现代微分方程的理论和习题

R.布朗森　著

王祖城　　沈功　译

中　国　铁　道　出　版　社

1 9 8 4 年·北京

内 容 简 介

本书是国外纲要式数学丛书之一，专讲常微分方程的建立和现代常用解法。全书共39章，包括传统的理论和解法及目前常用的拉普拉斯变换、矩阵方法、数值解法和特征值问题等。每章均分为三个部分：第一部分扼要阐明本章的重点和难点；第二部分在解出习题的同时又进一步讲述了第一部分的内容；最后列有补充习题及答案。

本书可作为大专院校理、工科高等数学补充教材及科技工作者的自学参考书。

Theory and problems of Modern Introductory
DIFFERENTIAL EQUATIONS
by
Richard Bronson

现代微分方程的理论和习题
R·布朗森 著
王祖城 沈功 译
中国铁道出版社出版
责任编辑 施以仁
封面设计 刘景山
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 1/16 印张：17.5 字数：442千
1984年3月 第1版 1984年3月 第1次印刷
印数：0001—20,000 册 定价：2.20 元

目　　录

第1章　基本概念

§1.1　常微分方程

一个方程，如含有未知函数及其导数，称为微分方程。

例1.1.　下列微分方程含有未知函数 y：

$$\frac{dy}{dx}=5x+3 \tag{1.1}$$

$$e^{y}\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1 \tag{1.2}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3}+(\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}+5xy=0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7+y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=5x \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \tag{1.5}$$

如微分方程的未知函数是单元函数，称为常微分方程；若未知函数是多元函数，则称为偏微分方程。

例1.2.　方程（1.1）至（1.4），其未知函数 y 是 x 的单元函数，所以是常微分方程。方程（1.5）其未知函数是 x，t 的多元函数，所以是偏微分方程。

本书只研究常微分方程，简称微分方程。

§1.2　阶　与　次

微分方程的阶是指该方程中最高阶导数的阶。

例1.3.　方程（1.1）是一阶微分方程；（1.2）、（1.4）及（1.5）是二阶微分方程〔注意方程（1.4）中的最高阶导数是二阶的〕。方程（1.3）是三阶微分方程。

一个微分方程，如果能写成未知函数及其导数的多项式，则这个微分方程的次就是其导数最高阶的次。

例1.4.　方程（1.4）是三次微分方程因其最高阶导数是三次的。方程（1.1)及（1.3）是一次微分方程的实例。

但并非所有的微分方程都能按次分类。例如，方程（1.2）即无次数，因该方程含有 e^y 项不能写成未知函数及其导数的多项式。

§1.3　线性微分方程

一个以 y 为未知函数，以 x 为自变量的 n 阶常微分方程如具有以下形式则是线性的。

$$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+b_1(x)\frac{dy}{dx}+b_0(x)y=g(x) \tag{1.6}$$

函数$b_j(x)$（$j=0$，1，2，…，n）及$g(x)$假定是已知的，且仅是x的函数。不具有方程（1.6）形式的微分方程是非线性的。

例1.5. 方程（1.1）是一阶线性常微分方程，其中$b_1(x)=1$，$b_0(x)=0$及$g(x)=5x+3$。方程（1.3）是三阶线性常微分方程，其中$b_3(x)=4$，$b_2(x)=\sin x$，$b_1(x)=0$，$b_0(x)=5x$及$g(x)=0$。方程（1.2）及（1.4）是非线性常微分方程。

§1.4 符号表示法

符号y'、y''、y'''、$y^{(4)}$、…、$y^{(n)}$常用来分别代表函数y对于自变量x的一阶、二阶、三阶、四阶、……、n阶导数。因此，如自变量是x则y''代表$\frac{d^2y}{dx^2}$，如自变量是p，则y''代表$\frac{d^2y}{dp^2}$。如自变量是时间t，则用“·”代替“′”，即$\dot{y}$，$\ddot{y}$及$\dddot{y}$分别代表$\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$及$\frac{d^3y}{dt^3}$。

