岩波講座　基礎工学 6

線形集中定数系論 I

高橋秀俊 著

岩波書店

岩波講座　基礎工学 6

線形集中定数系論

I

高 橋 秀 俊

岩 波 書 店

岩波講座　基礎工学

6

線形集中定数系論 I

岩波講座　基礎工学　6 線形集中定数系論 I　（全19巻／第14回配本）

1969年10月16日　第1刷発行 ©
東京都千代田区神田一ツ橋2-3　株式会社 岩波書店／精興社印刷・松岳社製本

はじめに

本講『線形集中定数系論』は，続講『線形分布定数系論』と同様，自然現象や工学系の問題を，その対象の物理的な特異性を捨象して，いろいろな量の間の関係という面だけを捉えようという趣旨で貫かれている．しかも，そのうちで，『線形分布定数系論』の方は，主として場の問題，連続体の問題で，物理的な面が強調されるのに対して，『線形集中定数系論』の方では，離散的な素子のあつまりの示す特性が問題であり，その対象は自然に存在するものよりはむしろ目的をもって設計され，つくられた工学系により重点がおかれることになろう．その意味で，『設計論』とも関連をもってくる．

そのような理論として，まず取り上げなければならないのは，いわゆる"回路論"，正確に言えばその中の線形回路論である．回路論は本来電気回路の理論であり，したがって電気工学の一分野と考えられがちであるが，実際は，その結果の大きい部分が，各種の類推関係を通して，いろいろの分野，たとえば機械振動，空気の振動，熱伝達，水力学，あるいは自動制御などの問題にそのままあてはめられるので，その意味で，これらの分野の線形の問題を特に集中定数的に取り扱う場合は，みな本質的には回路の問題なのである．

線形回路論の特色は，解析だけでなく合成の問題が極めて体系的に取り扱われるという点で，設計を主眼とする工学の立場から特に重視されるのである．回路論はまた線形応答の一般論の発展の素地をも与えた．そのようなわけで，線形回路論はある意味では『基礎工学』の典型であり，本講座の基礎編の眼目ともいえるのである．

本講の前半は線形集中定数系の取扱いの一般的な基礎を与えることに主眼がおかれる．後半部では，いくつかの重要な振動系の例，対称性のある系の取扱い方を述べ，さらに，集中定数素子が多数，同じ関係をもって1次元，2次元等に配置されているような周期的構造の線形系の理論を述べる．これは電気ではフィルターとして知られているが，また回折格子，結晶格子などとして固体

エレクトロニックスにも関連が深い．これはまた，線形分布定数系への橋渡しともなる．

前述のように，本講では，少なくともはじめの部分で，回路論という形で見掛け上著しく電気工学に偏った扱い方をすることについて一言弁解をしておく必要がある．それは線形工学系の中で，電気回路が現在までのところ最もよく体系化されており，術語，図のシンボル等も統一され，洗練されているという利点があるためである．たとえば，電圧と電流との間のほぼ完全な対称性などは他の類似の系には見られないものである．

そのような電気回路の特殊性は，回路素子の接続関係に着目するときに特に著しい．そうしてそのような立場からの解析は，いわゆる“グラフ”の概念の導入によって，体系化される．この方面の研究は特に近年大いに進歩した部分であるが，それはまた数学的な概念が工学に応用される一つの別の型の例ともいえよう．したがって，これは線形集中定数系という立場から見ればやや本題からはずれるともいえるのであるが，回路論としては割愛し得ないものと考えて，第３章をこれに当て，特に東大工学部の伊理正夫氏に草稿をお願いしこれに手を加えた．そのため，スタイルその他でやや不連続の感があるのは御寛容いただきたい．また内容に多少の重複があるが，これはむしろ意図したものである．

目　　次

はじめに

第1章　線形系の静的な取扱い

1. 1 序　論 ・・・・・・・・・・ 1
1. 2 素子の結合 ・・・・・・・・・・ 5
1. 3 電源と内抵抗(定電圧源と定電流源) ・・・・・・・・・・ 9
1. 4 整合と反射 ・・・・・・・・・・ 11
1. 5 梯子形結合 ・・・・・・・・・・ 15
1. 6 4端子とその表現 ・・・・・・・・・・ 17
1. 7 伝送行列 ・・・・・・・・・・ 23
1. 8 S 行列 ・・・・・・・・・・ 26
1. 9 梯子形4端子の定数 ・・・・・・・・・・ 28
1.10 $2n$ 端子 ・・・・・・・・・・ 32
1.11 一般回路の解法 ・・・・・・・・・・ 36
1.12 電位方程式 ・・・・・・・・・・ 37
1.13 Y_{ij} のみたす不等式 ・・・・・・・・・・ 40
1.14 電流方程式 ・・・・・・・・・・ 43

