数学物理方程

第一册

吴新谋等编著

科学出版社

数学物理方程

第 一 册

吳新謀等編著

科 学 出 版 社

1958年·北京

內 容 提 要

本書系由原来吳新謀編数学物理方程講义扩充改写而来，除原講义內容外，加上連續介質力学一章及偏微分方程之近代成就若干章及其他，內容相当齐备．本書共分三册，兹将第一册目录列举如下：1．前言，2．連續介質力学，3．积分方程，4．常微分方程基本知識，5．一級偏微分方程之基本理論等．

数学物理方程

第一册

吳新謀等編著

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）

北京市書刊出版业營业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1958年8月第一版　書号：1327　字数：229,000

1958年9月第二次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）1,001－6,200　印张：8 7/16

定价：（10）1.40元

目　录

第　一　册

初 版 序

1954 年春季，为了給中国科学院数学研究所微分方程小組研究实习員同志們补課，我們編写了这本講义．經过初步修改后，在同年夏，高等教育部举办暑期綜合性大学教学研究座談会数学物理方程講座时，这部講义被印出作为講座講义的一部分．

講义最主要的目的，是要通过对数学物理方程基本知識的学习，初步明了这門学問的若干基本問題，和处理它們的一些方法．

在第一章里，我們說明了定解問題提出的原因，并給了定解問題較明确的定义，和处理它的一般步驟．

第二章談双曲型方程．通过黎曼方法，直接进入对尤拉——波阿松方程的探討，因而导出 Asgeirsson 恆等式，并利用此恆等式解决了一般波动方程的两个定解問題．內容大抵取材于下列各书：

С. Л. Соболев, Уравнения математической физики. (Г. И. Т. Л., Москва-Ленинград, 1950). 国际书店有影印本．錢敏同志等已把这书譯为中文，将由高教出版社出版．

E. Picard, Leçons sur quelques types Simples des équations aux dérivées partielles. (Gauthiers-Villars, Paris 1927).

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II. (Gauthiers-Villars, Paris, 1889).

R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, B. II. 有俄英譯文，中譯本正在进行中．

但这部分材料的安排，可以看作本講义与一般教科书不同点之一．

第三章談椭圓型方程．除若干次序的調整和材料的补充外，可以說大部分取材于 Соболев 院士书，小部分取材于：

И. Г. Петровский, Лекций об уравнениях с частными производными (Г. И. Т. Л. Москва-Ленинград, 1953).

E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, t. III. (Gauthiers-Villars, Paris, 1927).

第四章談拋物型方程. 只討論了热导方程,內容取材于 E. Goursat 书.

第五章談綫性二級偏微分方程一般理論. 由郭西-郭瓦洛甫斯加婭定理出发,接着引进了特征理論. 在这基础上,对第三章古典結果进行討論,說明分类的重要性,同时提出若干未解决問題. 最后定义了基本解,作为三类型的共同性. 內容大抵取材于:

J. Hadamard, Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, (Hermann, Paris 1932), 有英文本(1923 初版,1952 由 Dover Publications 重版).

这一部分材料,一般教科书介紹比較少,但还是受多数学者重視的,所以我們把它們吸收进来了.

前后共有习題約二百个,可供讀者自己練习之用.

这講义的缺点是显然的,例如 Соболев 院士书第二十二章以后各章(包含富氏方法,广义解等)的材料,都是很重要的,我們沒有能吸收到講义里来. 又如 Петровский 院士和 Соболев 院士所提出的各发展方向,我們也沒有能詳加介紹. 这些都希望讀者自行多加注意.

講义里一定还有許多錯誤和缺点,希望讀者們多多加以批評,多提些意見,俾我們能进行修正.

在編輯这本講义时,我們得到了秦元勳,馮康,丁夏畦,王光寅,林坚冰,邱佩璋,孙和生等同志的协助,在修改校訂时,又得董光昌,陈良劲,王光寅,邱佩璋諸同志提出了許多宝貴的意見,我們在这里向他們致謝.

