机电能量变换

〔美〕D. C. 怀特
H. H. 伍德逊 著
曾继鐸 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书在电动力学的基础上，从集总参数法开始，分别采用（1）任选位移与能量守恒法及力学定律和（2）汉密尔頓原理及拉格朗日方程导出机电系統的动力运动方程．接着提出一般化电机模型和二相变换，并基于上述理論在模型上使用选定的制約，以获得大多数慣用电机和許多非慣用电机的运动方程．

书中还介紹了解机电运动方程的主要典型分析技术，并通过具体例解的方式，詳細論述了慣用各种电机的动力学，得到須在工程实际中重視的动态和稳态特性．此外，还扼要地介紹了反饋控制系統理論，并例解电机的特性是怎样影响互連电机系統的动态行为．最后，为了使論述进一步普遍化，还介紹了 n-m 相电机的一般化分析方法和电机中空間諧波的分析方法．

本书是大学教学参考书，也可供电工技术人員参考．

ELECTROMECHANICAL

ENERGY CONVERSION

David C. White, Herbert H. Woodson

John Wiley & Sons, Inc. (1959)

机 电 能 量 变 换

曾 継 鐸 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

大东集成联合印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/23　印張 23 19/23　插頁 4　排版字数 522,000

1964 年 10 月第 1 版　1964 年 10 月第 1 次印刷　印数 1—5,500

統一书号 15119·52　定价（科六）3.00 元

目　　录

前　言
原　序
第一章　机电系統的动力运动方程 …………………………………………（1）
1.0 引言…………………………………………………………………（1）
1.1 研究机电系統动力学的各种途徑……………………………………（1）
1.2 机电学中的基本公式………………………………………………（2）
1.3 汉密尔頓原理………………………………………………………（24）
1.4 状态函数……………………………………………………………（30）
1.5 扩充汉密尔頓原理到非保守系統……………………………………（48）
1.6 准坐标和可遺坐标…………………………………………………（57）
习题……………………………………………………………………（63）
第二章　处理机电运动方程的分析技术附典型的换能器为例 ………………（71）
2.0 引言…………………………………………………………………（71）
2.1 研究常系数綫性微分方程的技术……………………………………（72）
2.2 研究变系数綫性微分方程的技术……………………………………（122）
2.3 研究非綫性微分方程的技术…………………………………………（130）
2.4 总結…………………………………………………………………（134）
习题……………………………………………………………………（135）
第三章　一般化、磁場式、旋轉的机电能量变换器 …………………………（140）
3.0 引言…………………………………………………………………（140）
3.1 一般化电机…………………………………………………………（141）
3.2 一般化电机的运动方程——应用基本的力律…………………………（158）
3.3 一般化电机的运动方程——应用拉格朗日法…………………………（161）
3.4 运动方程的討論……………………………………………………（167）
3.5 轉矩生产与能量变换………………………………………………（172）
3.6 常速制約下的伏安方程……………………………………………（177）
3.7 摘要…………………………………………………………………（207）
习题……………………………………………………………………（208）

第四章 二相变换与一般化电机 ………… (213)

4.0 引言 ………… (213)

4.1 綫性变换 ………… (214)

4.2 用 $\alpha\beta$ 变数表达的一般化电机运动方程 ………… (217)

4.3 dq 旋轉实变换 ………… (223)

4.4 一般化旋轉实变换($\gamma\delta$) ………… (251)

4.5 复变换 ………… (261)

4.6 fb 旋轉复变换 ………… (268)

4.7 变换一覽 ………… (288)

习題 ………… (292)

第五章 系統动力学基础 ………… (301)

5.0 引言 ………… (301)

5.1 反饋原理 ………… (302)

5.2 表示傳递函数的图解法 ………… (305)

5.3 反饋对动态特性的影响 ………… (309)

5.4 稳度 ………… (310)

5.5 总結 ………… (326)

习題 ………… (326)

第六章 換能器的动力学 ………… (331)

6.0 引言 ………… (331)

6.1 轉矩电动机 ………… (331)

6.2 靜电式傳声器 ………… (347)

第七章 整流子电机的动力学 ………… (353)

7.0 引言 ………… (353)

7.1 四刷整流子电机的运动方程 ………… (353)

7.2 单軸直流电机 ………… (356)

7.3 多磁場二軸直流电机 ………… (378)

习題 ………… (391)

第八章 感应电机的动力学 ………… (397)

8.0 引言 ………… (397)

8.1 运动方程 ………… (398)

8.2 感应电机的制約 ………… (403)

8.3 一般的动态課題 ………… (404)

8.4 二相伺服电动机 ………… (408)

8.5 三相感应电机 ………… (413)

8.6 总結 ………… (420)