注意$y^{(n)}$代表y的n阶导数，而y^n代表y的n次方。

题及题解

在下列习题中，区分各微分方程的阶与次（如果有的话）及是否线性的；并给出未知函数及自变量。

1.1. $y'''-5xy'=e^x+1$

三阶：最高阶导数是三阶的。一次：本方程具有1.2节规定的形式，其最高阶导数是三阶一次的。线性：$b_3(x)=1$，$b_2(x)=0$，$b_1(x)=-5x$，$b_0(x)=0$，$g(x)=e^x+1$。未知函数为y；自变量为x。

1.2. $t\ddot{y}+t^2\dot{y}-(\sin t)\sqrt{y}=t^2-t+1$

二阶：最高阶导数是二阶的。无次：因本方程有$\sqrt{y}$存在不能写成y及其导数的多项式。非线性：该方程不具有方程（1.6）的形式。未知函数为y；自变量为t。

1.3. $s^2\frac{d^2t}{ds^2}+st\frac{dt}{ds}=s$

二阶，一次：本方程具有未知函t及其导数（其系数是s的函数）的多项式，其最高阶导数是二阶一次的。非线性：$b_1=st$是s及t的函数。未知函数为t；自变量为s。

1.4. $5\left(\frac{d^4b}{dp^4}\right)^5+7\left(\frac{db}{dp}\right)^{10}+b^7-b^5=p$

四阶，五次：本方程具有1.2节规定的形式，其最高阶导数是四阶五次的。非线性。未知函数为b；自变量为p。

1.5. $y\frac{d^2x}{dy^2}=y^2+1$

二阶，一次，线性：$b_2(y)=y$，$b_1(y)=0$，$b_0(y)=0$及$g(y)=y^2+1$。未知函数为x，自变量为y。

补 充 习 题

对以下各微分方程确定其（a）阶，（b）次（如果有的话），（c）线性或非线性，（d）未知函数及（e）自变量。

1.6. $(y'')^2-3yy'+xy=0$。

1.7. $x^4y^{(4)}+xy'''=e^x$。

1.8. $t^2\ddot{s}-t\dot{s}=1-\sin t$。

1.9. $y^{(4)}+xy'''+x^2y''-xy'+\sin y=0$。

1.10. $\dfrac{d^nx}{dy^n}=y^2+1$。

1.11. $\left(\dfrac{d^2r}{dy^2}\right)^2+\dfrac{d^2r}{dy^2}+y\dfrac{dr}{dy}=0$。

1.12. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{3/2}+y=x$。

1.13. $\dfrac{d^7b}{dp^7}=3p$。

1.14. $\left(\dfrac{db}{dp}\right)^7=3p$。

补充习题答案

1.6. （a） 2；（b） 2；（c） 非线性；（d） y；（e） x

1.7. （a） 4；（b） 1；（c） 线性；（d） y；（e） x

1.8. （a） 2；（b） 1；（c） 线性；（d） s；（e） t

1.9. （a） 4；（b） 无；（c） 非线性；（d） y；（e） x

1.10. （a） n；（b） 1；（c） 线性；（d） x；（e） y

1.11. （a） 2；（b） 2；（c） 非线性；（d） r；（e） y

1.12. （a） 2；（b） 无；（c） 非线性；（d） y；（e） x

1.13. （a） 7；（b） 1；（c） 线性；（d） b；（e） p

1.14. （a） 1；（b） 7；（c） 非线性；（d） b；（e） p

第 2 章　微分方程的解

§2.1　解 的 定 义

一个以y为未知函数，以x为自变量的微分方程在x的变化区间I的解，是当x在区间I时恒满足这个微分方程的函数$y(x)$。

例2.1.　$y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$，其中$c_1$及$c_2$均为任意常数，是否为$y''+4y=0$的一个解？