第2章　線形系の動的な取扱い

2. 1 単純な振動回路，自由振動 ・・・・・・・・・・ 49
2. 2 インパルス応答 ・・・・・・・・・・ 55
2. 3 正弦波応答 ・・・・・・・・・・ 58
2. 4 共　振 ・・・・・・・・・・ 60
2. 5 ベクトル表示と複素数の利用 ・・・・・・・・・・ 62
2. 6 電　力 ・・・・・・・・・・ 68
2. 7 並列共振回路 ・・・・・・・・・・ 69
2. 8 交流におけるインピーダンス整合 ・・・・・・・・・・ 70
2. 9 過渡現象 ・・・・・・・・・・ 72

第3章　線形回路網の位相幾何学的な取扱い

3. 1 素子とその特性 77
3. 2 電流の連続性と電圧の連続性 79
3. 3 グラフとそれに関連した基礎概念 84
3. 4 線形電気回路の基本方程式 107
3. 5 相 反 性 122
3. 6 双 対 性 123

線形集中定数系論 II 目次

第 4 章　周波数の関数としてのインピーダンス

第 5 章　各種の線形集中定数系

線形集中定数系論 III 目次

第 6 章　線形系各論

第 7 章　線形系と対称性

線形集中定数系論 IV 目次

第 8 章　繰返し構造の線形集中定数系

第 9 章　可変定数系

第10章　ジャイラトリー線形系

表紙カット製作：渡辺茂・樋屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

第1章

線形系の静的な取扱い

この章では時間的な変化を特に問題にしないでよいような線形系を取り扱う．具体的には，抵抗ばかりでできた電気回路，ばねの組合せなどの問題がこれに属する．電気回路の接続関係にもとづくやや一般的な議論は第3章でのべる．

1.1 序　論

本講で取り扱うのは**線形**(linear)の系である．それは電気的な系であるか，機械的な系であるか，空気力学的な系であるか，あるいは熱的な系であるかを問わず，とにかく，そこで問題になる物理量(もっと一般に物理量以外でも，とにかく数量的にあらわせるもの，たとえば神経の昂奮の強さというようなものも含まれ得る)の間の関係が線形でありさえすれば本講の対象になり得るのである．

線形であるとは，**重合せの原理**(superposition principle)が適用できるということである．重合せの原理を抽象的な形でのべれば次のようになる．物理的な**変量**(variable) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の間に，ある関係(つまり，そのうちのいくつかをきめると，残りのいくつかがきまるというような関係)が成り立つとき，

$$x_1 = a_1,\ \ x_2 = a_2,\ \ \cdots,\ \ x_n = a_n \tag{1.1}$$

がその関係をみたし，また別に

$$x_1 = b_1,\ \ x_2 = b_2,\ \ \cdots,\ \ x_n = b_n \tag{1.2}$$

もその関係をみたすならば，α, β を任意の定数とするとき

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1, \\ x_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_n &= \alpha a_n + \beta b_n \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

もまたその関係をみたす”

という性質が一般に成り立つなら，そのような関係(法則)は重合せの原理に従うというのである．

もう少し具体的な言い方をした方が実際的であろう．それには，**刺激と応答**という考えにもとづいてのべるのが適切である．

我々が自然法則，あるいは目的をもってつくられた装置の性質を記述するのに，それに外から何かはたらきかけてみたとき，それに対してどういう反応がおきるかということで記述するのが，非常に広く行なわれるやり方で，多くの自然法則もそういう形をしている．電気のオームの法則は，導体に電圧をかけたとき，その反応としてどれだけ電流が流れるかをあらわしたものであり，弾性のフックの法則は，弾性体に力を加えたとき，その結果としてどういう変形がおこるかをあらわしている．もっと一般的には，いくつかの刺激が同時にはたらいて，それらの結果として一つの応答が生じる場合を考えることもできる．

そこで刺激を $x_1, x_2, \cdots, x_n$，それによる応答を y としよう．そうすると

“もし

$$x_1 = a_1,\ \ x_2 = a_2,\ \ \cdots,\ \ x_n = a_n \tag{1.4}$$

の刺激に対して応答

$$y = f \tag{1.5}$$

が，また

$$x_1 = b_1,\ \ x_2 = b_2,\ \ \cdots,\ \ x_n = b_n \tag{1.6}$$

の刺激に対して応答

$$y = g \tag{1.7}$$

が生じるならば，

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \\ x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_n = \alpha a_n + \beta b_n \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