习题……………………………………………………………………………………（421）
第九章　同步电机的动力学 ……………………………………………………………（424）
9.0 引言……………………………………………………………………………………（424）
9.1 理想化同步电机的运动方程…………………………………………………………（425）
9.2 同步发电机……………………………………………………………………………（430）
9.3 用以解电压調整課題的同步发电机計算机表象……………………………………（438）
9.4 并联交流发电机的动态表象…………………………………………………………（446）
9.5 总結……………………………………………………………………………………（451）
习题……………………………………………………………………………………（451）
第十章　*n-m* 繞組电机的一般化分析 ………………………………………………（453）
10.0 引言 …………………………………………………………………………………（453）
10.1 分析技术 ……………………………………………………………………………（454）
10.2 *n-m* 繞組电机 ………………………………………………………………………（473）
10.3 总結 …………………………………………………………………………………（494）
习题……………………………………………………………………………………（495）
第十一章　电机中空間諧波的分析 ……………………………………………………（499）
11.0 引言 …………………………………………………………………………………（499）
11.1 定子和轉子上有非正弦电流片的二相电机 ………………………………………（499）
11.2 二軸整流子电机 ……………………………………………………………………（511）
索　引 ……………………………………………………………………………………（528）

第 一 章

机电系統的动力运动方程

1.0 引 言

机电的能量变換是电动力相互作用的結果；要作出精确而完善的論述，需要研究在电磁場里运动的載电物体．然而，就准靜力（低頻率）和低速度的机电系統来說，用从靜場解法計算出来的集总电路参数，可以很准确地列出它的动力运动方程❶．

本书的主题就是用集总参数描写机电系統的特性。这包含三个較大的論題：(1)系統物理上的描述，(2)系統运动微分方程的推导，和(3)符合所关心的具体运行条件的方程解法．对系統进行物理的描述，需要創制理想化的模型；模型的特性取决于課題的物理学，它的全貌同用途有关．理想化模型的运动方程，可以按几个方式去获得，其中一些将在本章涉及．因任何能量变換系統的方程都是非綫性的，运动方程的解法一般說来是难的．就某些应用（例如小信号）来說，一些方程可以綫性化；在其他一些方程中，更換变数会使方程簡化．对于少数的情况，则非解完整的非綫性方程不可，并可能需要机械計算技术．所碰到的非綫性是哪种形式，是否能够簡化，要看机电系統本身和它們的应用怎样才能确定．

1.1 研究机电系統动力学的各种途徑

不論用得自电磁場理論的力密度，或用得自任选位移与能量守恒法的电动机械力，都能够根据物理学的定律决定机电系統的动力运动方程．

❶ 关于在相对运动中的系統路与場的关系的討論，参閱 R. M. Fano and L. J. Chu, *Fields, Energy, and Forces*, John Wiley, New York, 1959.——原注

不然，把变分原理应用于选定的能量函数，也能获得这方程．这些方法哪个比較更基本些是难說的，如果使用得当的話，这两个方法都能导致正确的結果．然而，就所用分析技术的形式来說，它們之間却有很大的区别．

应用力律以获得运动方程，从分析的角度看来，大概只勉强够得上形式科学，当处理包含許多变数的复杂系統时，需要較高的見識和判断力．由于机械运动产生的电耦合項以及系統电和力学部分的运动方程，都得自著名的力律；例如法拉第定律、庫倫定律、基尔霍夫定律和达朗伯原理等．然后，再用任选位移与能量守恒法去获得系統間相互作用的机械力，因为，用这个方法推导表达为电路之量的机械力方程是容易的．不然，把从电磁場理論导得的力密度积分，也能获得这些耦合項．

根据变分原理推导运动方程的方法，和前一方法显然不同．先用广义变数集給状态函数下定义，給一切类型的系統建立公用的术語，不管这些系統是电的、机械的、热的、声的、或者别的；然后，再用一个基本的假說——例如汉密尔頓原理，給一切含有任何耦合項的系統决定运动方程．这个变分法在分析上是十分合乎形式科学的．不过，在数学的步驟中，可能难以洞悉物理的过程．然而，如果适当了解这个方法，并充分注意状态函数的选擇，仍能借这方法的普遍性而获得物理上的知識．变分法是动力学中最有效的技术之一；虽然新手使用这个方法，由于概念上的困难或缺乏物理的洞察力而不知所措，但变分技术顛扑不破的价值，不会仅仅因此而遭到摒弃．

1.2 机电学中的基本公式

静力学中基本的力的关系是，作用于物体上的全部力平衡而总和为零．达朗伯采用这个基本的概念，认为力学系統达到动力平衡时，所有的力之和等于零❶．就多回路的动力系統来說，达朗伯原理要求，在第 k 个机械节点上❷，

---

❶ 关于其他的細节，参閱 H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953．——原注

❷ 本章的术語和定义，系假定某物理系統已經代以它的机械及电的等效回路而規定的．譬如說，某“机械节点”或“机械回路”是指机械等效回路的某节点或回路．各个机械节点只有一次自由度，并由一个坐标，例如 x_k 来描写．——原注

$$\sum_{i=1}^{s}(\dot{p}_{k_i}-f_{k_i})=0 \tag{1-1a}$$

式中 $\dot{p}_{k_i}=\dfrac{dp_{k_i}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(m_k\dot{x}_{ki})$=第 k 个节点上的第 i 个惯性力;

f_{k_i}=第 i 个外加机械力,包括第 k 个节点上的任何約束力.