对y微分，得$y'=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x$　$y''=-4c_1\sin 2x-4c_2\cos 2x$

所以　$y''-4y=(-4c_1\sin 2x-4c_2\cos 2x)+4(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$

$$=(-4c_1+4c_1)\sin 2x+(-4c_2+4c_2)\cos 2x=0$$

因而，对全部x值，$y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$　都满足微分方程$y''+4y=0$，即在区间$(-\infty,\ \infty)$，$y(x)$是这个方程的解。

例2.2.　试确定$y=x^2-1$是否$(y')^4+y^2=-1$的一个解。

注意此微分方程左端系y^2及$(y')^4$之和，对任意x及任意实函数$y(x)$，均为非负值，而其右端则系负值。故任何函数$y(x)$均不能满足此方程，因而此方程无解。

由此，我们可以看出，有些微分方程有无限多个解(例2.1)，而另有些微分方程就没有解(例2.2)。有的微分方程还可能只有一个解。例如　$(y')^4+y^2=0$，基于与例2.2完全相同的理由，就只有$y\equiv 0$这一个解。

§2.2　特解及通解

一个微分方程的特解是任何一个解；通解是全部解的解族。

例2.3.　$y''+4y=0$之通解为$y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$（见第11章及第12章）。即任何一个特解均具有通解的形式。这个微分方程的几个特解可以是$(a)\ y=5\sin 2x-3\cos 2x$（取$c_1=5$，$c_2=-3$）；$(b)\ y=\sin 2x$（取$c_1=1$，$c_2=0$）；$(c)\ y\equiv 0$（取$c_1=c_2=0$）。

一个微分方程的通解不可能总用一个单一公式来表示。例如方程$y'+y^2=0$有两个特解：$y=\frac{1}{x}$及$y\equiv 0$。线性微分方程在这方面是特殊的，其通解将于第11章讨论。

§2.3　初值问题、边值问题

在带有附加条件的微分方程中，当自变量为定值时，未知函数值及其导数值均为已知，就构成了初值问题。这个附加条件称为初始条件。若附加条件给出的是一个以上的自变量的值，这问题就是边值问题其条件为边界条件。

例2.4.　问题$y''+2y'=e^x$；$y(\pi)=1$，$y'(\pi)=2$为初值问题，因为两个附加条件都是在$x=\pi$时给出的。问题$y''+2y'=e^x$；$y(0)=1$，$y(1)=1$为边值问题，因为两个附加

条件是在 $x=0$ 及 $x=1$ 时分别给出的。

一个初值问题或边值问题的解为一个函数$y(x)$，既满足微分方程（见2.1节的定义），又满足附加条件。

例2.5. 判断以下函数$(a)\,y_1(x)=\sin 2x$，$(b)\,y_2(x)=x$及$(c)\,y_3(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$是否初值问题$y''+4y=0$；$y(0)=0$，$y'(0)=1$的解。$(a)\,y_1(x)$是此微分方程的解，并满足第一初始条件$y(0)=0$。但$y_1(x)$不能满足第二个初始条件〔$y'_1(x)=2\cos 2x$；$y'_1(0)=2\cos 0=2\neq 1$〕；所以不是此初值问题的解。$(b)\,y_2(x)$满足两个初始条件，但不满足此微分方程；所以$y_2(x)$不是解。$(c)\,y_3(x)$既满足微分方程又满足两个初始条件，所以，它是此初值问题的解。

