

海洋波动

基础理论和观测成果

科

.72

2

6218

社

海洋波动

基础理论和观测成果

[日] 富永政英 著

科学出版社

海 洋 波 动

——基础理论和观测成果

〔日〕富永政英 著

关孟儒 译

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书系统地总结了五十年代以来在海洋物理学、地球物理学、流体力学、应用数学、海岸和海洋工程学等领域对水波、风浪生成理论和实验研究方面的丰富成果。全面论述了各种水体中的波浪;在湖泊、海洋表面传播的风浪和涌浪;使湖泊、港湾水体产生振荡的静振和潮波;地球物理尺度的长周期波;以及对海水上、下混和、海中通讯、海中各种活动影响较大的海洋内波,几乎涉及了所有的海洋波动现象。

本书内容丰富,概念鲜明,论述质朴,见解精辟。书中既清晰地概括液体波动的经典理论,又反映当代海洋波动理论、观测和实验的最新成果,可供海洋物理、海洋水文、流体力学、湖泊学、应用数学、地球物理、海洋气象、海岸和海洋工程、海运和水运工程、造船、水产的研究人员、工程技术人员及有关高等院校师生参考。

富永政英

海洋波動

——基礎理論と観測成果

共立出版株式会社, 1976

海 洋 波 动

——基础理论和观测成果

〔日〕富永政英 著

关孟儒 译

责任编辑 赵徐懿

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 2 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1984 年 2 月第一次印刷 印张: 30 3/4

印数: 0001—1,350 字数: 710,000

统一书号: 13031·2481

本社书号: 3407·13—17

定价: 4.70 元

译 者 的 话

风吹水面产生波浪,是一种久被习知的现象。所谓“波”,是指人们最初认识自然界波动现象中的水面波。水面波的研究历史可以说就是流体力学的研究历史,这可追溯到两个世纪以前。然而,近三十年来,对于波浪现象的研究不仅只局限于流体力学领域,而已扩大到许多学科领域,特别是从海洋物理学、地球物理学、应用数学、海岸和海洋工程学的角度来研究不同水体中各种复杂的波动现象,取得显著进展、出版了各种各样的著作。正如本书作者在书后面对已出版的主要波浪专著所作的评述那样。但是,作为全面论述在各个领域中对各种水体几乎涉及所有海洋波动现象的专著,本书还是首次尝试。本书从流体力学入手,系统地总结了波浪的经典理论,风浪的发生机制,海浪的统计处理与分析,近岸浅水中波浪的发展过程以及地球物理尺度的长周期波和海洋内波等问题,所概括的内容包括了当代波浪理论的最新研究成果,是一部系统总结波浪理论的较新专著和教学参考书。

本书特别突出各种海洋波动的数理模式,适应当今电子计算技术的进步和随机过程理论在海浪研究中的广泛应用,具有较重要的理论价值。贯穿全书的论述,多是从表示各种波动的基础方程式出发,使用流体力学、应用数学等手段,严谨而又清晰地推演出问题的结果,并与近代的观测和实验的事实作比较说明。与一般的流体力学数学理论不同,书中尽可能地避免复杂的数学分析,而着重于物理直观,旨在阐明各种波动现象的基本概念,基础理论及其物理实质,有益于读者独立思考能力的发挥,同时又强调现场观测和实验研究的成果对比。从应用数学的角度来看,本书又是一本较好的非线性波动问题方面的参考教材。

本书涉及面很广。但基本上由三大部分组成。第一部分是液体波动的基础理论,即本书的第1,2,3,4章。作者以富有明确简扼的特色,既综合概括了早期的波浪经典理论及其结果(这些至今仍在广泛应用),又重点突出地介绍五十年代以来的新理论新方法。例如:水流与波浪中,既介绍 N. F. Barber (1949), P. J. N. Unna (1942) 的经典理论,又综述 Yi-Yuan-Yu (1952), J. J. Evans (1955), J. N. Hunt (1955) 的理论及其分析方法;在表面波力学中,除介绍经典的 Stokes 波一至三次近似理论及方法外,还突出介绍 G. B. Whitham (1967), J. C. Luke (1967), E. P. Bretherton (1969) 应用变分原理的分析方法;在表面张力波中,除介绍经典的 J. R. Wilton (1915) 的线性理论与方法外,又论述了 W. J. Pierson (1961) 的非线性理论与方法。在孤立波的极限波形中,还介绍了 C. W. Lenau (1966) 的映像分析方法和 T. B. Benjamin (1962) 分析在水流中传播着的孤立波的方法等等。这些介绍就是在国外有关液体波动基础理论的专著中也不一定都能看到。但是作者对近来为了寻求适用范围更广泛、精度更高的、1965年由 R. G. Dean 提出的一种较其他理论为优且能较好地反映实验室与天然波浪现象的称之为流函数波理论却没有提及。

