拟阵

刘桂真　陈庆华

国防科技大学出版社

拟　　阵

刘桂真　陈庆华

国防科技大学出版社

【湘】新登字009号

内容简介

本书系统地介绍了拟阵理论的主要内容，既包含了拟阵理论的最基本的原理和方法，也反映出拟阵理论研究中近些年来的一些新成果。

全书共分十五章，前七章介绍拟阵理论的基本概念、定理和算法，后八章介绍拟阵理论在链群、矩阵、横贯理论、组合优化、图论等方面的应用以及相互联系，为从事拟阵理论研究的人员提供了大量的前沿信息。

本书可作为运筹学、组合数学、计算机等专业的研究生教材，也可供有关专业的教师、研究生和大学高年级学生及科研、工程技术专业人员参考。本书出版得到国防科工委指挥技术学院和国家自然科学基金资助。

拟　阵

刘桂真　陈庆华

责任编辑　何　晋

*

国防科技大学出版社出版发行

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

开本：850×1168 [illegible] 印张：7.25 字数：182千

1994年11月第1版 1995年1月第2次印刷 印数：501—1500册

ISBN 7-81024-3[illegible]0-4

O·86　定价：7.00元

序

拟阵是近几十年蓬勃发展起来的离散数学的一个重要分支。离散数学内容丰富、发展相当迅速，广泛应用于计算机与其他一些领域。人们除了要求了解和学习其中一些重要分支的主要内容以外，还要求能从“学”到“用”，并希望有所“创新”。

从“学”来说，对内容丰富的数学分支，人们就需要有书能简要地介绍其最基本的内容——即其中的基本理论和基本方法。从“用”的要求来说，人们还希望知道一个数学分支在其他方面的应用，以及与其他方面的联系的有关材料。就拟阵这个分支来说，即是它在图论、组合最优化、横贯理论、区组设计等中的应用与联系。在当今科学技术迅速发展的时代，新问题、新情况不断出现，学习和应用往往不能仅满足于已有知识的直接的、简单的应用，有的读者还希求能进一步培养自己灵活运用已有知识的本领和创新才能，这就有必要了解一些各个学科分支的研究动态和发展趋向。

刘桂真、陈庆华两教授合写的“拟阵”一书是符合读者上述要求的。书中还包含了作者的部分研究工作，增添了本书的特色。该书稿曾在山东大学、国防科技大学等校用作研究生教材，得到好评。因而本书既可作运筹学、组合数学、计算机等有关专业的研究生和大学高年级学生的教材，又可供有关专业人员、工程技术专业工作者、科研人员以及有兴趣的读者学习和参考。

谢力同

1993 年 2 月 22 日

前　言

拟阵理论的发展已有50余年的历史，它在组合数学和组合优化中起着重要的作用。图论、横贯理论、组合设计和格论等方面的许多问题能够用拟阵理论统一起来并给出新的证明方法。拟阵理论同线性代数和几何学有着密切的联系。拟阵理论应用于组合优化之后得出了很多新的算法。近20年来，拟阵理论得到了迅速的发展，它已成为当今数学学科中的一门引人注目的新兴学科。拟阵理论涉及的问题比较广泛，解决问题的方法千变万化，学习拟阵理论定会使人们感到是一大乐趣。

80年代初以来，国防科技大学系统工程与数学系、山东大学数学研究所等先后为研究生开设过《拟阵》课程；为了教学与研究的需要，也相继编写过《拟阵》教材。本书就是作者在参加多年教学实践和阅读了大量国内外最新文献的基础上，参考了刘桂真同志编写的山东大学研究生教材《拟阵》和陈庆华同志编写的国防科技大学研究生教材《拟阵论》的章节结构，经过较长时间的酝酿讨论，形成了它的内容体系。全书由刘桂真同志完成初稿，陈庆华负责审校修改，然后又经过反复讨论，最后于1992年底定稿。