题及题解

2.1. 判断$y(x)=2e^{-x}+xe^{-x}$是否$y''+2y'+y=0$的一个解。

微分$y(x)$，得$y'(x)=-2e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=-e^{-x}-xe^{-x}$

$$y''(x)=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}$$

将这些值代入此微分方程，得

$$y''+2y'+y=xe^{-x}+2(-e^{-x}-xe^{-x})+(2e^{-x}+xe^{-x})=0$$

所以，$y(x)$是一个解。

2.2. $y(x)\equiv 1$是否为$y''+2y'+y=x$的一个解？

由$y(x)\equiv 1$得$y'(x)\equiv 0$　$y''(x)\equiv 0$。将这些值代入此微分方程，得

$$y''+2y'+y=0+2(0)+1=1\neq x$$

所以，$y(x)\equiv 1$不是解。

2.3. 证明$y=\ln x$在区间$I(0,\infty)$是$xy''+y'=0$的一个解，但在区间$\mathrm{I}(-\infty,\infty)$不是解。

在区间$(0,\infty)$ $y'=\frac{1}{x}$　及$y''=-\frac{1}{x^2}$。将这些值代入此微分方程，得

$$xy''+y'=x\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=0$$

因而，$y=\ln x$在区间$(0,\infty)$是一个解。

注意，因为负数及零的对数无定义，所以$y=\ln x$在区间$(-\infty,\infty)$不是该方程的解。

2.4. 证明$y=\frac{1}{(x^2-1)}$在区间$I(-1,1)$内是$y'+2xy^2=0$的一个解，但在任何大于I的区间则不是解。

在区间$(-1,1)$，$y=\frac{1}{x^2-1}$ 其导数 $y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$都是有明确定义的函数。将这些函数代入此微分方程，得

$$y'+2xy^2=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}+2x\left[\frac{1}{x^2-1}\right]^2=0$$

所以，$y=\frac{1}{x^2-1}$在区间$I=(-1,1)$是一个解。

注意，$\frac{1}{x^2-1}$当$x=\pm1$时无定义，所以$y=\frac{1}{x^2-1}$在包括±1这两个点的任意区间都不是解。

2.5. 求初值问题$y'+y=0$；$y(3)=2$的解。已知其通解为$y=c_1e^{-x}$（见第8章），其中c_1为任意常数。

因为对任何c_1值$y(x)$均为此微分方程的解，我们可以用满足初始条件来求c_1值。因$y(3)=c_1e^{-3}$，为了满足初始条件$y(3)=2$，我们可以选择c_1使$c_1e^{-3}=2$即$c_1=2e^3$。将此c_1值代入$y(x)$，得$y(x)=2e^3e^{-x}=2e^{3-x}$即为此初值问题的解。

2.6. 求初值问题$y''+4y=0$；$y(0)=0$，$y'(0)=1$的解，已知其通解为

$y(x)=c_1\sin2x+c_2\cos2x$（见第12章）。

因为对于c_1及c_2的任何值（见例2.1），$y(x)$均为此微分方程的解，我们可以利用满足初始条件来求c_1及c_2的值。为满足第一个初始条件$y(0)=0$，我们得出$c_2=0$。又因，$y'(x)=2c_1\cos2x-2c_2\sin2x$；于是，$y'(0)=2c_1\cos0-2c_2\sin0=2c_1$。为满足第二个初始条件$y'(0)=1$，我们得出$2c_1=1$，即$c_1=\frac{1}{2}$。将$c_1$及$c_2$值代入$y(x)$，得$y(x)=\frac{1}{2}\sin2x$即为初始问题的解（见例2.5）。

2.7. 求边值问题$y''+4y=0$；$y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$的解。已知其通解为$y(x)=c_1\sin2x+c_2\cos2x$。

$$因\ y\left(\frac{\pi}{8}\right)=c_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

为满足第一条件$y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，须使

$$c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=0 \tag{1}$$

又因 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=c_1\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\right)$

为满足第二条件$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，须使

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,c_1+\frac{1}{2}c_2=1 \tag{2}$$

解(1)及(2)得$c_1=-c_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

将这些值代入$y(x)$，得

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}-1}(\sin2x-\cos2x)$$

即为此边值问题的解。

2.8. 求边值问题$y''+4y=0$；$y(0)=1$，$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$的解。已知其通解为$y(x)=c_1\sin2x+c_2\cos2x$。