要达到动力平衡,除了要满足达朗伯原理之外,还必須满足空間連續律.这就是說,繞任一机械回路(第 k 条回路)的全部位移或速度之和必須为零

$$\sum_{i=1}^{r}\dot{x}_{k_i}=0 \tag{1-1b}$$

式中,$\dot{x}_{k_i}$=第 k 条回路中的第 i 个速度.

电系統也是如此.基尔霍夫所創立的动力平衡方程也属于力的总和等于零的形式,此外还有一个电荷連續律方程❶.就电路来說,力方程表达如下:繞某一回路(第 k 条回路)的全部电压降等于零

$$\sum_{i=1}^{s'}e_{k_i}=0 \tag{1-1c}$$

式中,e_{k_i}=第 k 条回路中的第 i 个电压. 电荷連續律或电流的連續律就是流入某一节点(第 k 个节点)的一切电流的总和必須等于零

$$\sum_{i=1}^{r'}i_{k_i}=0 \tag{1-1d}$$

式中,i_{k_i}=流入第 k 个节点的第 i 股电流.

如果在达朗伯原理(式 1-1 a)中算入电动机械力、并在基尔霍夫定律(式 1-1 c 和 d)的电压和电流中算入机械运动的效果,則达朗伯原理(式 1-1 a)、空間連續律(式 1-1 b)和基尔霍夫定律(式 1-1 c 和 d)便表达了机电系統的完整运动方程.

从路的观点研究机电装置动力学所需的基本定律現在已經完备.遺憾的是,所表达的机电耦合机械力的形式,容易供作电磁場的課題之用时,在互連的电和力学系統等效回路論述中,却不能立供采用.除非物理装置十分簡单,难以用积分法,使通过电磁場之量表达的宏观的力方程直接推广为用电路之量表达的力方程.然而,用任选位移与能量守恒法去推求这些耦合項,是較容易的.

❶ 至于更多的細节,参閱 E. A. Guillemin, *Introductory Circuit Theory*, John Wiley, New York, 1953.——原注

1.2.1 用任选位移与能量守恒法推求机电耦合的机械力

用任选位移❶与能量守恒法分析复杂的机电系統时，第一个步驟就是把系統所包含的机电耦合項的項数减到最低限度．要做这个工作，需把系統中一切純粹属于电的部分同一切純粹属于机械的部分，連同損耗，照图 1-1 分开．这样的分离手續，要做得使各电双端只同一个电或磁的儲能体耦合．和不同儲能体耦合的各回路間的內部連接，都包括在外部电网絡之內．机械双端所表达的机械变数，就是影响电場和磁場中的儲能体的东西．机械变数之間的任何純粹机械耦合，例如齿輪系和彈簧等等，都包括在外接机械网絡之內．

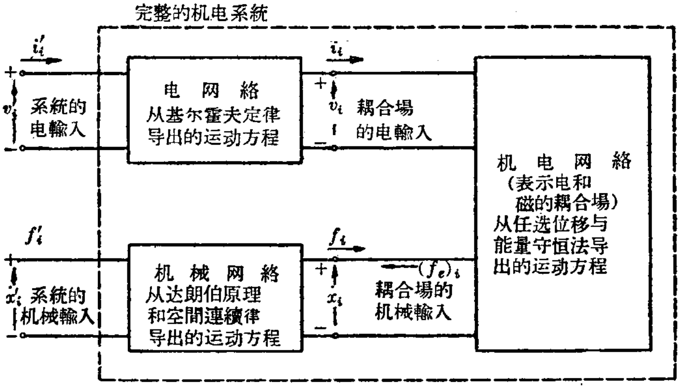

图 1-1 机电系統簡化图（供任选位移与能量守恒法分析之用）

这个分离手續导致象图 1-2 里有 n 个电双端和 m 个机械双端的一般保守机电耦合网絡．依靠集总参数法，将使电双端各同一个磁場儲能体或电場儲能体耦合．肯定地說，假定 n 个电双端中，有 $1 \leqslant i \leqslant l$ 个同电場儲能体耦合，有 $(l+1) \leqslant i \leqslant n$ 个同磁場儲能体耦合．儲于耦合网絡的总儲能 W 給定为

$$W = W_e + W_m \tag{1-2}$$

式中，W_e 是儲于电場的能量，W_m 是儲于磁場的能量．

在图 1-2 耦合网絡的集总参数表象中，系統变数須函数地相关．例如，如果这个机电网絡的特性能够用在电方面是綫性的电感来描写，第 k

---

❶ 关于虛构位移原理的論述，参閱 Goldstein 的文章或 E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, Dover Publications, New York, 1944.——原注

