（下册）

高等数学习题课讲义

欧维义　王毅　郭庆尧　王树岩

吉林大学出版社

高等数学习题课讲义

下 册

欧维义 王 毅 郭庆尧 王树岩 编

吉 林 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书分上、下两册，内容包括一元微积分、多元微积分、级数和常微分方程等。

本书对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法均作了精练的归纳和总结。该书收集了近年来理工类、经济类研究生入学考试数学试题的许多新题型，例题、习题类型齐全。

本教材在叙述上由浅入深，通俗易懂。

本教材可作为理工科各专业的大学生习题课用书；也可供理工科高等数学课教师及学习高等数学课的学生参考；还可供报考研究生的理工科学生复习高等数学参考。

前　　言

习题课是高等数学教学的重要环节。提高习题课教学质量的关键，是有适合于习题课教学目的的好教材。

我们编写的这本习题课讲义，分上、下两册。上册包括一元微积分，下册包括多元微积分、场　论、级　数和常微分方程等。每章分为若干节，每节内容由"基本概念和主要结果、几点说明、例题选解、习题（思考与练习、(A)类、(B)类）和习题解答和提示"组成。基本概念和主要结果、几点说明，不仅概述了重要概念、定理（公式）和方法，而且对重点、难点和易于混淆、出错之处作了注释。在例题选解中着重解题思路的分析，讲解题方法和解题技巧。

同已出版的高等数学习题课教材相比较，本教材在内容的选择上，不仅重视"老题"的精选，而且更侧重于78年以来理、工类，经济类研究生入学考试数学试题的收集和精选，它们富有典型性、启发性，很有益于开阔思路，高效率地提高解题能力。

本教材可作为理工科各专业的大学生习题课用书；也可供理工科高等数学课教师及学习高等数学课的学生参考；还可供报考研究生的理工科学生复习高等数学参考。

由于编者水平有限，书中一定有很多不当或错误之处，敬请读者批评指正。

编　　者

1996年4月于吉林大学

目　　录

第一章　多元函数微分学

本章有 §1—§4. §1 中讲的是函数的极限和连续函数；§2 中讲的是偏导数、全微分和微分法；§3 中讲的是高阶偏导数和高阶全微分，中值定理与 Taylor 公式；§4 讲微分学的应用.

§1　函数、极限与连续性

1.1　基本概念和主要结果

基本概念：

定义 1.1(函数定义)　设有三个变量 x,y,u. 变量 x,y 组成的点 (x,y) 的变域 D 是 xOy 平面上的一个区域. 如果 $\forall\ (x,y)\in D$，根据"对应关系 f"，变量 u 总有唯一的值与之对应，则称 u 为 x,y 的二元函数，记成

$$u=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

称 x,y 为自变量，u 为因变量，D 为函数的定义域.

定义 1.2(极限定义)　设点集 D 是函数 $u=f(x,y)$ 的定义域. $M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点，A 为一常数. 如果 $\forall\ \varepsilon>0$，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对于 D 中的任意点 $M(x,y)$，只要

$$0<\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称当 $M\to M_0$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y)=A$$

定义 1.3 设点集 D 是函数 $u=f(x,y)$ 的定义域，点 $M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点，A 为一常数. 如果 $\forall\ \varepsilon>0$，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对于 D 中的任意点 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，只要

$$|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$$

就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称当 $M\to M_0$ 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限.

定义 1.4 设函数 $u=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的极限存在，且

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $u=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续. 否则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处间断.

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点处都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，记成 $f(x,y)\in C(D)$；若函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，在 D 的边界 ∂D 上的每一点处也连续，则称 $f(x,y)$ 在闭区域 $D+\partial D=\overline{D}$ 上连续，记成 $f(x,y)\in C(\overline{D})$.

主要结果：

1. 设 $\overline{D}$ 为一有界闭区域，$u=f(x,y)\in C(\overline{D})$，则

(1) $f(x,y)$ 在 D 上有界. 即 $\exists\ M>0$，使得 $\forall\ (x,y)\in\overline{D}$，有 $|f(x,y)|\leqslant M$.

