$ 称为“先验概率”, 它是试验前根据以往经验确定的一种假设概率. 现在进行了一次试验, 如果事件 A 确实发生了, 则对于事件 B_i 的概率应予以重新估计, 也就是在事件 A 发生之后, 再来判断事件 B_i 发生的概率 $P(B_i|A)$, 称之为“后验概率”.

由于后验概率的计算仍以先验概率为基础, 所以两者有一定的联系(一般比较接近). 但后验概率是在试验之后事件 A 确已发生的情况下, 来分析它各种原因 B_i 的概率, 因而一般来讲, 有利于 A 发生的那些原因的概率就会增大, 而不利于 A 发生的那些原因的概率就会减小.

10. 实际应用中, 如何判断两事件的独立性?

答 实际应用中, 对于事件的独立性, 我们常常不是用定义来判断, 而是由试验方式来判断试验的独立性, 由试验的独立性