数学弹性力学

樊大钧 编著

SHUXUE TANXINGLIXUE

数学弹性力学

樊大钧 编著

新时代出版社

内容简介

本书以复变函数为工具研究弹性力学中的平面问题。书中简要介绍了复变函数理论和积分方程的部分内容，以及弹性力学基本方程和解法。对于半平面区域、圆域、同心圆环域、非同心圆环域、带状板、尖劈等问题，本书都作了讨论；书中阐述了某些形状的区域用保角变换和Gram-Schmidt正交化函数求解，以及多连通区的平面问题的近似解。书中还介绍了解析延拓在弹性力学中的应用，并讨论了应用复变函数论研究三维弹性力学的对称和非对称问题。

本书可供高等学校固体力学专业的教师、学生和力学工作者阅读，也可供有关的工程设计人员参考。

数学弹性力学

樊大钧　编著

新时代出版社 出版　新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　15.25 印张　390 千字

1983年7月第1版　1983年7月北京第1次印刷

印数：0,001—7,500册

统一书号：15241·17　　定价：2.25元

前　言

这本书是一本固体力学基础理论书。它以复变函数理论为重要工具，主要研究弹性力学中的平面问题，因为平面问题在工程中占一定的重要地位。Г. В. Колосов 和 Н. И. Мусхелишвили 提出的用复变函数理论研究弹性力学的方法，是本书讨论问题的基础。编者对一些基本问题力求作较深入的分析和必要的数学证明，基本方程的解法都给出例题，以求说明得更加具体。

为了阅读的方便，本书首先简要地介绍了复变函数理论和积分方程中的部分内容，以及弹性力学中的基本方程和解法，解的存在和唯一性，特别是解的形式和解的方程。书中着重介绍的内容有：

1．对半平面区域、圆域、同心圆环域、非同心圆环域、带状板、尖劈等问题的具体详细的讨论和举例；

2．对某些形状的区域用保角变换的方法和 Gram-Schmidt 正交化函数求解。正交化函数和保角变换函数可以用计算机得出精度相当高的近似结果，便于实际应用；

3．多连通区的平面问题的近似解；

4．解析延拓在弹性力学中的应用；

5．复变函数理论的一些内容在研究三维弹性力学的对称和非对称问题中的应用。

这本书是 60 年代末开始编写的，约在 70 年代完成草稿。在编写期间，编者得到同学和朋友们的许多鼓励和具体帮助。他们协助我收集资料，讨论编写内容，并帮助修改草稿。本书部分稿

件就是朋友帮助抄写的。没有他们的热情支持和帮助，这本书是编不出来的。在这里，谨向同学和朋友们表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中一定有许多不妥之处，甚至错误，殷切盼望读者批评指正。

樊大钧

1981年12月于北京

目 录

第一章　数学和弹性理论基础知识

§1　复变函数概要

1-1　复变函数的定义

设有一复数 $z=x+iy$ 的集合 g。对于集合 g 中的每一个复数 z 都有对应的复数值

$$w=u+iv \qquad (i=\sqrt{-1})$$

则称 w 是 z 的复变函数，记作

$$w=f(z)$$

如果 z 的一个值对应着一个 w 值，那么我们说函数 $f(z)$ 是单值函数；如果 z 的一个值对应着两个或两个以上的 w 值，我们就说函数 $f(z)$ 是多值函数。集合 g 称为 $f(z)$ 的定义集合。对应于 g 中所有 z 的一切 w 值所组成的集合 G，称为函数集合。

给定了一个复变函数，也就是说在点 (x,y) 与 (u,v) 之间给出了一个对应。因此，u 与 v 均随 x 与 y 而确定，也就是说给定了一个复变函数和两个实变函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

是等价的。而且

$$w=u(x,y)+iv(x,y)$$

复变对数函数 $w=\ln z$ 是多值的。为了便于了解，我们取 $z=re^{i\theta}$ 为例，则

$$\begin{aligned}\ln z&=\ln|z|+i(\theta+2k\pi)\\&=\ln r+i(\theta+2k\pi)\end{aligned} \tag{1-1-1}$$