第二部分是海浪随机过程的理论与分析方法,即本书的第5,6,7,8章。这部分约

占全书三分之一多的篇幅，系统地介绍了波谱分析与检定、风浪生成机制、非线性波相互作用理论这三方面当代最新理论研究和观测成果。这里特别要指出的是，海浪提供了大气与海洋相互作用的最明显而引人注目的论据，从十八世纪以来，应用数学家为它们所吸引并且尝试分析它们的运动。五十年代以来海洋物理学家提出把风浪的成长与一些不同的机制联系起来，虽然它们几乎是同时起作用的，但可分别表示之。然而直至现在还未达到完全成功。虽然有限振幅风浪是一个外表看起来简单的现象，但是其发展还不能用现有的理论充分而无矛盾地加以解释。这方面的研究论文很多，作者是持以严格慎重的态度，只介绍较为典型而又较多地为人们所接受的那些理论和方法。

随着海岸、海洋资源开发及其环境保护等问题越来越突出，促使人们更多地关心近岸、陆架海区。作者用了约占全书六分之一的篇幅，比较全面介绍了多种浅水波理论，进入浅水后波浪的变形（shoaling）和分裂为孤立峰（soliton）以及破碎波拍岸（surf beat）等重要的浅水效应问题，破碎波、涌潮波（阶段波）、水流与波浪相互作用、近岸流、漂砂、绕射等近岸波浪现象的理论、观测和实验研究成果，有着重要的理论和实用价值。

第三部分是具有地球物理尺度的长周期波和海洋内波，作为较完整的海洋波动的学术专著所必然要包括的内容，作者取材于近代这方面最优的理论及其分析方法。另外，对湖泊、港湾的静振，潮波、海啸、陆架波、岛架波以及海洋内波基础理论，密度流的稳定性等问题也分别作了简扼的论述。

总之，《海洋波动》一书所概括的内容是当代海浪理论的最新研究成果，是一部突出基础理论和观测成果的较系统的论著。读者从本书的各个不同章节均可得到启发和借鉴。

原书中有些明显的技术性上的错误，译者一一作了改正，不另作注明。译完全稿后，译者觉得对有些问题还需作些说明，在问题的相应处右上角分别标以①，②，③，……记号，注文附于书后“译后补注”中，或能供读者参考。另外，这里顺向协助本书一部分译稿初校的孙其昂、吴光祖、姚国权、林椹榆、张君伦、葛明达等同志表示谢意。本书译文虽经多次审校，仍有不妥或错误之处，请读者批评指正。

译者

1981年底于南京

序

水波是司空见惯的,然而其物理机制则是不容易搞清楚的。长期以来,海岸工程学、海运和水产业、海洋气象各领域的专家,都一直为现实上的海浪*所苦恼。因此,正确地认识海浪以至更一般的水波物理上的本质,乃是这些专家的宿愿。

1955年以后,关于水波、风浪生成的理论、实验的乃至工程学方面的研究迅速地变得活跃起来了,由于海洋物理学、流体力学、应用数学、海岸工程学等专家们的详尽研究,现在已积累了丰富的成果。在对海浪感兴趣的海岸工程学者、海洋物理学者彼此之间常聚在一起共同研究探讨有关波浪问题,这样经过近10年,到了1969年,著者搜集了这些研究探讨的成果想出版一本全面论述海洋波动的专著。适逢共立出版社欣然赞诺此举,俟后费了6年多的岁月才好不容易出版本书。

所谓水波,系指从我们附近的水洼、容器中的水所产生的微小波浪直至在湖泊的、海洋的表面传播的风浪,甚至使湖泊和海湾内的整个水体产生显著振荡的静振(seiche)、潮汐波等,其是周期和波长都很长的规模可达地球尺度的波浪。另外,还有对海水的上、下混和、海中通讯及其他各种海中活动影响较大的而又看不见的内波。想无遗地包罗所有这些内容,结果就远比原先计划的篇幅要浩瀚庞大多了。