因$y(0)=c_1\sin0+c_2\cos0=c_2$，须使$c_2=1$才能满足$y(0)=1$。又因$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_1\sin\pi+c_2\cos\pi=-c_2$，须使$c_2=-2$才能满足第二个条件$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$。因此，如欲同时满足两个边界条件，$c_2$必须既等于1又等于$-2$；这当然是不可能的。故此问题无解。

2.9. 确定 c_1 及 c_2 以使 $y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+1$ 满足条件 $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$ 及 $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$。

因 $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=c_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1=c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+1$

为满足条件 $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，须使 $c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+1=0$，即

$$c_1+c_2=-\sqrt{2} \tag{1}$$

又因 $y'(x)=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x$，$y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2c_1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2c_2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=2c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)-2c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}c_1-\sqrt{2}c_2$

为满足条件 $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，须使 $\sqrt{2}c_1-\sqrt{2}c_2=\sqrt{2}$，即

$$c_1-c_2=1 \tag{2}$$

解(1)及(2)得 $c_1=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ 及 $c_2=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$。

2.10. 确定 c_1 及 c_2 以使 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^x+2\sin x$ 满足条件 $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$。

因为 $\sin 0=0$，$y(0)=c_1+c_2$。为满足条件 $y(0)=0$，须使

$$c_1+c_2=0 \tag{1}$$

由 $y'(x)=2c_1e^{2x}+c_2e^x+2\cos x$，得 $y'(0)=2c_1+c_2+2$。为满足条件 $y'(0)=1$，须使 $2c_1+c_2+2=1$ 即

$$2c_1+c_2=-1 \tag{2}$$

解(1)及(2)得 $c_1=-1$ 及 $c_2=1$。

补充习题

2.11. 下列函数，哪些是微分方程 $y''-y=0$ 的解？(a) e^x，(b) $\sin x$，(c) $4e^{-x}$，(d) 0，(e) $\frac{1}{2}x^2+1$。

2.12. 下列函数，哪些是微分方程 $y''-4y'+4y=e^x$ 的解？(a) e^x，(b) e^{2x}，(c) $e^{2x}+e^x$，(d) $xe^{2x}+e^x$，(e) $e^{2x}+xe^x$。

在习题2.13～2.22中，求 c_1 及 c_2 以使 $y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ 满足已知条件，并确定已给出的条件是初值条件还是边值条件。

2.13. $y(0)=1$，$y'(0)=2$。

2.14. $y(0)=2$，$y'(0)=1$。

2.15. $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$。

2.16. $y(0)=1$，$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

2.17. $y'(0)=1$，$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

2.18. $y(0)=1$，$y'(\pi)=1$。

2.19. $y(0)=1$，$y(\pi)=2$。

2.20. $y(0)=0$，$y'(0)=0$。

2.21. $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$。 2.22. $y(0)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

在习题2.23～2.27中，求c_1及c_2以使给出的函数满足规定的初始条件。

2.23. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+4\sin x$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$。

2.24. $y(x)=c_1x+c_2+x^2-1$; $y(1)=1$, $y'(1)=2$。

2.25. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+3e^{3x}$; $y(0)=0$, $y(0)=0$。

2.26. $y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+1$; $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$。

2.27. $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+x^2e^x$; $y(1)=1$, $y'(1)=-1$。

补充习题答案

2.11. (a), (c), (d)

2.12. (a), (c), (d)

2.13. $c_1=2$, $c_2=1$; 初始条件

2.14. $c_1=1$, $c_2=2$; 初始条件

2.15. $c_1=1$, $c_2=-2$; 初始条件

2.16. $c_1=c_2=1$; 边界条件

2.17. $c_1=1$, $c_2=-1$; 边界条件

2.18. $c_1=-1$, $c_2=1$; 边界条件

2.19. 无值; 边界条件

2.20. $c_1=c_2=0$; 初始条件

2.21. $c_1=\frac{-2}{\sqrt{3}-1}$, $c_2=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; 边界条件