という刺激に対して生じる応答は

$$y = \alpha f + \beta g \tag{1.9}$$

である”

ということを**重合せの原理**というのである．

重合せの原理は，いつでも成り立つというものではない．また，物理量のあらわしかた，つまりスケールにもよる．すなわち，あるスケールであらわしたときには重合せの原理が成り立っても，別のスケールであらわすと成り立たなくなる．そこでとにかく重合せの原理が成り立つような系を**線形系**というわけである．真空中の電磁界は広い範囲で重合せの成り立つ典型的な例であり，したがってそれから派生する電磁気の問題(電磁界，電気回路)は実際上線形な方程式に従うことになる．一方，物質がある場合の電磁界も，多くの場合，実用上は線形と考えてよいが，強磁性体，強誘電体，半導体接合などが含まれた系では，一般には非線形の方程式になる．力学の問題は，むしろ非線形のものの方が普通である．しかし，力学，電磁気学，熱学など，どんな種類の問題でも，平衡状態，つまり，うまくつり合って変化がなく持続するような状態を基準にして，これからわずかばかりはずれた状態だけを考える場合には，線形と考えてよいのである．どんな曲線でも，その一部分を強く拡大して見ると，ほとんど直線に見えるのと，同じわけである．そのような問題を**微小変位**の問題，あるいは**微小振動**の問題と呼んでいる．振動や波動の現象は多くは微小振動の問題として扱うことができる．波動については7講『線形分布定数系論』の方で論じるので，本講では次に説明するような“集中定数系”の問題について論じることにする．

素子とその組合せ

本講の主題である“集中定数系”とは，離散的な，つまり多くの場合は有限個の，また無限であっても可算無限個の，変数によってその状態が記述されるような系のことである．具体的には，**質点系**，**剛体系**，**枠組構造**，**電気回路**，**磁気回路**，**流体回路**等いろいろのものがあるが，その特徴は，系を有限(または可算無限)個の**素子**のあつまりとしてとらえるところにある．力学系なら，質点，剛体，あるいはそれをつなぐばね等，電気回路ではコイル，抵抗等が素子であり，系はそれらの素子を一定の方式に従って**組み合わせ**て構成される．その意味で，集中定数系の問題は，**構造**(structure)の問題であるともいえる．

素子はその動作状態について，いくつかの**変数**によって特徴づけられる．電気回路の素子についていえば，これに流れる電流と，これに加わる電圧が，そ

のような変数である．質点についていえば，その座標 (x, y, z) と，これに加わる力 (X, Y, Z) がそれである．各素子は，それに固有な**法則**をもっていて，これにより，以上の変数が互いに結びつけられる．そうして，この法則が線形であるような素子(線形素子)ばかりからできている系を，線形集中定数系というわけである．

線形集中定数系のうちで，最もよくしらべられている電気回路の場合についていえば，これを構成する素子は**抵抗**，**コイル**，**コンデンサー**であり，それらは図1.1のような記号で書かれ，それぞれに固有な法則は，電圧を V，電流を I とすると，

$$\text{抵　　抗}\qquad V = RI, \tag{1.10}$$

$$\text{コ　イ　ル}\qquad V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LI), \tag{1.11}$$

$$\text{コンデンサー}\qquad I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(CV) \tag{1.12}$$

である．ここで，これらの関係は，どれも V と I とについて線形な関係であることは明らかであるから，これらは線形素子である．そうして，これらの法則の中に出てくる素子固有の数値 R, L, C 等を素子の**パラメーター**(**定数**)と呼ぶ．ここでのべた3種の素子はどれも1個の定数によって特徴づけられるものである．

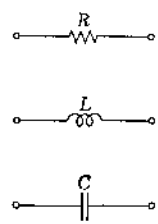


図1.1　基本回路素子

同様に，質点については，ニュートンの運動方程式

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= X, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= Y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= Z \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

が固有の方程式であり，これまた (x, y, z)，(X, Y, Z) に対しては線形の式と

いうことができる.

1.2 素子の結合

素子の結合(組合せ)の方法は,素子の種類によっていろいろとある.電気回路についていえば,素子はすべて1対の端子をもち,その間の電圧(電位差)が素子の状態をきめる量である.そこで,結合とは,一般に素子の端子を他の素子の端子と電気的に**接続**することである.こうして,回路素子の網(**回路網**)が構成される.そこで,回路網は一つの**線グラフ**(linear graph)であって,回路網の理論的取扱いには,**グラフの理論**(graph theory)が応用できる(第3章参照).