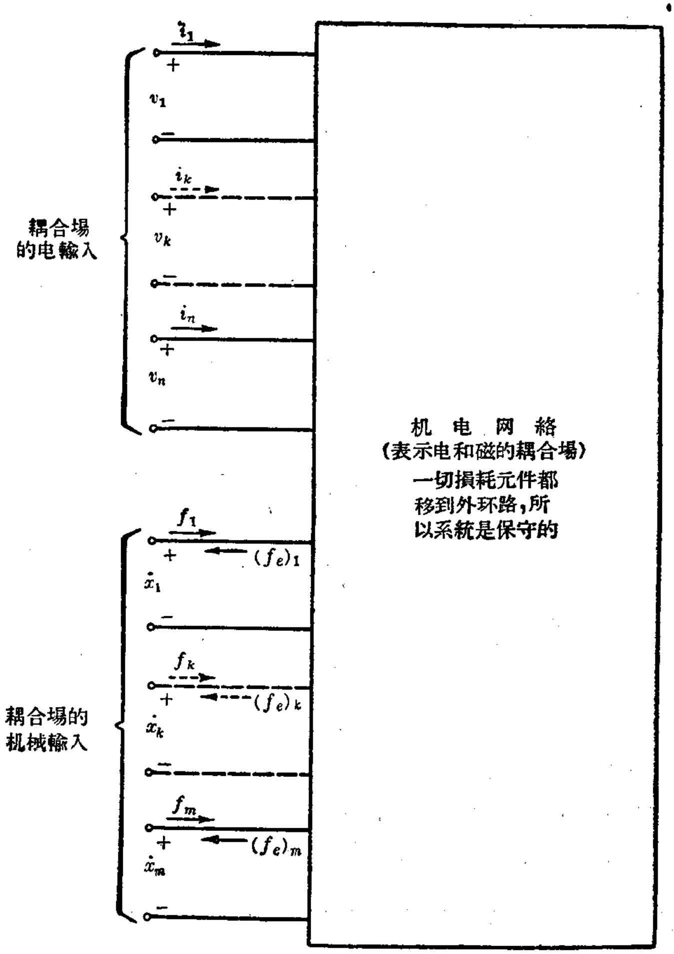

图 1-2 耦合系統的定义(供任选位移与能量守恒法分析之用)

股磁通鏈为

$$\lambda_k = \sum_{i=l+1}^{n} L_{k_i} i_i \tag{1-3a}$$

式中,电感 L_{k_i} 是机械坐标 x_1、⋯、x_m 的函数

$$L_{k_i} \equiv L_{k_i}(x_1、\cdots、x_m) \tag{1-3 b}$$

类似地,就电方面是綫性的电容系統来說,将出現

$$q_k = \sum_{i=1}^{l} C_{k_i} v_i \tag{1-3 c}$$

式中,电容 C_{k_i} 也是机械坐标 x_1、⋯、x_m 的函数

$$C_{k_i} = C_{k_i}(x_1、\cdots、x_m) \tag{1-3 d}$$

一般地說,系統可能是非綫性的,这样,参数 L 和 C 便不能如此解釋. 在

这样的情况里,变数之間的函数关系只能是一般的;例如

第k个感应体的磁通鏈同电流的关系

$$\lambda_k=\lambda_k(i_{l+1}、\cdots、i_n;\quad x_1、\cdots、x_m) \tag{1-4 a}$$

和

$$i_k=i_k(\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;\quad x_1、\cdots、x_m) \tag{1-4 b}$$

第k个电容器的电压同电荷的关系

$$v_k=v_k(q_1、\cdots、q_l;\quad x_1、\cdots、x_m) \tag{1-4 c}$$

和

$$q_k=q_k(v_1、\cdots、v_l;\quad x_1、\cdots、x_m) \tag{1-4 d}$$

总之,因为假定了机电耦合場所儲的能量可以用状态函数描述,則不論变数間的关系是綫性的抑是非綫性的,这些关系都限制为单值的函数.

把机电耦合网絡的儲能假定为状态函数，势必使它成为系統变数的单值函数，同变数的导数及积分无关．因此，儲能W可以是系統的即时組态的函数，但必須同动力状态及过去的历史无关．要求能量为状态函数，比要求式 1-4a～d 等表示式为单值函数更为有力．是状态函数的儲能，总是产生单值的內部制約的；但仅說单值的內部制約，并不保証儲能为状态函数(参閱 1.4.6 节)．

总之,要求能量函数为状态函数这一制約,使机电系統有下面的一些限制:

1．从电磁場估算的集总参数,必須能够导自靜(零阶的)場❶.

2．变数之間的函数关系(式 1-4a～d)，必須是单值的.

3．表达式 1-4a～d 中变数的函数关系时,不能把磁滞算进去．这并不意味着不能用置于耦合系統之外的阻力元件代表由于磁滞而引起的損耗.