本书的论述是质朴的。书中不拟列举实际中马上就能应用的公式和图表等,同样也不想用最小限度的数学公式来温文尔雅地说明波动的主要物理实质。另外,更不想提出一些发人思索的问题来提起人们研究的兴趣。诸如此类,世界上已为此出版了各种各样的书籍。本书却是从这些问题中间,即从表示这些运动的基础方程式出发,使用大学理工科所学的应用数学,尽可能详尽地记叙推导分析这些问题所得结果的过程,并将这些结果与观测、实验的事实作比较说明。同时必然要用到许多数学公式,某些地方也许能作为应用数学的练习教材。

本书的第一章是水波的概念、海浪的概述;在第二章中,试就为理解波动所必需的流体力学基础作说明;第三章详细地叙述了水的表面波力学,并记述了直至Stokes波三次近似的展开方法。第四章用函数论的等角映像法来处理定常有限振幅波的各种问题。第五章为了理解五十年代已经发展起来的风浪统计处理而说明随机过程的统计学基础,第六章论述了其实际应用,即波谱的求法及其检定等。第七章说明了迄今尚未解决的风生波的几种发生机制,这部分将来可能不得不加以修订。虽然文中大致说明了从原论文到结论推导的过程,但希望读者能在此基础上展开出更好的新理论。第八章论述了组成波之间的非线性相互作用所引起的能量转移问题。第九章叙述了海岸工程学者所关心的多种近岸浅水波理论和实测结果。在本章内容中也包含着随现场观测精度的提高而必然要改进的理论。近岸流、漂砂等在实际中是个复杂的问题,在理论上也还没有很好解决。第十章是长周期波基础的说明,也涉及了理论上可能的某 β 平面的水体振动问题。第十一

* 原文为“海の波”,意即“海洋的波浪”。海水的周期性运动很多,本书所讨论的“海浪”系指风浪、涌浪及此二者形成的近岸波等等。——译者注。

章以内波及其基础理论的提示而结束本书内容，但在海洋物理学方面仍遗留许多重大的课题。不过，仅在内波这一章中关于成层流(密度流)的稳定性问题，则详述了迄今有代表性的成果，估计这对海岸工程学者应用是方便的。考虑了地球自转影响的长波和内波现象，可能不为海岸工程学者所直接关心的，但对海洋物理学者来说正是有兴趣的。在所谓海洋学讲座书名出版的日文书籍中有关部分对这些作了较好的专门说明，请参阅。

作为用日语写成的波浪书籍，本书是第一本(日译本有 Kinsman 的专著)，书中除笔者误解的和说明不充分之外，内容的取舍可能也未必恰当，数学公式或有错误之处等，这些方面也是笔者所担心的，敬希诸位读者斧正。再者，特别是共立出版社的若井宽，荻野政三郎，饭高季雄诸先生始终不惜恳切的帮助和合作，对他们在完成本书出版方面所作的努力深表谢忱。多数的图表都注明了原作者，这里一并致谢，笔者自己绘制的由笔者负责。

著 者

1976 年 8 月于现任工作地点鹿儿岛

目 录

第 1 章 波浪的概念	1
1. 水波	1
2. 波动的表征	3
3. 海浪	6
4. 海浪的物理量	8
第 2 章 流体力学要点	13
5. 流体力学的运动方程式	13
6. 连续方程式	15
7. 粘性的考虑	17
8. 有旋运动	20
9. Bernoulli 定理	23
10. 边界条件	24
11. 动量、能量的变化	28
第 3 章 表面波力学	32
12. 波动的近似解法	32
13. 波能与群速度	37
14. Stokes 波	41
15. Stokes 波的二次近似	44
16. 关于 Stokes 波的三次近似项	48
17. 波动的守恒量	51
18. 一般水流 U 变化的情况	57
19. 水流与波浪	60
20. 一般水流 U 随深度而变化的情况	64
21. 变分原理的应用	67
22. 表面张力波(线性理论)	75
23. 表面张力波(非线性分析)	79
24. Cauchy-Poisson 波	84
25. 船行波概要	89
第 4 章 有限振幅波理论	95
26. Levi-Civita 的方法	95
27. 表面张力波的严密解	102
28. Gerstner 的余摆线波	109
29. 深水波的极限波形	113
30. 孤立波	117