(2) $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上达到它的最大值与最小值. 即 $\exists\ P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)\in\overline{D}$，使得

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2)\quad(\forall\ (x,y)\in\overline{D})$$

(3) $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上取到它的最大值与最小值之间的一切值(介值性质). 即若 m 和 M 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值与最大值. 则 $\forall\ \eta\in[m,M]$，$\exists\ P(x_0,y_0)\in D$，使

$$f(x_0,y_0)=\eta$$

2. 二元初等函数在其有定义的区域内连续.

1.2 几点说明

1. 类似于二元函数的定义，可定义三元函数和 n 元函数.

2. 定义 1.2 和定义 1.3 是等价的. 在实际应用时各有各的方便处.

3. 二元函数的极限与一元函数的极限，有完全相同的运算法则. 其中包括极限的四则运算法则和极限的复合运算法则.

4. 在二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 中，点 (x,y) 趋于点 (x_0,y_0) 的方式是任意的. 即使当点 (x,y) 沿着过 (x_0,y_0) 的所有直线趋于 (x_0,y_0) 时二元函数 $f(x,y)$ 的极限存在且相等，还不能断定其极限存在. 但是，如果点 (x,y) 沿着某一特殊方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 的极限不存在，或者点 (x,y) 沿不同方式趋于 (x_0,y_0) 时，二元函数 $f(x,y)$ 的极限都存在，但不相等，则二元函数 $f(x,y)$ 的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 是不能通过考查特殊方式的极限而确定，这是一元函数极限和二(多)元函数极限的一种质的差别.

(5) 二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 又称为二重极限. 而把二元函数的极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y), \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

称为累次极限，重极限与累次极限的定义是不相同的. 但它们之间是有联系的.

1.3 例题选讲

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y)=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$

(2) $f(x,y)=\sqrt{6-2x-3y}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}$

(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

解 (1)—(4)的函数都是没有实际背景的函数. 它们的定义域,是由使其数学运算有意义的那些点构成的集合.

(1) 解不等式

$$(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)>0$$

得 $4<x^2+y^2<16$. 函数 $f(x,y)$的定义域是同心圆 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$ 围成的开圆环. 它是一个有界的开的复连通域.

(2) $f(x,y)$的定义域是由不等式

$$6-2x-3y\geqslant 0$$

即$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqslant 1$ 确定的平面点集. 它是 xOy 平面上被直线$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ 分成的两个半平面中的含(0,0)在内的那个闭平面,它是一个无界的闭的单连通域(图 1-1).

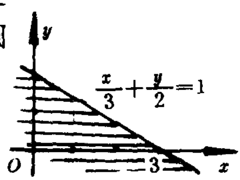

图 1-1

(3) 当 $1-x^2\geqslant 0$, $y^2-1\geqslant 0$ 时,函数 $f(x,y)$有定义. 其解集是

$$|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$$

函数 $f(x,y)$的定义域 D,是图 1-2 中的划斜线的那部分. 它没有连通性.

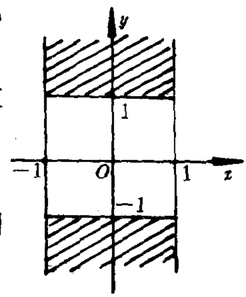

图 1-2

(4) 当 $x^2-2xy>0$ 时,函数 $f(x,y)$有定义. 解不等式 $x^2-2xy>0$,得 $x>0$, $x>2y$ 或 $x<0$, $x<2y$. 因此,函数 $f(x,y)$的定义域是 $x>0$, $x>2y$ 和 $x<0$, $x<2y$. 它在 Oxy 平面上的图形如图 1-3 所示. 它没有连通性.

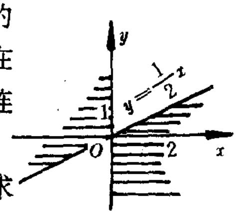

图 1-3

2. 设 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$,试求 $f(x,y)$.

解 若设 $x+y=u$, $x-y=v$. 则有

$$x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$$

从而

$$f(u,v)=\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}uv=\frac{1}{2}u(u-v)$$

所以 $f(x,y)=\frac{1}{2}x(x-y)$.