把描写机电耦合場的能量函数限制为状态函数这一着，創造了能够按随便选定的方式把全部系統变数引到它們的終值以决定耦合場所儲能量的条件．参照图 1-2，把一切加在各双端使系統变数从零值变到某一終值的能量加起来,便是建立机电耦合場的能量．因此,儲能

❶ 参閱 Fano 及 Chu 的著作．——原注

$$W=W(q_1、\cdots、q_l;v_1、\cdots、v_l;\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;$$
$$i_{l+1}、\cdots、i_n;x_1、\cdots、x_m;f_1、\cdots、f_m) \quad (1\text{-}5a)$$

能够照下式計算:

$$W=\int_{0、\cdots、0;0、\cdots、0;0、\cdots、0、\cdots、0}^{q_1、\cdots、q_l;\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;x_1、\cdots、x_m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[v'_i(q'_1、\cdots、q'_l;x'_1、\cdots、x'_m)dq'_i$$
$$+i'_i(\lambda'_{l+1}、\cdots、\lambda'_n;x'_1、\cdots、x'_m)d\lambda'_i$$
$$+f'_j(q'_1、\cdots、q'_l;\lambda'_{l+1}、\cdots、\lambda'_n;x'_1、\cdots、x'_m)dx'_j] \quad (1\text{-}5b)$$

式中,有撇号的变数指积分的变数. 完成对所有系統变数的积分,式1-5a和b的能量函数便已算出. 限定式1-5b所示的函数关系須有单値性质以产生状态函数之后,允許随便选取便当的积分路綫来进行綫积分. 而且,由于式1-5b里各变数是相互关連的,很明显,q_i、v_i、i_i、λ_i、f_j和x_j这六个变数中,只能有三个独立的变数,其他三个須满足下面形式的內部制約方程

$$v_i=v_i(q_1、\cdots、q_l;x_1、\cdots、x_m) \quad (1\text{-}6a)$$

$$i_i=i_i(\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;x_1、\cdots、x_m) \quad (1\text{-}6b)$$

$$f_j=f_j(q_1、\cdots、q_l;\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;x_1、\cdots、x_m) \quad (1\text{-}6c)$$

从这些制約方程看来,能量函数W能够表达为三个独立变数的函数,而就制約方程1-6a～c来說,这些独立变数是q_i、λ_i及x_j,因而能量函数成为

$$W=W(q_1、\cdots、q_l;\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;x_1、\cdots、x_m) \quad (1\text{-}6d)$$

虽然上面已經把q_i、λ_i和x_j算做独立变数,但式1-6a～c的单値关系能够解出,允許把六个变数中的任何三个当做独立变数处理.

一般地說,在机电系統中,求得取决于物理組态的电和磁的靜場解答,便能够計算制約方程式1-6a和b. f_i这个力的制約方程的計算,通常是难得多的. 因为能量是状态函数,当装配机械系統时,可以使所有的电变数λ_i和q_i为零,然后,再在确定电变数的終值时,保持全部机械坐标x_j恒定,以获得正确的能量函数. 普通的实用方法就是利用这个事实,先找电变数的制約关系,再用它們估算儲能. 依照这条路綫来装配系統的話,能量函数成为

$$W(q_1、\cdots、q_l;\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;x_1、\cdots、x_m)$$
$$=\int_{0、\cdots、0;0、\cdots、0;x_1、\cdots、x_m}^{q_1、\cdots、q_l;\lambda_{l+1}、\cdots、\lambda_n;x_1、\cdots、x_m}\sum_{i=1}^{n}[v'_i(q'_1、\cdots、q'_l;x_1、\cdots、x_m)dq'_i$$
$$+i'_i(\lambda'_{l+1}、\cdots、\lambda'_n;x_1、\cdots、x_m)d\lambda'_i] \quad (1\text{-}7)$$

式 1-7 給定的能量函数，能够用来寻求約束力 f_i，机电耦合力也就可以找出来了.

储能的形式和图 1-2 所示网絡的本质表明，n 个电变数及 m 个机械变数可以任意指定. 这可以解釋为，这耦合网絡有 $(n+m)$ 次自由度. 根据一次自由度表示无損耗系統中一个独立儲能体这个通常的解釋，尽管式1-7里的儲能只分配給 n 个电双端的每一个,这耦合网絡看来有 $(n+m)$ 个独立的儲能体. 这話看来似乎含混，但知道向机械端供应的机械能量不跑到电場里便跑到磁場里，便可以了然. 因此可以說,耦合机电系統中的电和磁場儲藏着电和机械两种能量，因而它們能够表示电和机械二者的自由度.