本书可作为运筹学、组合数学和计算机等专业的研究生教材，也可供有关专业的教师、研究生和大学高年级学生及科研、工程技术专业人员参考。

本书共分十五章。前七章主要介绍拟阵理论的基本概念、公

理系统和基本方法，可作为拟阵理论的基本导引。第七章末还介绍了作者在拟阵次限制基算法方面的最新研究成果。在本书的后八章中，每章作为一个专题分别介绍了拟阵理论在其他学科中的应用以及它们的相互联系。其中第八章和第九章主要介绍了拟阵理论与链群和矩阵的关系，讨论了二元拟阵的性质和拟阵的表示。第十章介绍了拟阵理论在横贯理论中的应用。第十一章讨论了拟阵理论在组合优化中的应用。第十二章和第十三章主要介绍了拟阵和图的关系，特别介绍了作者近年来在拟阵基图方面的研究成果。第十四和第十五章介绍了拟阵基的交换性质和拟阵的极值问题，并给出了一些新的研究成果和没有解决的问题。在本书的每一章的后面都配置了一定量的习题，供读者作为练习。

本书基本上自成体系，但如果读者熟悉一些图论和矩阵论等方面的知识将会对阅读本书有所帮助。

由于作者水平所限，书中难免会有很多缺点和错误，希望广大读者批评指正。

本书的出版，得到了谢力同教授的热情推荐和山东大学郑汉鼎教授、刘家壮教授以及国防科技大学汪浩教授、刘德铭教授、张干宗教授等的大力支持；得到了国防科工委指挥技术学院张学琛同志、吴成平同志、方家银同志的大力支持；得到了国防科技大学出版社邹向曙同志、胡见堂总编、何晋编辑的大力支持；得到了国防科工委指挥技术学院和国家自然科学基金的资助，在此，一并表示感谢。

刘桂真　陈庆华

1993 年 4 月

目　　录

第四章　子拟阵

第五章　拟阵的连通性

第六章　拟阵的并与交

第七章　拟阵与 greedy 算法

第八章　拟阵与链群

第九章 拟阵的可表示性

第十章 拟阵与横贯理论

第十一章 拟阵与组合最优化

第十二章 拟阵与图

第十三章　拟阵的基图

第十四章　拟阵基的交换性质

第十五章　拟阵的极值问题

参考文献

第一章　拟阵的基本概念

§1　引　言

拟阵理论起源于20世纪30年代。1935年，Whitney在“关于线性相关的抽象性质”一文中第一次提出了拟阵的概念，将拟阵作为向量线性相关关系的抽象推广，并在上述文章中叙述了拟阵的公理系统。他的文章成为关于拟阵的第一篇光辉著作。但他提出的问题当时并没有引起人们的重视。1942年，Rado提出了有关拟阵的一些定理。Birkhoff、Maclane和Dilworth等人研究了拟阵的几何方面的问题以及拟阵与格论的关系等等。直到60年代Tutte发表了“关于拟阵的讲演”一文，才使拟阵理论得到了进一步的发展。之后，Rado、Fulkerson、Perfect和Edmonds等人也研究了拟阵理论，使拟阵理论有了迅速的发展。特别是Edmonds和Minty等人把图论的算法推广到拟阵，使拟阵在组合优化、整数规划、网络流及电网络理论中有了广泛的应用。Welsh研究了拟阵的结构，拟阵与格论的关系以及拟阵的极值问题等，撰写了关于拟阵理论的专著。这样，在60年至70年代，关于拟阵理论的发展达到了高潮。目前关于拟阵方面的文章有所减少，主要研究定向拟阵、拟阵中的匹配理论以及拟阵的表示方法等。

拟阵理论中仍有许多尚未解决的问题。例如，1935年Whitney提出的“什么样的拟阵是向量的?”这一问题至今没有解决。1969

年 Welsh 提出的关于拟阵独立集个数的猜想:“$i_k \geqslant \min\{i_{k-1}, i_{k+1}\}, 2 \leqslant k \leqslant n-1$,其中 n 是拟阵的秩,i_k 是含 k 个元素的独立集的个数”,使许多数学家为之奋斗。3 个拟阵的交问题也是拟阵理论中的著名难题之一。

本书将系统地介绍拟阵的基本理论和基本方法以及它们在各个方面的应用，还介绍近年来拟阵理论研究中的一些新的成果。

§2 拟阵的基本概念

考虑任意域上的一个向量组 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. 众所周知,$X$ 或线性相关或线性无关，且一个向量组是线性无关的，则它的任意子组也是线性无关的。向量组还具有下面的性质:

设 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是两个向量组。若 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 可以由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表出且 $m > n$,则向量组 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 必线性相关。

由上面的性质很容易得到下面的结论:

1° 若 $X = \{x_1, \cdots, x_k\}$ 是一个线性无关向量组,则对任意的 $X' \subseteq X$,X' 也是线性无关的。

2° 若 $X = \{x_1, \cdots, x_r\}$ 和 $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$ 是两个线性无关向量组且 $m > r$,则必存在 $y_i \in Y$,使 $X \cup \{y_i\}$ 是一个线性无关向量组。

Whitney 把上面的两个性质进行了抽象推广，提出了拟阵的概念。同时，他也发现了另外一些代数系统也具有上述性质。例如，不含圈的图的边子集就具有上面的性质。后来，许多数学家发现了大量的代数系统具有上述性质，从而使拟阵在组合数学中起到了重要作用。

拟阵有若干等价的定义，我们首先引进由独立集公理系统给出的定义。

设 E 是有限元素的集合,$\boldsymbol{I}$ 是 E 的子集族，它满足下列条件：

$I1°$　$\varnothing \in \boldsymbol{I}$；

$I2°$　若 $X \in \boldsymbol{I}$ 且 $Y \subseteq X$,则 $Y \in \boldsymbol{I}$；

$I3°$　若 $X,Y \in \boldsymbol{I}$ 且 $|Y| > |X|$,则存在 $y \in Y \backslash X$ 使,$X \cup \{y\} \in \boldsymbol{I}$；

则称$(E,\boldsymbol{I})$为一拟阵,记为 $M = M(E,\boldsymbol{I})$。

一个拟阵是由有限元素的集合和满足$I1°$至$I3°$的它的子集族构成的一个系统。由前面的论述易见,设 E 是有限个向量的集合,$\boldsymbol{I} = \{X | X \subseteq E, X$ 中的向量线性无关$\}$,则 $M = M(E,\boldsymbol{I})$ 是一个拟阵，称它为向量拟阵。

任意的 $X \in \boldsymbol{I}$ 称为拟阵的独立集,不是独立集的 E 的子集称为 M 的相关集。易见"独立"是线性无关概念的推广。"相关"是线性相关概念的推广。下面给出一些拟阵中常用的重要概念。

若 $B \in \boldsymbol{I}$,但不存在 $B' \supset B$,使 $B' \in \boldsymbol{I}$,则称 B 为拟阵 M 的基，即基是拟阵的极大独立集。我们用 $\boldsymbol{B}(M)$ 或 $\boldsymbol{B}$ 表示拟阵 M 所有基的集合。

若 $C \notin \boldsymbol{I}$,但任意的 $C' \subset C$ 有 $C' \in \boldsymbol{I}$,则称 C 是拟阵 M 的圈，即圈是拟阵的极小相关集。我们用 $\boldsymbol{C}(M)$ 或 $\boldsymbol{C}$ 表示拟阵 M 所有圈的集合。

拟阵的秩函数是一个函数 $\rho: 2^E \to \mathrm{Z}^+$,使对任意的 $A \subseteq E$ 有

$$\rho(A) = \max\{|X| \mid X \subseteq A, X \in \boldsymbol{I}\}.$$

$\rho(E)$ 称为拟阵 M 的秩,通常记为 $\rho(M) = \rho(E)$.

这里 2^E 表示 E 的所有子集的集合,Z^+ 表示非负整数的集合。

若 $A \subseteq E$ 且对任意的 $x \in E \backslash A$ 有 $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A) + 1$,则称 A 是拟阵 M 的闭集。

若对 $x \in E$ 和 $A \subseteq E$ 有 $\rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)$,则说 x 与 A 相关并记为 $x \sim A$.

拟阵的闭包算子是一个函数 $\sigma: 2^E \to 2^E$，使

$$\sigma(A)=\{x\mid x\sim A,x\in E\}.$$

不难验证 $\sigma(A)\supseteq A$ 且 $\sigma(A)$ 是含 A 的最小闭集。

若 $S\subseteq E$ 且 S 含 M 的一个基，则 S 叫 M 的支撑集。

在向量拟阵中不难看出，$M=M(E,I)$ 的基即为向量组 E 的极大线性无关组。M 的秩即为向量组 E 的秩。x 与 A 相关，即 x 可表为 A 中向量的线性组合。至于拟阵的圈，在向量拟阵中没有明显的几何意义，这个概念主要来自图的拟阵。

在向量空间中同构的概念同样也可以推广到拟阵。

设 $M_1=M_1(E_1,I_1)$ 和 $M_2=M_2(E_2,I_2)$ 是两个拟阵。若存在双射 $\phi:E_1\to E_2$，使 $X\subseteq E_1,X\in I_1$，当且仅当 $\phi(X)\subseteq E_2,\phi(X)\in I_2$，则说拟阵 M_1 和 M_2 是同构的。