31. 孤立波的极限波形	122
32. 椭圆余弦波	128
33. 在水流中传播着的孤立波	135
第 5 章 海浪的统计处理	139
34. 波浪的观测	139
35. 水压式波浪仪	142
36. Sverdrup-Munk 的理论	145
37. 随机过程	148
38. 风浪引起水面升降的分布	150
39. 功率谱	153
40. Neumann 谱	161
41. 平均周期	165
42. 平均波长	170
43. 平均波高	171
44. 最大波高的统计	176
第 6 章 实际波浪的分析(波谱分析)	180
45. 波谱的计算	180
46. 波谱的方差	184
47. 波谱的检定	189
48. 波谱计算的新方法	193
49. 波浪的二点观测	197
50. 波浪的方向谱	201
51. 涌浪的传播	207
52. 涌浪群的统计	212
第 7 章 风浪的发生	217
53. Kelvin-Helmholtz 的不稳定性	217
54. Jeffreys 理论	222
55. Phillips 的共振机制	225
56. 共振和剪流机制	234
57. 能量的增大率	239
58. 波形所诱发的湍流的影响	244
59. 剪流机制的物理意义	249
60. 波浪发生机制的实证	252
第 8 章 非线性波的相互作用	257
61. 非线性相互作用的意义	257
62. 二次相互作用	259
63. 三次相互作用	264
64. 共振放大系数 K 及其实证	272
65. 重力波和表面张力波的相互作用	280

66. 在连续能量谱中的非线性现象	287
67. 在重力波波前处出现的小波	295
第9章 近岸的波浪现象	299
68. 浅水波	299
69. 浅水波方程式	301
70. 水深变化时的线性解	306
71. Airy 方程式的处理	309
72. 海底坡度所引起的浅水波变形	313
73. 波浪进入浅水后的分裂	316
74. 破碎波	319
75. 涌潮波	327
76. 波浪和水流共存的情况(深水波)	333
77. 波浪和水流共存的情况(浅水波)	337
78. 近岸流	343
79. 漂砂	350
80. 破碎波拍	354
81. 绕射现象(基础方程式)	361
82. 绕射现象(物理上解释)	371
第10章 长波	377
83. 长波的基本概念	377
84. Poincaré 波	381
85. 陆架波	385
86. 静振	391
87. 水深变化时的静振(1)	395
88. 水深变化时的静振(2)	400
89. 考虑地转影响的湖泊静振	405
90. 岛架波	409
91. 在 β 平面的自由振动	413
92. 海啸	417
第11章 内波	423
93. 内波的观测事实	423
94. 内波的基础理论	425
95. Holmboe 的密度模式	429
96. 两层流体的界面波	435
97. 考虑地转影响的两层流体的界面波	439
98. 成层流的稳定性(1)	444
99. 成层流的稳定性(2)	448
100. Lee 波	452
译后补注	456

参考文献.....	467
索引.....	476
主要的波浪专著(西文)介绍.....	479

第1章 波浪的概念

1. 水 波

所谓“波”字,是中国创造的字,传到日本后就成为日本的汉字,但其偏旁为“水”,无疑是与水有关系的字。根据字典,所谓“浪”字,是指风吹水面所引起的波浪;波,一般是有各种波动的含意。我们把海上风吹所产生的波叫做“风浪”,英语是“wind waves”(或单称 sea);在法语中,使用其源自古斯堪的纳维亚语的“la houle”*,它与风浪的含义相当。

在强风区内发生的强波浪用所谓“澜”字,这指的是大波的意思。然而,当水面的波浪离开了风区,在无风的水域里传播时就形成了周期长的、波峰呈圆滑状,而且是长的横排成行的波浪”,这叫“涌浪”(日语是うねり,英语是 swell,法语是 la vague),它出自水面上下缓慢起伏“ウネル”(涌浪)一词**“涛”字(日本的旧体汉字为“濤”),意思指是水面上下缓慢起伏较大的涌浪,与其相对应的“澜”字,似乎也有“起伏”的含意***。

风浪发生初期,出现细小的波纹,因表面张力与水面上起伏有关,术语上称之为表面张力波(capillary wave),不言而喻,因重力起复原作用而产生的波长稍长的波浪,叫做“微波”。在英语中称为 ripples(波痕),与汉字“涟”相当。根据字典:“风吹水面起纹称涟”,这正是指 ripples。

在法语中有“clapotis”一词(土木工程工作者译为立波****),是指在防波堤前差不多完全反射的波与入射波在“代数上”合成而形成的停滞波(standing wave),其波形是不传播的,而水面只在一定的位置上下起伏。所谓“clapotement”*****是指水在轻轻运动时所发出的独特声音,这种水声在停泊于海滩的小船等的底下微微可以听到。小船由于停滞波而上下晃动。