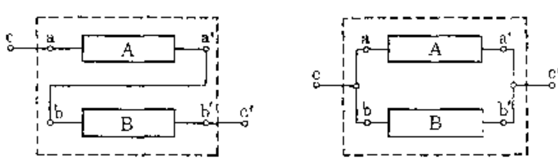
他の種類の素子でも,同様に結合の方式はそれぞれきまっているが,一般にもっと複雑である.それは,変数が空間座標のように3成分をもったベクトルであったり,端子が一つしかなかったりするからである.しかし,素子のあるものは回路素子と極めて似ていて,そのような意味で,電気回路は集中定数形の中で典型的なものである.

直列結合と並列結合

回路素子の最もよく知られた結合法はいうまでもなく**直列結合**と**並列結合**である.

直列結合では二つの素子AとBの端子対aa′; bb′についてそれぞれの一端a′, bを接続し(つまり電位が等しくなり),その端子は系の中にあるものとして忘れてしまって,残る二つの端子a, b′を外からさわることのできる端子として残し,こうして,一つの**複合素子**をつくる.

並列結合では,二つの素子AとBのおのおのの一つの端子a, bを互いに結び,おのおのの残る端子a′, b′も互いに結んで,こうしてできた二つの端子を



(a)　直列結合　　　(b)　並列結合

図1.2　基本的な結合方式

両方共，外からさわることのできる端子として残して，複合素子とする．

回路の理論の考え方の特徴は，このような複合素子を単純な素子と同様に考えて，それらを更に(同じような規則で)結合して行くことを考えるところにある．数学的な言い方をすれば，結合の操作は**帰納的**(recursive)である．

直列結合では，端子間の電圧は，構成素子の端子間電圧の和に等しく，電流はもとの二つの素子で等しく，それがまた複合素子の電流でもある．式で書けば

$$\left.\begin{aligned} V &= V_A+V_B, \\ I &= I_A = I_B. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

そこで，素子A, Bに対する法則が**抵抗**のそれ，すなわち

$$V_A = R_A I_A, \quad V_B = R_B I_B \tag{1.15}$$

であるなら，

$$V = V_A+V_B = (R_A+R_B)I. \tag{1.16}$$

これが直列結合でできた複合素子に対する法則である．(*1. 16*)を

$$V = RI \tag{1.17}$$

と書けば，当然

$$R = R_A+R_B \tag{1.18}$$

でなければならない．

(*1. 18*)から明らかなことは，直列結合にAとBの順序はどうでもよいことである．もちろん，物理的な形はAとBのどちらをどちらにつけたかで違うのであるが，結合されたものを，複合素子として見た場合，**交換則**が成り立つのである．

同じようにして，並列結合については

$$\left.\begin{aligned} V &= V_A = V_B, \\ I &= I_A+I_B \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

であるから，

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}. \tag{1.20}$$

並列結合についても交換則が成り立つのはいうまでもないが，この場合はそもそも順序というものが意味をもたない．

コ　イ　ル

コイルについては

$$V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{1.21}$$

であるが，$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ は I と同じ性質をもつから，

直列結合に対しては

$$L = L_A + L_B, \tag{1.22}$$

並列結合に対しては

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_B}. \tag{1.23}$$

コンデンサー

コンデンサーの方程式は

$$I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{1.24}$$

で，V と I が(1.21)と逆になっているので，上とは逆に，

並列結合に対しては

$$C = C_A + C_B, \tag{1.25}$$

直列結合に対しては

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \tag{1.26}$$

となる．

ば　　ね

ばねは力学系を構成する素子であるが，抵抗などと同様に二つの端をもつので，直列結合，並列結合が可能である．バネの状態をあらわす変数として，**の び** Δl と**力**(張力) F をとると，線形関係

$$F = s\Delta l \tag{1.27}$$

を得る．s は**ばね定数**または**スティフネス**と呼ばれる．ここで，二つのばね A, B を直列にすると，力のつり合いから

$$F_A = F_B. \tag{1.28}$$

また長さの相加性から

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B. \tag{1.29}$$

そこで，直列結合に対する法則

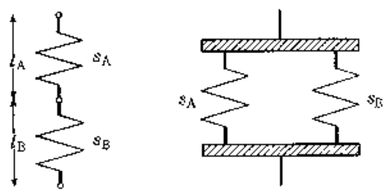
$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_A} + \frac{1}{s_B} \tag{1.30}$$