2.22. 无值; 边界条件

2.23. $c_1=-2$, $c_3=3$

2.24. $c_1=0$, $c_2=1$

2.25. $c_1=3$, $c_2=-6$

2.26. $c_1=0$, $c_2=1$

2.27. $c_1=1+\frac{3}{e}$, $c_2=-2-\frac{2}{e}$

第 3 章　一阶微分方程的分类

§3.1　标准形式及微分形式

一阶微分方程的标准形式为

$$y'=f(x,\ y) \tag{3.1}$$

例3.1.　对于微分方程$y'=-y+\sin x$，其$f(x,y)=-y+\sin x$。对于$y'=\dfrac{3x^2y}{x^3+y^4}$，其$f(x,\ y)=\dfrac{3x^2y}{x^3+y^4}$。而微分方程$e^xy'+e^{2x}y=\sin x$就不是标准形式的；但可用代数方法解出$y'$，即可化为标准形。于是$e^xy'=-e^{2x}y+\sin x$，或$y'=-e^x+e^{-x}\sin x$，其$f(x,\ y)=-e^{-x}y+e^{-x}\sin x$。

定理3.1　若$f(x,y)$及$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$在矩形区域$R$：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$，内是连续的，则在$x_0$附近的区域里，初值问题$y'=f(x,y)$；$y(x_0)=y_0$具有唯一解。

式(3.1)中的函数$f(x,y)$可写成另外两个函数$M(x,y)$及$-N(x,y)$的商（为方便计采用负号）。由于$y'=\dfrac{dy}{dx}$，则式(3.1)可写成$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{M(x,y)}{-N(x,y)}$，此式等价于微分形式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3.2}$$

例3.2.　已知任一函数$f(x,y)$，有无限多个方法将其分解成另外两个函数的商。例如，若$f(x,y)=\dfrac{x+y}{y^2}$，则其 4 个分解函数为：

(a)　$M(x,y)=x+y$，$N(x,y)=-y^2$，$\dfrac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\dfrac{x+y}{-(-y^2)}=\dfrac{x+y}{y^2}$

(b)　$M(x,y)=-1$，$N(x,y)=\dfrac{y^2}{x+y}$，$\dfrac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\dfrac{-1}{-\dfrac{y^2}{x+y}}=\dfrac{x+y}{y^2}$

(c)　$M(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$，$N(x,y)=\dfrac{-y^2}{2}$，$\dfrac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\dfrac{\dfrac{(x+y)}{2}}{\dfrac{-(-y^2)}{2}}=\dfrac{x+y}{y^2}$

(d)　$M(x,y)=\dfrac{-x-y}{x^2}$，$N(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}$，$\dfrac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\dfrac{\dfrac{(-x-y)}{x^2}}{\dfrac{-y^2}{x^2}}=\dfrac{x+y}{y^2}$

本章以后各节用标准形式或微分形式给出四种类型微分方程的定义。必须着重指出，多数一阶微分方程，不属于此四种，也不能化成这四种中的任一种。对于这种微分方程，一般不能用分析方法求解。最好用数值方法求其近似解（见第32～35章）。

§3.2 线 性 方 程

考察一个标准形式的微分方程如式（3.1）。若$f(x,y)$可写成$f(x,y)=-p(x)y+q(x)$（即，一个x的函数乘y，加上另一个x的函数），则此微分方程是线性的。一阶线性微分方程常可写成以下形式：