方程(1-1-1)对于 z 的所有异于零的复数值定义了函数 $\ln z$。这个式子不仅对于正数，而且对于负数和复数都给出了对数的定义。在这个方程中包含有一个任意的整数 k。这就是说 $\ln z$ 是一个多值

函数。对于 k 的任一整数值，我们就得到函数 $\ln z$ 的一个分支。通常我们取 $k=0$ 的那一支叫做 $\ln z$ 的主值，并写为 $\ln z$。于是得到

$$\ln z=\ln r+i\theta \qquad (-\pi<\theta\leqslant\pi)$$

这里的 $\ln z$ 就是单值函数了。

1-2 区域和边界

满足下列条件的平面点集合 g 叫做区域，并以 B 表示。

a）g 中每一点 z_0 是一个圆的中心，这个圆（z_0 的一邻域）的内部属于 g（开集性）；

b）g 的任意两点可以用一条折线连起来，这条折线整个属于 g（连通性），见图1-1。

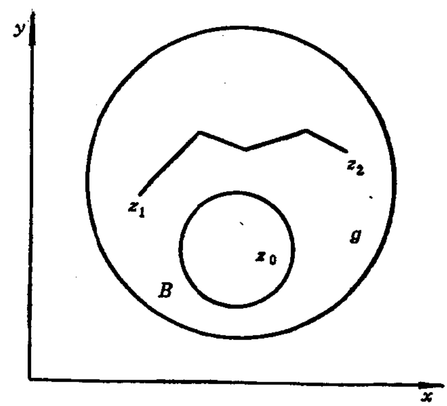

图 1-1

如果一个区域 B 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，那么 B 叫做有界的；否则叫做无界的。

对于平面内不属于区域 B 的点来说，可能有这样的点 A，在 A 的任意小的邻域内，总包含 B 中的点。我们把这种点 A 叫做区域 B 的边界点。B 的全部边界点构成一个点集 D，把 D 叫做 B 的边界。一个有界区域 B 加上它的边界 D，叫做闭域，写作 $\overline{B}=B+D$。

区域 B 的边界，可能是由 n 条曲线与一些孤立的点所组成。

在 a 和 b 之间，取一串数

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

$z = z(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续（图1-2）。设

$$z_j = z(t_j) \quad (j = 0, 1, 2 \cdots n)$$

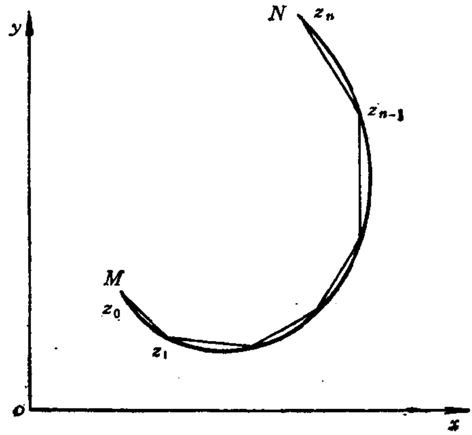

图 1-2

若连接这些点的折线的长度

$$L = \sum_{j=1}^{n} |z(t_j) - z(t_{j-1})|$$

对于所有数列（1-2-1）有上界，则 MN 弧叫做可度长的。此时，L 的上确界称为 MN 弧的长度。

由几段光滑弧所组成的曲线，称为逐段光滑的，并且是可度长的。

一条连续曲线 C：$z = z(t)$（$a \leqslant t \leqslant b$），如果 $z(a) = z(b)$ 且当 $t_1 \neq t_2$（除非 t_1 及 t_2 两值中一个是 a，另一个是 b）时，$z(t_1) \neq z(t_2)$，则此曲线称为简单闭曲线。

一个简单闭曲线将平面分为两个区域，其中一个是有界的，称为 C 的内部，另外一个是无界的，称为 C 的外部。沿简单闭曲线 C 逆时针方向前进，在前进方向的左侧是 C 的内部，在前进方向的右侧是 C 的外部。这个方向叫做沿 C 的正向。