图 1-2 的机电耦合网絡，可据以寻找网絡的端点特性. 依照上面的討論，可以任意在 $(n+m)$ 个双端上各指定一个变数. 先考慮同电場儲能体耦合的 l 个电双端. 当 q_i 和 x_j 是任意指定的，第 i 个双端的电流是

$$i_i=\frac{dq_i}{dt} \tag{1-8}$$

而跨第 i 个双端的电压由內部制約方程式 1-6a 給示. 其次，考虑同磁場儲能体耦合的 $(n-l)$ 个电双端. 当 λ_i 和 x_j 是任意指定时，跨第 i 个双端的电压由法拉第定律給定为

$$v_i=\frac{d\lambda_i}{dt} \tag{1-9}$$

而电流 i_i 由內部制約方程式 1-6b 給示. 就这样，已經把电端点的伏安特性决定了，所以耦合网絡电部分的效应可以包括在图 1-1 所示外部电网絡的方程之內. 应該說明，如果不是給 l 个电場儲能体指定变数 q_i 和 $(n-l)$ 个磁場儲能体指定变数 λ_i，也可能把电場儲能体处的电压 v_i 和磁場儲能体处的电流 i_i 做独立的变数；在那种情况下，将用式 1-6a 和 b 所示的內部制約，以获得 q_i 和 λ_i，而納入式 1-8 和 1-9.

第二个課題是找出由于机电耦合而发生的力. 因为 m 个机械双端的特性是用 m 个独立变数来描述的，能够分别考虑各个机械双端以寻求电动机械力. 把图 1-2 所示的力 $(f_e)_k$ 解釋为**机电耦合网絡施于**第 k 个机械坐标（节点）的力，考虑当所有其他的机械坐标保持不动时（即当 $j\neq k$ 时，$dx_j=0$），第 k 个机械坐标在 dt 时間內有任选位移 dx_k，可借以寻求

$(f_e)_k$. 在 dt 时間內，电变数改变了，而这些变动除了必須滿足式 1-6a 和 b 的內部制約之外，完全是任意的. 这意味着，各个电双端中只有一个电变数可以任意变动. 在任选的运动期間，能量必然守恒. 在任选运动中应涉及的各种能量为

$$\text{在电端点供应的能量} = \sum_{i=1}^{n} v_i i_i \, dt \tag{1-10a}$$

$$\text{在机械端点供应的能量} = -(f_e)_k \dot{x}_k \, dt = -(f_e)_k \, dx_k \tag{1-10b}$$

$$\text{耦合場所儲电和磁能的变量} = dW \tag{1-10c}$$

式中的 W 是耦合場中电和磁儲能的总量(式 1-5b).

$$\text{发散的能量損耗} = 0 \tag{1-10d}$$

因所有的損耗元件已从图 1-2 所示的网絡移开.

能量守恒原則要求輸入能量之和必須等于儲能的变量；因此，由式 1-10，

$$-(f_e)_k \, dx_k + \sum_{i=1}^{n} v_i i_i \, dt = dW \tag{1-11}$$

根据这个式子，机电耦合場施于第 k 个机械节点的力是

$$(f_e)_k = \frac{1}{dx_k}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i i_i \, dt - dW\right) \tag{1-12}$$

当 n 个独立电变数和 m 个独立机械坐标指定时，式 1-12 給出施于第 k 个机械节点的力，而第 k 个机械节点的速度是 $dx_k/dt = \dot{x}_k$. 图 1-2 的机电网絡中机械双端的力速特性便因此而确定了. 式 1-12 所示的力可以結合达朗伯原理，給第 k 个机械节点写出如下的平衡方程:

$$\dot{p}_k - [f_k + (f_m)_k + (f_e)_k] = 0 \tag{1-13}$$

式中，$\dot{p}_k$ 是慣性力，f_k 是外加的机械力，而 $(f_m)_k$ 是机械彈簧所施的力. 所有这三項，都认为是包含在图 1-1 的机械网絡之內的.

在推导式 1-12 中的力的过程中，电变数是在同式 1-6a 和 b 的內部制約不矛盾的条件下随便变更的. 所以，不管可能由外部电系統和力学系統施于这耦合网絡的**外端制約**如何，这是正确的力. 这是强調在任选位移期間，必須滿足的只是**內部**制約.

机电耦合的机械力 $(f_e)_k$ 包含着由电和磁两种能量儲蓄場 (W_e 和 W_m) 联合产生的力. 在电的頻率和机械速度低得可用集总参数表达电系統的情况下，全部电能儲量 W_e 将在电容里，而全部磁能儲量将在电感里.