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{3.3}$$

线性方程的解法见第8章。方程(3.3)是方程(1.6)的一个特殊情况，在方程(1.6)中令$n=1$，

$p(x)=\dfrac{b_0(x)}{b_1(x)}$，　$q(x)=\dfrac{g(x)}{b_1(x)}$　　即得方程(3.3)。

§3.3 齐 次 方 程

一个呈标准形式(3.1)的微分方程，如果对每一实数t恒有

$$f(tx,ty)=f(x,y) \tag{3.4}$$

则该方程是齐次的。齐次方程的解法见第5章。

注：在微分方程的一般范围内，“齐次”一词有完全不同的意义（见10.1节）。只有在有关一阶微分方程方面，“齐次”才有以上的定义。

§3.4 可分离变量的方程

考察一个微分形式的微分方程如式(3.2)。若$M(x,y)=A(x)$（一个只是x的函数），$N(x,y)=B(y)$（一个只是y的函数），则此微分方程是可分离的，或其变量是可分离的。可分离变量的微分方程的解法见第4章。

§3.5 恰 当 方 程

具有微分形式式(3.2)的微分方程，如果$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$，则称为恰当方程。恰当方程的解法见第6章（在该章中，对“恰当”一词给出了更为准确的定义）。

题 及 题 解

3.1. 判断以下微分方程是否线性的：

(a) $y'=(\sin x)y+e^x$，(b) $y'=x\sin y+e^x$，(c) $y'=5$，(d) $y'=y^2+x$。

(a) 线性；$p(x)=-\sin x$，$q(x)=e^x$。

(b) 非线性，因有$\sin y$项。

(c) 线性；$p(x)=0$，$q(x)=5$。

(d) 非线性，因有y^2项。

3.2. 判断以下微分方程是否齐次的：

(a) $y'=\dfrac{y+x}{x}$, (b) $y'=\dfrac{y^2}{x}$, (c) $y'=\dfrac{2xye^{x/y}}{x^2+y^2\sin\dfrac{x}{y}}$, (d) $y'=\dfrac{x^2+y}{x^3}$。

(a) 齐次，因

$$f(tx,\ ty)=\frac{ty+tx}{tx}=\frac{t(y+x)}{tx}=\frac{y+x}{x}=f(x,y)$$

(b) 非齐次，因

$$f(tx,\ ty)=\frac{(ty)^2}{tx}=\frac{t^2y^2}{tx}=t\frac{y^2}{x}\neq f(x,y)$$

(c) 齐次，因

$$f(tx,ty)=\frac{2(tx)(ty)e^{tx/ty}}{(tx)^2+(ty)^2\sin\dfrac{tx}{ty}}=\frac{t^2 2xye^{x/y}}{t^2x^2+t^2y^2\sin\dfrac{x}{y}}=\frac{2xye^{x/y}}{x^2+y^2\sin\dfrac{x}{y}}$$
$$=f(x,\ y)$$

(d) 非齐次，因

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+ty}{(tx)^3}=\frac{t^2x^2+ty}{t^3x^3}=\frac{tx^2+y}{t^2x^3}\neq f(x,y)$$

3.3. 判断以下微分方程是否可分离变量的：

(a) $\sin x dx+y^2dy=0$，(b) $xy^2dx-x^2y^2dy=0$，(c) $(1+xy)dx+ydy=0$。

(a) 可分离变量，$M(x,y)=A(x)=\sin x$，$N(x,y)=B(y)=y^2$。

(b) 此方程按给出的形式，是不可分离变量的，因$M(x,y)=xy^2$不只是x的函数。但如方程双方除以x^2y^2，则得$\left(\dfrac{1}{x}\right)dx+(-1)dy=0$，即化为可分离变量的。此时$A(x)=\dfrac{1}{x}$，$B(y)=-1$。

(c) 不可分离变量，因$M(x,y)=1+xy$，不只是x的函数。

3.4. 判断以下微分方程是否为恰当方程：

(a) $3x^2ydx+(y+x^3)dy=0$，(b) $xydx+y^2dy=0$。

(a) 恰当方程；$M(x,y)=3x^2y$，$N(x,y)=y+x^3$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=3x^2$。