更一般地，和前面的向量拟阵同构的拟阵统称为向量拟阵。

任意给出一个拟阵，是否存在一个向量拟阵与之同构这个问题至今尚未完全解决。

§3 拟阵的例子

除了前面所说的向量拟阵外是否还有其他拟阵呢？回答是肯定的。否则，拟阵的提出将是毫无意义的。其实在 1935 年 Whitney 就发现了图的拟阵。下面给出几个重要的拟阵例子。

(1) 均匀拟阵

设 E 是一个有 n 个元素的集合，$0\leqslant k\leqslant n$ 是固定的整数。令

$$I=\{X\mid X\subseteq E,|X|\leqslant k\},$$

则 $M=M(E,I)$ 是一拟阵，称为均匀拟阵。通常记为 $U_{k,n}$。

不难直接验证 I 满足 $I1°$ 至 $I3°$. $U_{k,n}$ 的基是 E 的基数为 k 的子集。$U_{k,n}$ 的圈是 E 的基数为 $k+1$ 的子集。

(2) 剖分拟阵

设 E 是有限元素的集合，$E_1,\cdots,E_m$ 是 E 的一个剖分，即 $\bigcup E_i=$

E 且当 $i \neq j$ 时 $E_i \cap E_j = \varnothing$. 对每个 E_i,给定一个正整数 d_i. 令

$$I = \{X \mid X \subseteq E, |X \cap E_i| \leqslant d_i, 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

则 $M = (E,I)$ 是一拟阵，称为剖分拟阵。

显然 I 满足 $I1°$ 和 $I2°$,我们证明 I 满足 $I3°$. 设 $X,Y \in I$ 且 $|X| < |Y|$. 令 $X_i = X \cap E_i, Y_i = Y \cap E_i$,则 $\bigcup X_i = X$, $\bigcup Y_i = Y$ 且当 $i \neq j$ 时 $X_i \cap X_j = \varnothing, Y_i \cap Y_j = \varnothing$. 由 $|Y| > |X|$ 知至少有一个 $i \in \{1,\cdots,m\}$,使 $|Y_i| > |X_i|$ 且 $|X_i| < d_i$. 令 $y \in Y_i \backslash X_i$,显然 $y \in Y \backslash X$ 且 $X' = X \cup \{y\}$ 满足 $|X' \cap E_i| \leqslant d_i, 1 \leqslant i \leqslant m$,即 $X' \in I$. 由拟阵的定义知 $M = M(E,I)$ 是一拟阵。

不难看出 X 是 M 的基当且仅当对任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$,有 $|X \cap E_i| = d_i$. X 是 M 的圈当且仅当存在 $i \in \{1,\cdots,m\}$,使 $X \subseteq E_i$ 且 $|X \cap E_i| = d_i + 1$.

(3) Fano 拟阵

设 $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 是图(1.3.1) 中的点集。令

$$I = \{X \mid X \subseteq E, |X| \leqslant 3 \text{ 且 } |X| = 3 \text{ 时 } X \text{ 中的点不共线}\}$$

则 $M = M(E,I)$ 是一拟阵，称为 Fano 拟阵。

不难直接验证 I 满足 $I1°$ 至 $I3°$. M 的圈是 3 个共线的点集或者是 4 个点构成的集合,使其中任意 3 个点都不共线。M 的基是图中任意不共线的 3 个点构成的集合。注意图中的点 4, 5, 6 也看作是共线的。

(4) 代表拟阵

给定有限集合 E 及 E 的子集族 $\varepsilon = \{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$,$E$ 的子集 $X = \{e_1,\cdots,e_r\}$. 若 ε 中存在一个子集族 $\{\varepsilon_{i1},\cdots,\varepsilon_{ir}\}$,使 $e_j \in \varepsilon_{ij}, j = 1,\cdots,r$,则称 X 是 ε 的一个部分相异代表系。令

$$I = \{X \mid X \subseteq E, X \text{ 是 } \varepsilon \text{ 的部分相异代表系}\},$$

则 $M = M(E,I)$ 是一个拟阵,称它为代表拟阵。

显然 I 满足 $I1°$ 和 $I2°$. 下面证明它也满足 $I3°$. 设 $X,Y \in I$ 且 $|Y| > |X|$. 构造二分图 $\Delta = (\varepsilon,E,F)$,其中 E 和 ε 是 Δ 的两部分顶