3. 用极限定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(3x^2+2y)=14$　　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

解 当限制 $|x-2|\leqslant1$(即 $1\leqslant x\leqslant3$)时,有

$$|3x^2+2y-14|=|3(x^2-4)+2(y-1)|$$

$$\leqslant|3(x+2)(x-2)+2(y-1)|\leqslant15|x-2|+2|y-1|$$

从而,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)=\min\left\{\frac{1}{20}\varepsilon,1\right\}$. 使得当 $(x,y)\neq(2,1)$,且

$$|x-2|<\delta,\ |y-1|<\delta$$

时,有

$$|3x^2+2y-4|\leqslant15|x-2|+2|y-1|\leqslant17\delta<\varepsilon$$

根据二元函数的极限定义,知(1)题成立.

(2) 注意到当 $x^2+y^2\neq0$ 时,有

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

于是

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right||x|<\frac{1}{2}|x-0|$$

从而,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta=\varepsilon$. 使得当 $(x,y)\neq(0,0)$,且

$$|x-0|<\delta,|y-0|<\delta$$

时,有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\frac{1}{2}|x-0|<\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$$

根据二元函数的极限定义，知(2)成立.

4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 注意到

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}-2\frac{x}{e^x}\cdot\frac{y}{e^y}\right)$$

又

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u}=0,\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{x}{e^x}\cdot\frac{y}{e^y}=0$$

从而所求极值存在，极限值为 0.

5. 讨论下列函数的极限是否存在？若存在，求其极限值.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

解 (1) 设 $k\neq0$ 为一常数. 令动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$. 这时 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $x\to0$. 于是有

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-k^2)x^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

k 取不同的值时，上述极限也不同，这说明当动点 (x,y) 沿不同的直线 $y=kx$ 趋于原点时，函数 $f(x,y)$ 有不同的极限. 故极限不存在.

(2) 当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ $(k\neq0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0$$

当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx^2(k\neq0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}\neq0$$

这说明当动点 (x,y) 沿不同的路径趋向于原点时，函数有不同

的极限，因而极限不存在.

(3) 由

$$\left|(x-y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|x-0|+|y-0|$$

可见，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\frac{1}{2}\varepsilon$. 只要$(x,y)\neq(0,0)$，$|x-0|<\delta$，$|y-0|<\delta$，就有

$$|f(x,y)-0|<2\delta=\varepsilon$$

根据极限定义，知所求极限存在，极限值为 0.

6. 设

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

分别求$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

解 当 $x\neq0$ 时，有

$$\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=1$. 又当 $y\neq0$ 时，有

$$\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}=-1$$

因而$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=-1$.

当动点(x,y)沿直线 $y=kx(k\neq0,k\neq-1)$趋于$(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x-kx}{x+kx}=\frac{1-k}{1+k}$$

并且当 k 取不同的值时，上述极限不同. 从而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

综上所述，函数 $f(x,y)$的两个累次极限都存在，函数 $f(x,y)$的二重极限不存在.

7. 下列函数在$(0,0)$处是否连续？

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解 (1) 方法 1 因为

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\leqslant |x-0|+|y-0|$$

根据极限定义，知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

方法 2 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有 $r\to 0$. 于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0 = f(0,0)$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(2) 若 $y=kx(k\neq 0)$，则

$$f(x,y) = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

因此，当动点 (x,y) 沿着直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于 $\frac{k}{1+k^2}$. 这说明当动点 (x,y) 沿着不同的直线趋于原点时，函数趋于不同的值. 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 故 $f(x,y)$ 于原点不连续.

习 题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$ (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ (4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

(5) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(6) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$　　(7) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. 已知 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

3. 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$. 如果当 $y=1$ 时，$z=x$. 试确定函数 $f(x)$ 和 $z=z(x,y)$.

4. 讨论下列函数的极限是否存在？若存在，求其极限值：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(xy)\ln(x^2+y^2)$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(1-x)y}{|x|+|y|}$　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

5. 设

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

(1) 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

(2) 证明 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在.

6. 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq0\\ 0, & y=0\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\leqslant1\\ 1, & x^2+y^2>1\end{cases}$