另外,在西班牙、法国的国境附近,面向大西洋的加斯科涅(Gascogne)湾地区语系中把 le mascaret(涌潮)也称为波。在河口涨潮时,潮水很快地上涨,溯流急上,波形陡峻而后破碎。如这个地方的潮汐涨落差较大,这种现象就特别显著。中国的杭州湾湾顶入江处(海洋学中称为河口; estuary),因有钱塘江水注入,该地潮汐涨落差又较大,在这里就发生了所谓海啸、暴涨潮或者涌潮,它类似于 le mascaret,英语中统称这些为涌潮波(tidal bore),沿浅滩上溯的涌潮象水墙,是很壮观的。在英国学者 V. Cornish 所写的于1936年出版的《海浪》(日高孝次译,1975年日本中央公论社出版)一书中对此作了很详尽的记述。

* 在法语的文献中可以看到“la houle”含有前进波的意思,而下述的“la clapotis”则有停滞波的含意。
——译者注

1) 将波峰长度短的波浪叫做短波(short-crested wave)。

** 日语中相应的汉字为“纡”,意思是盘纡起伏,曲曲弯弯之状。——译者注

*** 日语中相应的汉字为“蜿”,意思是蜿蜒起伏,曲曲弯弯之状。——译者注

**** 亦可译为驻波,定波,重复波,停滞波等。——译者注

***** 可译为涟漪声;轻波漾荡。——译者注

投石于小池水面,产生的圆形波纹逐渐扩展。起初有一、二个较大的波纹,但当它到达岸边时就分散为许多小的波动。象这样的水面波动,当然也是受重力复原作用而形成的。可是,在其传播过程中又分散成细小的波群。以所谓 Cauchy-Poisson 问题是能够对此作严密数学上处理的。山崩等发生时,瞬时出现了大量砂土流入湖面的现象,引起一种如海啸那样而造成灾害。1965 年意大利北部山区的巴伊旺德水坝的洪水暴涨,给下游带来了很大的灾害,就是由于这个原因。

因海底地震等所引起的海底激烈的变动而导致其水面突然地上下起伏,非常长的波长和周期(可达几十分钟至 1 小时)的波浪从那里向广阔的大洋传播,当传至近岸狭窄沉降性海岸(rias 式海岸)的海湾时,波能就积蓄在狭窄而浅的水中。这样,一次地震后,有几次大浪向岸边袭击而来,这在日本三陆*近岸地带也是相当有名的,被称为“海啸”**,它是长波的一种。海啸,在国际上使用的术语是 tsunami。这种波长与水深之比非常大的波浪传播速度仅仅取决于水深¹⁾。

潮汐也同样是长波的一种,人们日常所观察到的是上下的水面变动。它以半日与一日为周期的特别显著。

所谓 storm surge 的现象可称为风暴潮***,由台风引起气压下降而导致水面上升,当由此而发生的波浪传播速度与台风移动的速度差不多一致时,产生了共振,水面异常上升,再加上风对水面吹送的效应叠加在一起,在湾顶等处水面上升可达 1—2 米以上。象这样的波不是几次周期性地袭来,一般仅仅只是一次而已。这种波称之为孤立波(solitary wave),广义地称为这种现象是很多的,如在运河的进口处,上涌起来仅仅一次而且规模也比较小的波浪;由山谷间涌出而进入坝内的水、就象暴涨潮那样的洪水冲泻而来;以及河流的上游地区集中暴雨降水,突然进入山谷的山洪现象等等。这些在数理水力学领域中是作为有限振幅波来处理的(请参阅 Stoker, Water Waves, 1957)。

仔细观察海湾、湖泊或者更小的水池等处的岸边,可以观测到周期为十几分钟至几十分钟的水体波动,根据验潮仪等可将这些波动仔细地分析出来,这就是所谓静振(seiche)现象。另有一种水体波动的静振现象,它的周期取决于海湾、湖泊的大小和形状,成因上却是由于风或气压的变动、外海长周期波传入所激发产生的。

还有一种周期更长的波浪,它主要受地球自转所引起的 Coriolis 加速度的影响,其周期可达十几小时以上,然而,海面微小的压力变动虽然可以用振敏器这种感应的仪器或观测深海流速得到,但不容易从很多的波动中把它们分离出来,这方面的实证还不充分。

以上说明的是水面或者整个水体的波动。但是,海水越深处,密度越大,这种波动现象除与盐度有关外,也随着水温、水压而变化。夏季,太阳光使表面水层受热升温,而在某一深度(通常为 10—50 米)以下的水温是不升高的,从这样的水层再往下的密度就变得比