編　者

一九五五年五月于北京

第二版序

本书是在吳新謀編“数学物理方程讲义”的基础上扩充而成.

中国科学院数学研究所偏微分方程組全組同志在組长吳新謀同志的領导下，經过二十天左右的苦战，七一前突击完成这本书的初稿，向中国共产党三十七周年生日和中国共产党中国科学院第二次代表大会献礼.

社会主义建設中各种科学技术問題，特别是大型工程与新技术等需要用到复杂的数学特别是偏微分方程，要解决这些問題需要有大批又紅又专的偏微分方程干部. 本书目的是作为培养这种干部的教材，把大学毕业生培养两三年成为具有独立工作的能力.

所謂独立工作的能力是指：1.具有能从实际問題中正确地提出数学問題的能力. 2.解决这些数学問題. 3.把已解决的問題进行計算，得出数値結果.

这三方面所需要的知識，在书上大致具备，反映第一方面的是书上有連續介質力学一章，反映第二方面的是微分方程、积分方程等各章，反映第三方面的是书上有各种定解問題的近似計算，而且还有計算时程序設計的例子（有了程序設計，就能放在电子計算机上大量計算）.

虽然书上具有上述三方面的材料，但因突击时間比較仓促，材料还組織得不够完善，例如方程来源沒有在各章中詳細敍述，又如程序設計只有二个例子，还覚不够等等，以后将逐步修改，使本书更达到完善的地步.

如果讀者希望得到偏微分方程方面的一般知識，則閱讀前八章（或前七章）即可，如果已具有偏微分方程的一般知識，例如已看过吳新謀編的数学物理方程讲义的同志，希望对偏微分方程有深入的了解，以便进行研究工作，則可閱讀八、九、十与十一章. 又一、二、三、

四章在大学里已經大致学过，可以較快地閱讀。

由于本书是发揮集体力量在較短时期內突击而成，由此产生了一个非本質的缺点，各章中名詞記号不够一致，俟将来再修正，希望讀者閱讀时自己注意。

书中一定还有其他許多錯誤和缺点，希望讀者多多提出批評和意見，使我們能及时修正。

本书分三册出版，一、二、三、四各章属第一册，五、六、七、八各章属第二册；九、十、十一各章属第三册。

編　者

1958年7月5日北京

前　言

§1 微分方程研究的来源

微积分发明后不久，数学家就开始了微分方程的研究．由于微积分在数学其他各分枝和科学技术其他各部門的应用，这些学問又大量的提出微分方程的問題．

在几何学里[1]要研究刚体的运动情形，就提出了方程组：

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \beta r - \gamma q, \\
\frac{d\beta}{dt} &= \gamma p - \alpha r, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \alpha q - \beta p.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

研究两組共軛系統曲綫时，就提出了方程式

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + a\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta = 0. \tag{2}$$

研究某特殊曲面上的共軛系統曲綫时，就碰到了方程式

$$(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\partial\rho_1} + n\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - m\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0. \tag{3}$$

最著名的則是研究极小曲面时提出的方程式

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \tag{4}$$

在函数論方面，为了研究分析函数 $Z = f(z) = P + iQ, z = x + iy$；提出了著名的郭西黎曼方程組：

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{5}$$

1) 参閲苏步青著：微分几何学．

和拉普拉司方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0. \tag{6}$$

在古典力学里，最一般的运动方程式就是一組二級常微分方程，流体力学里的一般运动方程式则系一組二級偏微分方程，弹性力学和塑性力学的研究，也是由偏微分方程出发的。

在数学其他各分支中，提出的微分方程还很多，我們不在这里一一罗列了。[1)]