一个区域B称为单连通的，如果凡属于B的简单闭曲线的内部（或外部）仍然属于B。如果一个区域不是单连通域，就叫做多连通的。

1-3 解析函数的概念

复变函数的导数与实变函数的导数是一样定义的。因此，关于实变函数的一系列微分公式与法则，可以完全照搬到复变函数上；不过现在指的是复变量，不是实变量。

值得指出的是，实变函数的可导性，要求当$x=x_0+\Delta x$由左右两方趋于点x_0时，增比$\Delta y/\Delta x$的极限都存在而且相等。复变函数的可导性，要求当点$z=z_0+\Delta z$在复平面上沿任意路径趋于点z_0时，增比$\Delta w/\Delta z$的极限都存在，而且这些极限都相等（图1-3）。

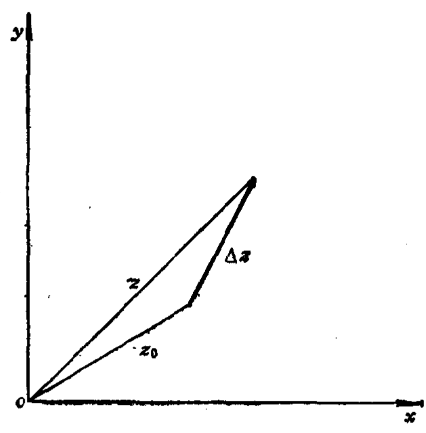

图 1-3

现在来讨论点z沿x轴的方向和沿y轴的方向趋于z_0的这两种情况（图1-4）。

在第一种情况下，由于$\Delta y=0$，故有$\Delta z=\Delta x$，而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

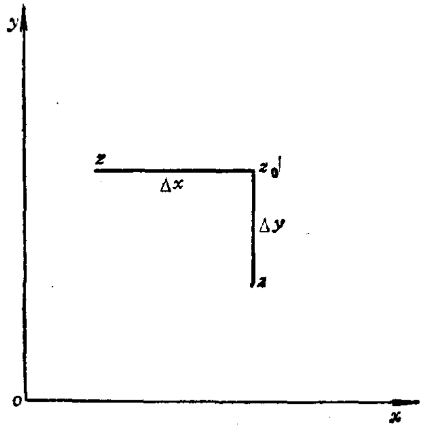

图 1-4

令 $\Delta x \to 0$，取极限时，则有

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

在第二种情况下，由于 $\Delta x = 0$，故有 $\Delta z = i\Delta y$，而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}$$

令 $\Delta y \to 0$，取极限时，则有

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

因此，若 $f'(z_0)$ 存在，则应有以下关系：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1-3-1}$$

这就是柯西—黎曼（Cauchy-Riemann）条件。

函数 $f(z)$ 在一区域 B 的每一点都可以求导时，我们称它为 B 上的解析函数。

我们讨论解析函数

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部 $u(x, y)$ 与虚部 $v(x, y)$，由于它们满足柯西—黎曼条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (1\text{-}3\text{-}2)'$$

这是平面上的拉普拉斯（Laplac）方程。这个方程的解为调和函数。

1-4 保角变换

函数 $w=f(z)$ 的定义集合是平面上的一个点集合，而把函数集合 G 看成是另一平面（w 平面）上的一个点集合，那么，$w=f(z)$ 在几何上就是把集合 g 变到集合 G 的一个变换（映射）。