* 三陆为日本北部三国、陆前、陆中、陆奥之谓。——译者注

** 海啸是由于地震活动如火山爆发、断层、地层滑动等所产生的一种波动。40 年代以前,欧、美的日常用语中采用“tidal wave”(潮汐波)来称呼它。因为“潮汐波”是由于天文学上的引潮力所引起的潮汐波动,所以借用日本称海啸为“津波”(つなみ)的音译“tsunami”,这才形成国际上通用的术语,避免了混用。另外,日语中“津波”还含有“港湾内波浪”的意思。——译者注

1) 海啸以每秒可达 200 米这么大的速度在大洋中传播。假如周期为 40 分钟,因波长是速度乘周期,故其波长可达 480 公里。

*** storm surge 日语中常译为“高潮”,这与一般潮汐现象中的所谓“高潮”是不同的。——译者注

较大。一般相隔几十米左右水深的水层,虽然其密度差与该层密度之比值是小于 10^{-3} 左右,但可以把该层称为密度跃层,而一般认为只因温度而产生的跃层,叫做温度跃层 (thermocline)。这里,如果是整个水层,或者上层的水体受到上下方向微少的波动,那么微小的密度差就能使水体本身的浮力增大,因而重力引起上下的波动就显著起来。由于这样的原因而产生的波动称为内波 (internal wave)。这种波动是无法目测的,但可以根据海中某层的水温或盐度长时间的连续观测把它检定出来。

因为密度并非随着水深而连续地减小,所以当有不连续面存在时,在其界面上也同样会产生与上面相类似的波动,这种波动称为界面波 (interfacial wave)。实际上,表面波是空气和水两种介质之间的界面波,其密度,水约 1 克/厘米³,相反,空气的密度较小,为 1.3×10^{-3} 克/厘米³,所以作用在涌到空气中水的实体部分的浮力就减弱了,波高就不大可能再增高了。因而,内波、淡水和海水的界面处所产生的波浪等的波高(可以认为振幅是波高之半)比表面波的波高要大得多*。

2. 波动的表征

在自然界的现象中,只要仔细地观察,作周期性往复运动的现象是比较多的,除水波之外,也经常看到其他具有波形式的现象。“波”也未必只限于和水有关的现象。空中飘浮着的波状云是冷、暖两气团界面处产生的波,这就大致可以说明了;风持续地向砂的表面吹,可描绘出间隔为几厘米长的砂波形态,这就叫做砂波 (sand ripple)。同样的现象可发生在干燥的低温的积雪面上,波长在 1—2 米以上的也比较多。因为这些砂粒和雪片作为粉粒状物质,能从其表面离开而扬起,由于风或水流中有小的紊动作用的原因,砂粒可继续上浮。而水体波动时,水质点始终不离开水的实体部分,而是在水的实体的压力场内作往复运动,所谓砂波是与此在物理上不同的现象。

电磁波现象没有象水这样的介质,它是将能量变成波动后在真空中(当然其中也含有物质)传播的。众所周知,假设电场与磁场的强度为 E, H ; 由 Maxwell 方程式,可得下式:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 H \quad (2.1)$$

上式中 $c^{1)}$ 与真空中的光速相等,设电容率为 ϵ 、磁导率为 μ 时,给定 $c^2 = (\epsilon\mu)^{-1}$ 。 ∇^2 如使用三元直角坐标,则 Laplace 算符**为:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

学习过物理数学基础的读者,在其他领域中也可以经常看到类似于(2.1)的式子。所谓 Schrödinger 的波动方程式是由原子构成的波动,其运动的物理量以 ψ 表示时,可写为:

* 内波的最大振幅位于密度不连续面上,但在自由表面上内波并不完全消失。经验表明,较小的外力扰动便可以引起内波。而在海洋中观测到的内波之波高往往又很大,最大的可达 100 米之巨。这种现象用阿基米德原理是不难解释的。——译者注

1) 水波的位相速度(波速)也常用符号 c 表示。拉丁语中有速度含意的 *celeritas* 也是源自 *celerity* (波速)。

** 或叫做调和量算符。——译者注

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \quad (2.2)$$

设原子振动在 1 秒内的振动次数(对于水波也以如下的振动次数¹⁾来定义,即在某一点,于单位时间内波浪振动的次数. 使用 f 这个记号)为 f , $\mathbf{r}$ 为位置矢量,得:

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) e^{2\pi i f t} \quad (2.3)$$

上式中物理量 ϕ 在某一点观测后,得到如下式的正弦运动 (sinusoidal motion):

$$\sin 2\pi f t = \sin \sigma t$$

sine 也可以代换为 cosine. 将(2.3)式代入(2.2)式,可得在量子理论中常见的 Schrödinger 方程式:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + (E - U)\phi = 0 \quad (2.4)$$

上式中, E 为质点的全能量,根据 Planck, 它与 hf (一般在量子理论中用 ν 代替 f) 相等, U 为势能, $\hbar = 2\pi/h$, h 为 Planck 常数*.