科学的其他各部門，首先是物理学也提出了很多的微分方程。

在声学和振动学里碰到了达朗培方程式

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{7}$$

在热力学里，提出了热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{8}$$

在电磁学里，提出了拉普拉司方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{9}$$

光学则提出了波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{10}$$

科学技术各部門已經提出了大量的微分方程，并且随着生产技术不断地发展，而将継續不断提出新鮮的問題出来。

这些方程式的解决，与提出它們的各部門或分枝学問的研究的进展，有着密切的关系，这样就促进了微分方程的研究。

§2 解微分方程时增添附加条件的必要性

数学家首先发現的事实就是：一个微分方程式偏微分方程能有无穷个解。 在初等的情形，就是說方程式可能用初等方法求解的时

1) 例如：近几年来，数理統計方面的研究，需要了解抛物型方程式［和 (8) 类似的方程］，单叶函数論要考虑一个著名的常微分方程。

候，求得的解，总含有一个或多个任意常数或函数．把这些任意元素变动的时候，那末除掉若干个例外的通解以外，我們就可能获得方程式所有的解．这样一般就說得到了"通解"．在一个較长的时期里，人們集中精力在求这些"通解"．

但是当我們要明确"通解"定义的时候，就遭遇了許多严重的困难[1]，但这种看法也因为旁的原因，并且是有决定性的原因，而渐渐地被抛棄掉．这就是因为在最重要的应用里，尤其是那些有关动力学和物理学的应用里：問題不是在求方程式的任何解，而要求其中一个适合某些补充条件的解，这些补充条件就是定解条件．

理論上講，我們可以想象把这样提出的問題，轉变为上面說的問題，因为假設我們已經有了"通解"，那末只須在它的表达式里挑选适当的任意元素使它滿足定解条件．但事实上，对偏微分方程說，除掉少数几个特別簡单的例[2]以外，刚巧这个挑选就是最困难．相反地，若对含有任意已知元素的定解条件，我們已求得一个解，那末把这些任意已知元素在可能范围內变动时，在极常有的情况下，我們就可以获得方程式的任何解，就是所謂"通解"．

就是采取了这种观点，郭西和外伊司得拉司才差不多在同一个时期，在一个广泛的情况下，解决了当时常微分方程論里的一个基本問題：就是解的存在的証明．我們要注意一直到他們为止，除掉若干个初等可积情形外，一个微分方程或偏微分方程有解的事实并不明显，也完全沒有証明过．为了証明这个事实，郭、外两氏正是在增添若干适当的定解条件之后，才明确地証明了他們所要求的解的存在．

§3 定解条件、始值条件和边值条件

我們要考慮的微分方程或偏微分方程

$$F = 0$$

是加在含 m 个自变数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的未知函数 u 上的条件，F 可能包

1) 参閱 E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. T. I. P. 28, Paris, Hermann.

2) 用达朗倍法解弦振动問題可以說是这方面唯一的例，这个方法在后面我們将再討論．

含自变数、未知函数 u 和它的一直到某級的微商．所謂 u 是 $F=0$ 在开域 R_m 的解，就是說当我們把 u 和它的微商的值代入 F 时，F 将在 R_m 内恆等于零．这就无形中要求在 F 内的各微商的存在性，在边上，这些微商就不必要存在．

和这个泛定方程式(就是指 $F=0$)相反，我們加于未知函数 u 上的定解条件，則只須在 R_m 内一个子集上或 R_m 的边集上滿足．这些子集或边集，普通是 m 維空間的正則曲面，一般被称为支柱．

所謂 u 在支柱上滿足定解条件的意义，有必要說得更明确些．普通地說 u 在支柱上取已与值，就等于說当动点 M 由 R_m 內趋近于支柱上固定点 M_0 时，u 的值就趋近于已与函数在 M_0 的值．否則我們将可能任意在支柱給已与值，而这些值就不需和 u 在 R_m 內的情形有任何关联，这与一般实际情况是不相符的．