(b) 非恰当方程；$M(x,y)=xy$，$N(x,y)=y^2$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=x$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=0$，

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$。

3.5. 证明一个可分离变量的方程总是一个恰当方程。

对可分离变量的微分方程，$M(x,y)=A(x)$，$N(x,y)=B(y)$。因而，$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial A(x)}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial B(y)}{\partial x}=0$

由于$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，此微分方程是恰当方程。

3.6. 初值问题 $y'=2\sqrt{|y|}$；$y(0)=0$ 有两个解$y=x|x|$及$y\equiv 0$。此结果是否违反定理3.1？

否。因$f(x,y)=2\sqrt{|y|}$,所以,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在原点不存在。

补 充 习 题

下列各一阶微分方程的标准形式及微分形式均已分别给出。试问其属于本章所给出定义的四种微分方程的哪种

3.7. $y'=xy$; $xydx-dy=0$。

3.8. $y'=xy$; $xdx-\dfrac{1}{y}dy=0$。

3.9. $y'=xy+1$; $(xy+1)dx-dy=0$。

3.10. $y'=\dfrac{x^2}{y^2}$; $\dfrac{x^2}{y^2}dx-dy=0$。

3.11. $y'=\dfrac{x^2}{y^2}$; $-x^2dx+y^2dy=0$。

3.12. $y'=-\dfrac{2y}{x}$; $2xydx+x^2dy=0$。

3.13. $y'=\dfrac{xy^2}{x^2y+y^3}$; $xy^2dx-(x^2y+y^3)dy=0$。

3.14. $y'=\dfrac{-xy^2}{x^2y+y^2}$; $xy^2dx+(x^2y+y^2)dy=0$。

补充习题答案

3.7. 线性

3.8. 线性，可分离及恰当

3.9. 线性

3.10. 齐次

3.11. 齐次，可分离及恰当

3.12. 线性，齐次及恰当

3.13. 齐次

3.14. 恰当

第 4 章 可分离变量的一阶微分方程

§4.1 通 解

考察一阶可分离变量的微分方程（见3.4节）：

$$A(x)dx+B(y)dy=0 \tag{4.1}$$

如习题4.8所证，方程(4.1)的解为

$$\int A(x)dx+\int B(y)dy=c \tag{4.2}$$

其中 c 为任意常数。

式(4.2)中的积分，在实际应用上往往不可能计算。在此情况下，有时不得不应用数值计算（见32～35章）求其近似解。即或式(4.2)可以积分，有时也不可能用代数方法将 y 做为 x 的函数求出来。在此情况下所求的解只能以隐函数的形式得出（见习题4.4）。

§4.2 初 值 问 题

初值问题 $A(x)dx+B(y)dy=0$； $y(x_0)=y_0$ (4.3)

的解法一般系先用式(4.2)解微分方程，再应用初始条件直接求出 c 值（见习题4.5）。

另一种解法是，式(4.3)的解可由

$$\int_{x_0}^{x} A(x)dx+\int_{y_0}^{y} B(y)dy=0 \tag{4.4}$$

得出。但方程(4.4)可能得不出式(4.3)的唯一解，即式(4.4)可能有许多解，其中只有一个满足初始条件（见习题4.6）。

题 及 题 解

4.1. 解 $xdx-y^2dy=0$

对此微分方程，$A(x)=x$，$B(y)=-y^2$。将这些值代入式(4.2)，得 $\int xdx+\int(-y^2)dy=c$，积分后成为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}=c$。解出 y，得方程之解为

$$y=\left(\frac{3}{2}x^2+k\right)^{1/3}\quad, k=-3c。$$

4.2. 解 $y'=y^2x^3$

将此微分方程改写成微分形式（见3.1节）$x^3dx-\left(\frac{1}{y^2}\right)dy=0$。则 $A(x)=x^3$，$B(y)=-\frac{1}{y^2}$。将这些值代入式(4.2)，得