を得る．

逆に，並列結合では

$$s = s_A + s_B \tag{1.31}$$

となることは明らかである．



(a) 直列結合　　(b) 並列結合

図1.3 ばねの結合方式

ダッシュ・ポット

力学系の構成素子として，抵抗力を与えるものは**ダッシュ・ポット**(dash pot)と呼ばれる．扉の閉じるのを遅くするのに用いられるダンパーはその一種で，一般に油や空気の粘性を使って，長さの変化の速度にほぼ比例した抵抗力を与えるのに用いられ，図1.4のような記号で書かれる．したがってやはり二つの端をもっていて，直列，並列結合ができる．その法則は

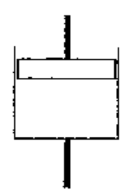


図1.4 ダッシュ・ポット

$$F = R\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \tag{1.32}$$

で R を**抵抗係数**と呼ぶ．そこで電気抵抗とは反対に，

直列結合で

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}, \tag{1.33}$$

並列結合で

$$R = R_A + R_B \tag{1.34}$$

となる.

ア ー ス

素子を組み合わせる際，多数の素子の一端を共通に一つの導体につないでしまう場合が多い．具体的には，部品を取りつける板，あるいは装置の外箱の導体がその役をするのが普通である．そのような場合は，2点間の電圧を問題にするかわりに，いつも，その共通な1点(アース，接地等と呼ぶ)と，1点との間の電位差を考えるのが便利である．これに応じて，電流も，アースでない方の側の端子に流れる電流だけを考えればよい．そこで，そのような場合は，端子を対にして考えないで，接地されていない方の一つ一つの端子を問題にすることになる．

電気以外の系でも，外箱，取付台，あるいは大地に一端を接続して使う場合が多く，その場合それらのものはアースと呼ぶことができる．

1.3 電源と内抵抗(定電圧源と定電流源)

回路素子に実際に電流を流すには，そのためのエネルギー源，つまり電源がなければならない．電源としては具体的には電池(化学電池)，発電機，熱電池，光電池等があるが，それらは普通は一定の電圧を発生するものとして扱われることが多い．すなわち，電源に抵抗をつなぐと，電源電圧 V によって $I=V/R$ だけの電流が流れると考えるわけである．しかし，実際には電源の端子電圧は電流を取り出すと低下するのが普通である．つまり V は I のある(単調減少)関数である†．いまは線形系を考えているのであるから，V もまた線形の式で近似的に

$$V = E - R_0 I \tag{1.35}$$

のようにあらわされるとするのが妥当である．ここで E を電源の起電力，R_0 を**内抵抗**と呼ぶ．内抵抗が0の電源を**定電圧源**または単に電圧源と呼ぶ．定電圧源では $V=E$ である．内抵抗 R_0 の電源はその起電力 E に等しい電圧の定電

† 化学電池などでは V はその瞬間の I だけでなく過去の I の経歴にも複雑に依存する．

圧源に抵抗値が R_0 の抵抗を**直列**に入れたもの(図 1.5(a))と等価であることは(*1.35*)から直ちにわかる．今後，回路図で電池の記号はいつも定電圧源を意味するものとする．

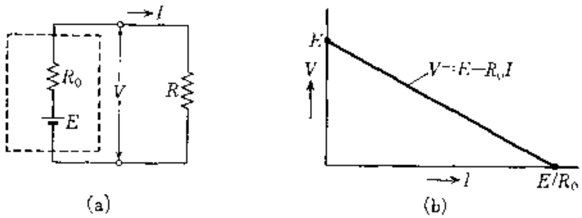


図 1.5　電源の等価回路と電圧電流特性

ここで R_0 を内抵抗と呼ぶけれども，実際の抵抗が電源の中に必ずしも実在するとは限らないことに注意する必要がある．R_0 は実在の電源の**電圧電流特性**(図 1.5(b))をあらわす定数，つまり

$$R_0 = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}I} \tag{1.36}$$

をあらわすに過ぎないので，図 1.5(a)でいえば四角でかこんだ部分全体が実際の電源なのである．

(*1.35*)を書きなおして

$$I = \frac{E}{R_0} - \frac{V}{R_0} = I_0 - \frac{V}{R_0} \tag{1.37}$$

と書くことができる．(*1.37*)を解釈すると，電源は内抵抗が ∞ で，いつも I_0 だけの電流を発生する電源，つまり**定電流源**(単に電流源ともいう)と値が R_0 の抵抗とを**並列**にしたものと等価だということになる(図 1.6)．定電流源からの電流 I_0 のうちで V/R_0 だけがバイパスしてしまうので，外には $I_0 - V/R_0$ だ

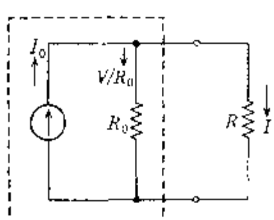


図 1.6　定電流源による等価回路