但我們有下列二輔定理：

班勒卫輔定理 1 設在 xy 平面上一閉曲綫 Γ 范围一开域 S．$f(x,y)$ 在 S 內是連續的，AB 是 Γ 上一連續弧，M 是 AB 上任一点，s 是 AM 的弧长．若 S 內一点 (x,y) 沿 S 內任一路径趋近于 M 时，$f(x,y)$ 趋近于 $f_1(s)$；則 (1) $f_1(s)$ 是 s 的連續函数，(2) 对 AB 上各点說，$f(x,y)$ 的趋近于 $f_1(s)$ 是一致的．

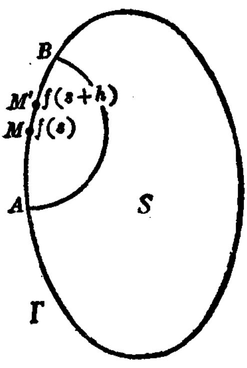

图 1

証：由假設对 AB 上任一定点 M，对于任意給定的正数 ε，我們恆能求得一正数 r，使在以 M 为心，r 为半径的圓 C 和 S 的公共部分 S_0 內，恆有

$$|f(x,y)-f_1(s)|\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$

設 C 和 AB 相交于两点 M_1, M_2．命 M' 是 M_1M_2 弧的一內点．命 S 內任一点 (x,y) 趋近 M'，AM' 的弧长是 $s+h$，則由假設有

$$\lim f(x,y)=f_1(s+h),$$

所以

$$|f_1(s+h)-f_1(s)|\leqslant\varepsilon.$$

再則，[1] 既在閉弧 AB 上各点成立，則我們一定能找到有限个象 C 一样的圓把 AB 整个复盖起来. 因此任与一正数 ε，一定可以求得一正数 l，使在以 AB 上任一点 M 为心 l 为半径的圓和 S 的公共部分內就恆有(1). 所以有[2]. 証完. 反之.

班勒卫輔定理 2 設在 xy 平面上閉曲綫 Γ 范围一域 S. $f(x,y)$ 在 S 內是連續的. AB 是 Γ 上一連續弧. 对 AB 上任一点 M，在 S 內有一連續地随着 M 而变的路径 MN. 若当点 (x,y) 沿着 MN 趋近 M 时，对 AB 上的点說，$f(x,y)$ 一致趋于 $f_1(s)$；則(1) $f_1(s)$ 是 s 的連續函数，(2)当 (x,y) 沿任一在 S 內的途径趋于 M 时，$f(x,y)$ 恆趋于 $f_1(s)$.

証：当 M 在 AB 上变动时，MN 既連續变易，則当 M 移动时 MN 上离 M 有一定距离 l 的 P 的軌跡将是一連續弧 σ：当 MM' 适当接近时，PP' 也将适当接近. 因之，在 σ 上，f 是 P 的連續函数.

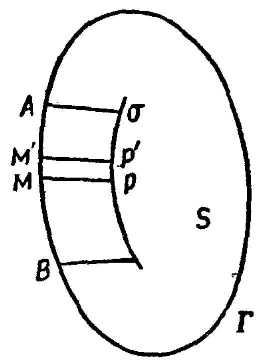

图 2

在 AB 上 $f(x,y)$ 的趋近 $f_1(s)$ 既是一致的，那末任与一正数 ε，則一定可取得 l 适当小，对 AB 上所有的点 M 与 M 相当的 P 恆有

$$|f(P)-f_1(M)|<\varepsilon,$$

如是則有

$$|f_1(s+h)-f_1(s)|\leqslant|f_1(s+h)-f(P')|+$$
$$+|f(P')-f(P)|+|f(P)-f_1(s)|<3\varepsilon.$$

所以 $f_1(s)$ 在 AB 是連續的.

再則命 P' 是在 M 附近的 S 內任一点，M' 是 AB 上和 P' 相当的点. 我們又有

$$|f(P')-f_1(M)|\leqslant|f(P')-f_1(M')|+|f_1(M')-f_1(M)|<4\varepsilon.$$

証完.