鼓膜的振动是弹性振动,加上外力,仅使 $\eta(x, y)$ 在垂直方向有变位时,膜的张力 S 发生作用,设膜的密度为 ρ ,可推导得下式:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

在推导(2.1)式和(2.5)式时,要加上重要限制条件. 例如,在(2.5)式中膜的变位小,变位时在膜的单元面积上

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

$\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ 是很小的量,例如,只考虑取至二次项. 如

$$\left\{ 1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\} + O \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^4, \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^4 \right\}$$

这样,(2.5)式的方程式就成为“线性化”了. 关于(2.1)式,也可作类似的分析²⁾. (2.1)式、(2.2)式、(2.5)式等式都是同样的形式,可以统一为:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 X \quad (2.6)$$

上式就是所谓波动方程式. 如果只特别考虑 x 轴方向的一元式子,则:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

这些就是所谓两个变数的双曲线偏微分方程式,其特殊情况下的形式为:

$$AX_{xx} + 2BX_{xy} + CX_{yy} = F(x, y, X, X_x, X_y)^{3)} \quad (2.8)$$

1) 设周期为 T , 则 $f = \frac{1}{T}$. 常叫 f 为频率. 另外, $\sigma = 2f = 2\pi/T$ 则称为角频率 (angular frequency, 或者法语是 la pulsation).

* $h = 6.626 \times 10^{-27}$ 尔格·秒. ——译者注

2) 当推导(2.1)式的 Maxwell 方程式时,例如,假定电容率 ϵ 、磁导率 μ 是不取决于电场强度 E 、磁场强度 H 的常数. 在磁性体、带有感应损失的电介质中,前面的假定就不适用了.

3) X_{xx} 等就是 $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ 的意思,以下同样的写法是很多的.

上式中, $B^2 - AC > 0$. 其中 $F(x, y, X, X_x, X_y) \equiv 0$, 而且 $A = 1, B = 0, C = -c$ ($c > 0$), 另外, 设以 t 代替 y , 就得到(2.7)式. 当(2.8)式

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$$

的两个根(实根)为 λ_1, λ_2 时, 设

$$\left. \begin{aligned} u &= x + \lambda_1 y \\ v &= x + \lambda_2 y \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

可归结为:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = - \frac{C}{4(B^2 - AC)} F_1(u, v) \quad (2.10)$$

上式如适用于(2.7)式, 当 $\lambda_1, \lambda_2 = \pm c$, $F(x, t) \equiv 0$ 时, 故得:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = 0 \quad (2.11)$$

上式的一般解是以 $f_1(u), f_2(v)$ 为任意连续函数的, 可用下式来表示:

$$X = f_1(u) + f_2(v) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct) \quad (2.12)$$

$f_1(x + ct)$ 表示当 $t = 0$ 时所谓 $f_1(x)$ 物理量的分布, 但是它表示沿 x 轴负的方向以 c 的速度传播的波动现象. $f_2(x - ct)$ 则表示沿 x 轴正方向传播的波动现象.

今试分析:

$$X = a \cos(kx - \sigma t) \quad (2.13)$$

当然, 因为 X 满足(2.7)式, 所以波动方程式有解. (2.13)式表示振幅为 a 的余弦曲线沿 x 轴以速度 $c = \sigma/k$ 在 x 轴的正方向向前传播. 虽然 (2.13) 式是表征所谓“波”现象最简单而且在解析上、统计数理上也是容易处理的形式, 作为许多余弦或者正弦之和, 而且也具有能够用 Fourier 级数来表现的优点. 然而, 如同后述的那样, (2.13) 式只不过是表征波动很小时的水波, 即所谓小振幅波 (infinitesimal waves) 在物理上的归结. 其要求的条件之一是 $ak \ll 1$. 这一点, 在推导 (2.5) 式时也受到同样的物理上的限制. k 称为波数* (wave number), 设波长为 λ 时 $k = 2\pi/\lambda$ ¹⁾. 再者, 为了数理上处理的方便, (2.13) 式可改写为:

$$X = a e^{i(kx - \sigma t)} \quad (2.14)$$

上式中, X 的实部表示现实的波浪. 还有, 一般来说作为

$$X = a e^{i(kx - \sigma t + \phi)}$$

有时用加上 ϕ 来表示稍有差异的位相 (phase).