因此，电場耦合和磁場耦合这两个問題可以分开来处理，有了适当的外部或端点制約，可以把所得的結果合并，以描述同力学系統有电場和磁場两种耦合的系統．这两个耦合場各自发生的力，将在下两节里論述．

1.2.2　由于磁場耦合的机械力❶

在图 1-3*a* 里，概要地表明了載流綫圈的系統．这个属于准静力学幷用以例解低速机械运动的网絡的各种元件間唯一重要或第一等的耦合場是磁場．为了計算儲于磁場的能量，图 1-3*a* 里各个綫圈的磁通鏈和位置，假定經由同电及机械变数二者从零到它們的終值的內部制約不矛盾的任选路綫而达到最后的磁通鏈 λ_i 和最后的位置 x_j．当假定全部机械儲能体和全部无耦合的电儲能体以及全部耗能元件都处于机电耦合場之外的时候，能量守恒的原則确定，得自一切来源的能量輸入，都作为磁場能量 $W_m(\lambda_1、\cdots、\lambda_n;\ x_1、\cdots、x_m)$ 而儲存起来；即

$$W_m = \text{輸入电能} + \text{輸入机械能} \tag{1-14a}$$

或

$$W_m(\lambda_1、\cdots、\lambda_n;\ x_1、\cdots、x_m) = \int_{0、\cdots、0}^{\lambda_1、\cdots、\lambda_n} \sum_{i=1}^{n} i_i(\lambda_1'、\cdots、\lambda_n';\ x_1'、\cdots、x_m')\,d\lambda_i'$$
$$+\int_{0、\cdots、0}^{x_1、\cdots、x_m} \sum_{j=1}^{m} f_j'(\lambda_1'、\cdots、\lambda_n';\ x_1'、\cdots、x_m')\,dx_j' \tag{1-14b}$$

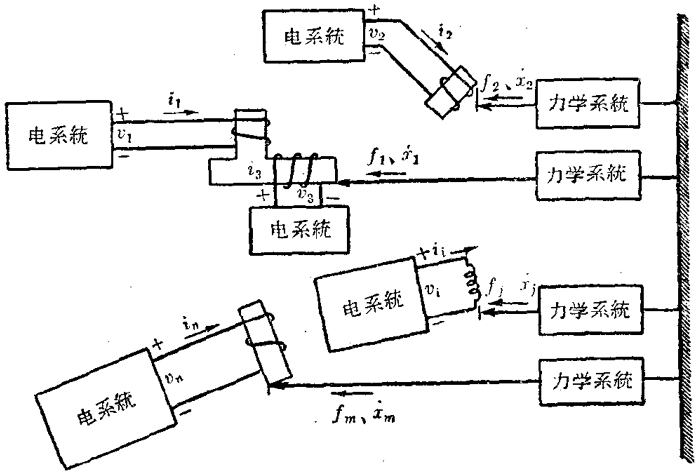

图 1-3*a*　耦合的載流綫圈

---

❶ 可参閱另一个論述 E. Fitzgerald and C. Kingsley, *Electric Machines*, McGraw-Hill, New York, 1952; R. E. Doherty and R. H. Park, "Mechanical Force between Electric Circuits," *Trans. AIEE*, Vol. 45, 1926, pp. 240～252. ——原注

当 $\lambda_i'(x_1', \cdots, x_m'; i_1', \cdots, i_n')$ 是机械坐标和电流的非綫性单值函数这样的一般情况时，总能量 W_m 的图解示于图 1-3 b. 就 λ_1' 是 x_j 和 i_i 的单值函数的任何給定系統来說，总的磁儲能 W_m 单值地取决于参数 x_1、$\cdots$、x_m 及 λ_1、$\cdots$、λ_n，并只依賴于这些参数的終值. 总磁儲能是个状态函数. 磁能儲量中，哪些由电源供給、哪些由机械源供給、同怎样装配这系統以达到最后的状态有关系. 图 1-3c 是依某特定路綫装配图 1-3a 的系統时、电源和机械源所分别供給的能量. 这些图說明，适当选擇装配系統的路綫，可以随便从哪一个能源供应总能量的任何部分. 例如，先使所有的磁通鏈为零，而在机械方面装配这系統；然后，再使机械坐标保持它們的終值而建立磁通鏈. 对应磁通鏈这个給定值的磁場儲能，将不能不由电源供

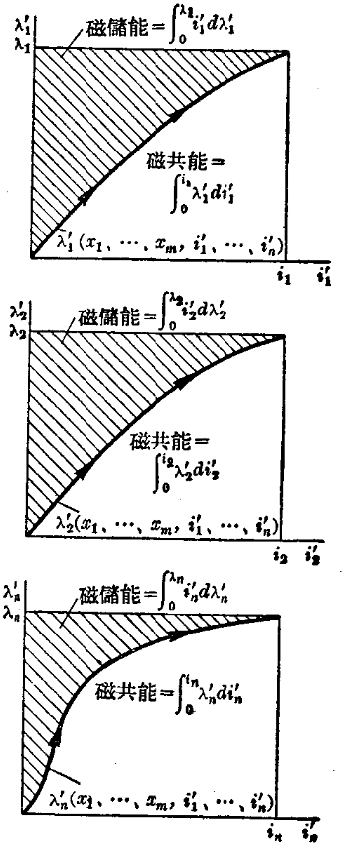

图 1-3 b 达到最后能量的运行路綫；当机械坐标保持在 $x_1'=x_1$、$x_2'=x_2$、$\cdots$、$x_m'=x_m$，而电变数被同时带到它們的終值