因之，除特殊假定外，若支柱是連續的时，則已与函数一定是支柱上点的連續函数.

若定解条件里含有 u 的微商，則首先必需假定 u 在支柱上是定

义的，并当 M 由 R_m 內趋近于支柱上某定点 M_0 时，u 趋于定义值，而 u 的微商 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 在支柱 $x_1=0$ 上取已与值的意义可能有两种解释．第一种解释：当 $(x_2,x_3,\cdots,x_m)$是 R_m-P 內一任意点时

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(h,x_2,x_3,\cdots,x_m)-u(0,x_2,x_3,\cdots,x_m)}{h}$$

等于已与值．第二种解释：当$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m)$是 R_m 任一內点时 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 恆連續，并当 $x_1=0$ 时也是連續的；即当 x_1 趋近于零时 $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ 趋近于已与值，在通常情况下，我們采取第二种解释，显然，适合第二种解释时，就也适合第一种解释．

为了适应动力学和物理学的需要，定解条件又可以分为两种：始值条件和边值条件． 在动力学和物理学里，我們常要考虑一个 n 維介質的平衡性，或这个介質随着时間演变的情况． 在第一种情形，$m=n$，在第二种情形，$m=n+1$．这时有一个自变数是时間．在第一种情形，定解条件的支柱可以是这介質內部的一个曲面或者就是它的边集，相应的条件就叫做边值条件．在第二种情形，定解条件的支柱，普通就是原始时間，相应的条件就叫做始值条件，它描述在某一定瞬間（也可能就是原始瞬間）整个介質的情况．

这两种条件，不仅在物理意义上起着不同的作用，就是在分析方面看，它們也有本質上的不同．

求一函数使适合泛定方程和定解条件，就叫做定解問題． 定解問題将是我們此后主要对象．

§4 举例說明

例 1．常微分方程的定解問題 对一个一級常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

說，开域 R_m 一般地是 x 軸上一个間隔，这个間隔可能一端趋于无穷也可能两端都趋于无穷． 郭西第一个提出并解决了下列始值問題：

求 y 使适合

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & \text{（泛定方程），} \\ y = c, \text{当 } x = a & \text{（定解条件）.} \end{cases}$$

若已与 a,c，则根据 $f(x,y)$ 在点 (a,c) 附近的某些正則性，我們就能証明 y 在某間隔 $[a_1,b_1]$ 内的存在性和唯一性，这間隔 $[a_1,b_1]$ 可能以 a 为其边点也可能以 a 为其内点，同时，也可能对某对 $a,c;f(x,y)$ 丧失它的正則性，那末上面的結論就不一定正确，而 (a,c) 就称为方程的异点. 除掉这个情形外，$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ 任何一个定解 y 既必須在 a 取一个定值 c，因此，我們就一定可能用解决上述問題来求得这个解 y. 因此命 a,c 在可能范围内任意变化，就眞正得到了通解.

二級常微分方程

$$y'' = f(x,y,y')$$

在力学中常碰到. 这是研究一質点在一直綫或一曲綫上运动的方程式，在这里 x 表示时間，而力学上的問題就是已知質点在 $x=0$ 时的位置和速度，求質点在任何时間的位置. 这就是說要解决下列問題：

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \\ \left.\begin{aligned} y &= c, \\ y' &= d, \end{aligned}\right\} \text{当 } x = a, \end{cases}$$

这时定解条件显然是始値条件.

但对这个二級微分方程，这样的定解問題并非唯一的，我們还可提出下列的問題：

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \\ y(x_0) = A, \\ y(x_1) = B, \end{cases}$$

其中 A,B 是常数. 毕加氏[1]証明：当 $|x_0 - x_1|$ 适当小，$f(x,y,y')$ 在 (x_0,x_1) 适当正則时，上問題有一解并只有一解. 这时 x 已不再代表时間，而是一个几何变数，而定解条件則是边値条件. 这个問題和下

1) E. Picard: Traité d'Analyse, T. III.