诚然, (2.7) 式或 (2.6) 式是表示波动现象的, 可是相反, (2.7) 式则不可能表示所有的波动现象. 如上所述, 在水波的情况下, 因振幅较大, $ak < 1$ 的条件是得不到满足的, 所谓有限振幅波 (waves of finite amplitude) 是不能满足 (2.7) 式或 (2.6) 式的. 如后述的 Gerstner 的余摆线 (trochoid) 波就是一例. 这是一种有限振幅波, 但是其波形是不变的余

* 应该注意的是弧度波数 $k = 2\pi/\lambda$ 和波数 $k = \frac{1}{\lambda}$ 之间的差异是由本身造成的, 并非理论上的问题. 如果比较两个不同的实测值, 仅是所谓 2π 的因子不同, 这是因为定义不同的原因. ——译者注

1) $\frac{1}{\lambda}$ 也称为波数.

摆线,以一定的速度沿水平方向传播的. 设水质点在任意时刻的位置为 x, z , 又设无波动时水质点的位置为 x_0, z_0 , 则

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t) \\ z &= z_0 - ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

上式表示在确定 z_0 时以 x_0 作为参数的 xz 平面波动曲线. 由此易知, 波面从平均水面的上升量 ζ 为:

$$\zeta = a \cos(kx_0 - \sigma t)$$

当 $z_0 = 0$ 时,得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x_0} = - \frac{ak \sin(kx_0 - \sigma t)}{1 - ak \cos(kx_0 - \sigma t)}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= ak^2 \frac{ak - \cos(kx_0 - \sigma t)}{\{1 - ak \cos(kx_0 - \sigma t)\}^3}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= -a\sigma^2 \cos(kx_0 - \sigma t) \end{aligned}$$

以上各式是不能满足(2.7)式的.

(2.6) 式或 (2.7) 式所表示的解是波形不变时的波动现象, 这种波动也称作定常波动 (steady wave motion 或 waves of permanent type).

实际观测到的水波纯粹是波形和传播速度都变化的波动, 由于水的粘性、水浅而导致能量的蓄积、底摩擦和其他影响, 使振幅和波形发生了变化. 另外, 即使这些影响不存在, 于深水中, 由于能量的分散而导致波浪依次分裂为若干高高低低的波 (常见的投石于水中所发生的波).

3. 海 浪

在海运、近岸土木工程等实用方面, 自古以来关系最为密切的近岸自然现象之一无疑是海浪. 在广阔的海面上到处都有大小不同的波浪, 它们作为不能以单纯的数理手段来表征的物理现象在海面上传播而到达近岸. 其中就有周期约 20 秒以下的表面波, 它是由风所引起的. 当波浪脱离风区以后, 波能不太损耗, 且能作长距离的传播. 而到达近岸的波浪, 由于水浅, 使波高增大波长变短而成为破碎波 (breaker). 破碎以后已经没有波动而变成水本身的实体运动, 这种运动由于海底和岸崖等的摩擦而转换为热能, 同时又侵蚀着海岸. 这样的波力究竟有多大呢? 波峰袭来时, 波浪所具有的能量 (水体从平均水位升降所产生的位能与水质点波动所产生的动能之和) 的输送量大致可按 $10^4 H^2 \cdot T/2$ 尔格/秒计算^①. 设波高 H 为波峰和波谷的高度差, T 为波周期, 再乘上波峰的单位长度. 如周期为 8 秒、波高为 1 米的波浪向 1 公里岸线袭击而来时, 它向近岸输送的能量就是波浪力, 其为:

$$10^4 + (100 \text{ 厘米})^2 \cdot \frac{8 \text{ 秒}}{2} \cdot 10^5 \text{ 厘米} = 8 \times 10^{13} \text{ 尔格/秒} = 8 \times 10^6 \text{ 焦耳/秒}$$

按 1 瓦小时 = 3.6×10^3 焦耳/时换算, 此能量相当于约 8000 千瓦小时的电力.

这样巨大的能量来自何方? 当然是风. 而持续性地在海上吹的风有: 台风和大范围