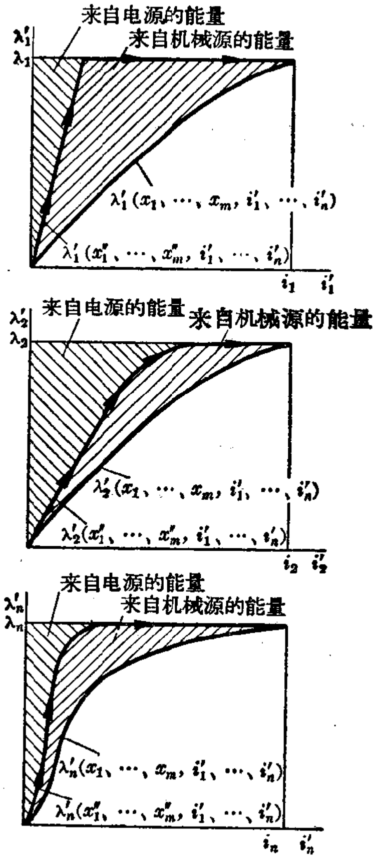

图 1-3 c 达到最后能量的运行路綫；当机械坐标保持在 $x_1'=x_1''$、$x_2'=x_2''$、$\cdots$、$x_m'=x_m''$，而磁通鏈 λ_i 被带到它們的終值，然后，机械坐标再被带到它的終值

应．对于这个情况，所儲磁能是

$$W_m(\lambda_1、\cdots、\lambda_n;\ x_1、\cdots、x_m)$$
$$=\int_{0、\cdots、0}^{\lambda_1、\cdots、\lambda_n}\sum_{i=1}^{n} i_i'(\lambda_1'、\cdots、\lambda_n';\ x_1、\cdots、x_m)\,d\lambda_i' \tag{1-15}$$

式中，W_m 是就任一固定的位形(即当一切的 x_j 为常数)作为 $i\,d\lambda$ 的积分而計算的．

【例題】 **1E1**

作为式 1-15 积分計算方法的一个例子，考虑 $n=3$ 的情况，而且系統在电方面是綫性的．

$$\left.\begin{aligned} i_1&=\Gamma_{11}\lambda_1+\Gamma_{12}\lambda_2+\Gamma_{13}\lambda_3\\ i_2&=\Gamma_{21}\lambda_1+\Gamma_{22}\lambda_2+\Gamma_{23}\lambda_3\\ i_3&=\Gamma_{31}\lambda_1+\Gamma_{32}\lambda_2+\Gamma_{33}\lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{1E1-1}$$

Γ 等只是 x_j 的函数，而且

$$\Gamma_{12}=\Gamma_{21},\quad \Gamma_{13}=\Gamma_{31},\quad \Gamma_{23}=\Gamma_{32}$$

式 1-15

$$W_m=\int_{0、0、0}^{\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3}\sum_{i=1}^{3} i_i'(\lambda_1'、\lambda_2'、\lambda_3';\ x_1、\cdots、x_m)\,d\lambda_i' \tag{1E1-2}$$

的意义是，当 x_j 保持恒定，各股磁通鏈在所有別的磁通鏈不变的情况下，被带到它的終值．因能量是个状态函数，各股磁通鏈被带到它們終值的次序先后，是沒有关系的．为了解說，姑假定把这些磁通鏈带到它們的終值时，是依 λ_1、λ_2、λ_3 的順序进行的．然則式 1E1-2 能够写成

$$W_m=\int_{0、0、0}^{\lambda_1、0、0} i_1'(\lambda_1'、0、0)\,d\lambda_1'+\int_{\lambda_1、0、0}^{\lambda_1、\lambda_2、0} i_2'(\lambda_1、\lambda_2'、0)\,d\lambda_2'$$
$$+\int_{\lambda_1、\lambda_2、0}^{\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3} i_3'(\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3')\,d\lambda_3' \tag{1E1-3}$$

$$W_m=\int_0^{\lambda_1}\Gamma_{11}\lambda_1'd\lambda_1'+\int_0^{\lambda_2}(\Gamma_{21}\lambda_1+\Gamma_{22}\lambda_2')\,d\lambda_2'$$
$$+\int_0^{\lambda_3}(\Gamma_{31}\lambda_1+\Gamma_{32}\lambda_2+\Gamma_{33}\lambda_3')\,d\lambda_3' \tag{1E1-4}$$

上面积分式中未加撇号的变数是保持固定的，认識这一点，这便

$$W_m=\frac{1}{2}\Gamma_{11}\lambda_1^2+\Gamma_{21}\lambda_1\lambda_2+\frac{1}{2}\Gamma_{22}\lambda_2^2+\Gamma_{31}\lambda_1\lambda_3+\Gamma_{32}\lambda_2\lambda_3+\frac{1}{2}\Gamma_{33}\lambda_3^2$$

它能够写成