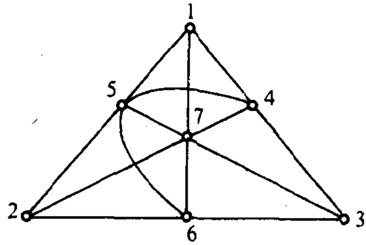

图 1.3.1

点集合，$F = \{e_i\varepsilon_{i_j} | e_i \in \varepsilon_{i_j}\}$ 是 Δ 的边集合。显然 $X \in I$ 当且仅当存在 Δ 的对集覆盖 X. 设 M，N 分别为 Δ 的对集，它们在 E 中的顶点集分别为 X 和 Y. 考虑 M 与 N 的对称差 $M\Delta N$. 由于 $|Y| > |X|$，$M\Delta N$ 必有一个分支是一条奇长的路 P 且 P 的端边为 N 中的边。P 至少有一个端点为 $y \in Y\backslash X$. 不难看出 $M\Delta P$ 是覆盖 $X \cup \{y\}$ 的对集，即 $X \cup \{y\} \in I$.

（5） 图的圈拟阵

给定图 G，设 E 是图 G 的边集合。令

$$I = \{X | X \subseteq E, X \text{ 中的任意边子集不构成圈}\},$$

则 $M = M(E,I)$ 是一拟阵，称为图 G 的圈拟阵。

这是一个十分重要的拟阵，它建立了图与拟阵之间的联系。不难看出 C 是 M 的圈当且仅当 C 是图 G 的圈，B 是 M 的基当且仅当 B 是图 G 的支撑森林。证明 $M = M(E,I)$ 是一个拟阵不是十分显然的。在下节我们将给出详细证明。

（6） 图的反圈拟阵

给定图 G，设 E 是图 G 的边集合。令

$$I = \{X | X \subseteq E, X \text{ 不含 } G \text{ 的割集}\},$$

则 $M = M(E,I)$ 是一拟阵，称为图 G 的反圈拟阵。我们将在第三章

详细研究该拟阵的性质。

§4 图的圈拟阵

设 G 是一个图，E 是 G 的边集合，$I = \{X \mid X \subseteq E, X$ 中的任意边子集不构成圈$\}$。我们证明 $M = M(E,I)$ 是一拟阵。

易见 I 满足 §2 中的公理 $I1°$ 和 $I2°$. 我们证明 I 满足公理 $I3°$. 若不然，则存在 $X, Y \in I$ 且 $|Y| > |X|$，使任意的 $y \in Y \setminus X$ 都有 $X \cup \{y\}$ 含圈。设 $G[X]$ 是 G 中边集 X 的导出子图。X 不含圈，于是 $G[X]$ 是一森林。设 $G[X]$ 的连通分支分别为 $G_1, \cdots, G_k$，则 G_i 是一棵树，$1 \leqslant i \leqslant k$. 设 X_i 是 G_i 的边集合，V_i 是 G_i 的顶点集合，则有

$$|X_i| = |V_i| - 1$$

且当 $i \neq j$ 时有 $X_i \cap X_j = \varnothing$，$\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$. 因为任意的 $y = uv \in Y \setminus X$ 有 $X \cup \{y\}$ 含圈，故必有 $u, v \in V_i, i \in \{1, \cdots, k\}$. 设

$$Y_i = \{y \mid y = uv, y \in Y, u, v \in V_i\}.$$

显然 $\bigcup_{i=1}^{k} Y_i = Y$ 且当 $i \neq j$ 时 $Y_i \cap Y_j = \varnothing$. 由于 Y_i 中每一条边的端点都在 V_i 中且 Y_i 不含圈，故有

$$|Y_i \leqslant |V_i| - 1 = |X_i|$$

于是

$$|Y| = \sum_{i=1}^{k} |Y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |X_i| = |X|.$$

这与 $|Y| > |X|$ 矛盾。因此 $M = M(E,I)$ 是一拟阵。如 §3 所述，称它为图的圈拟阵。通常记为 $M(G)$.

易见下列断言的正确性。

1° $M(G)$ 的基是 G 的支撑森林。特别地，若图 G 连通，则 $M(G)$ 的基是 G 的支持树。

2° $\rho(M(G)) = |V(G)| - K(G)$，其中 $K(G)$ 是图 G 的连通分