设解析函数 $w=f(z)$ 把 z 平面上的点 z_0 变到 w 平面上的点 $w_0=f(z_0)$，把过点 z_0 的曲线 C 变到过点 w_0 的曲线 C_1。点 $z_0+\Delta z$ 为 C 上点 z_0 的邻近点，点 $w_0+\Delta w$ 则为 C_1 上点 w_0 的邻近点且为点 $z_0+\Delta z$ 的对应点。这时，Δz 为从点 z_0 到点 $z_0+\Delta z$ 的矢量，而 Δw 则为从点 w_0 到点 $w_0+\Delta w$ 的对应矢量（图 1-5)。由 $f(z)$ 的解析性可知，当 $\Delta z\to 0$ 时，有 $\Delta w\to 0$，而且 $\Delta w/\Delta z\to f'(z_0)$，不论曲线 C 如何选取，这都成立。取模则有

$$|\Delta w/\Delta z| \longrightarrow |f'(z_0)|$$

它表示在 w 平面上的线素与 z 平面上在所给点 z_0 的线素之比与从点 z_0 所引的曲线无关。

量 $|f'(z_0)|$ 代表 w 平面上的线素对于 z 平面上线素的倍数。因此，把它叫做变换的伸长系数。

又取幅角，我们有

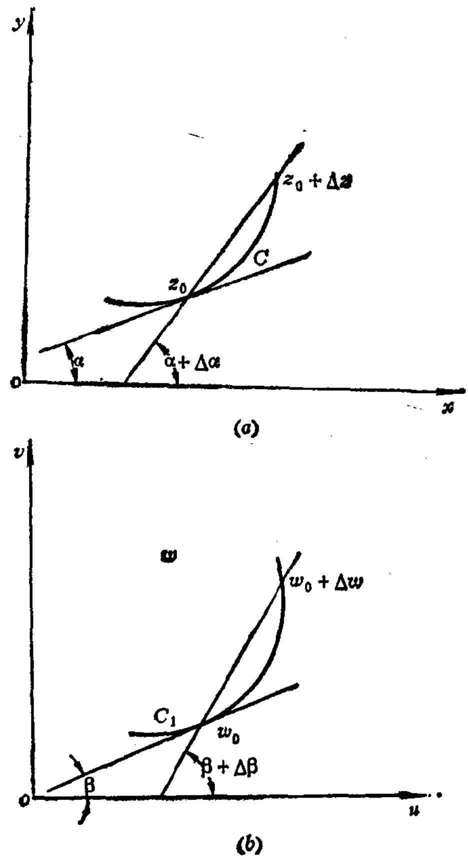

图 1-5

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}\longrightarrow \arg f'(z_0)$$

这里设 $f'(z_0)\neq 0$，否则无确定幅角。

因为商的幅角等于被除数的幅角减去除数的幅角，故有

$$\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg\Delta w-\arg\Delta z$$

$$\arg\Delta z=\alpha+\Delta\alpha$$

$$\arg\Delta w=\beta+\Delta\beta$$

当 $\Delta z\to 0$ 时，$\Delta\alpha\to 0$，$\Delta\beta\to 0$，所以

$$\arg \Delta z \to \alpha, \quad \arg \Delta w \to \beta$$

α，β 是曲线 C 与 C_1 在对应点的切线与实轴的交角。因此，有

$$\arg f'(z_0) = \beta - \alpha$$

它代表在 z 平面上过点 z_0 的任一条曲线的切线变到 w 平面上都转过同一个角度，这个角度的大小就是 $\arg f'(z_0)$。由于这个性质，我们把 $\arg f'(z_0)$ 叫做变换的旋转角。

由此可见，若 C_1 与 C_2 是从 z_0 出发的两条曲线，C_1' 与 C_2' 为从 w_0 出发的两条相应曲线，则 C_1' 与 C_2' 在 w_0 所成的交角必等于 C_1 与 C_2 在点 z_0 所成的交角。曲线的交角在这个变换下是不变的。

总之，当 $f'(z_0) \neq 0$ 时，解析函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 所实现的变换，是把点 z_0 处的所有线素皆按同一比例伸长，而且任二曲线间的交角保持不变。具有这种性质的变换叫做保角变换。解析函数所实现的变换在其导数不为零的一切点处都是保角的。

在导数为零的点处，保角性一般是要受到破坏的。导数为零的点叫做变换的驻点。

在实际计算中，常用分式线性变换和幂级数等表示变换函数。

1-5　复变函数积分的概念

复变函数沿曲线求积这一概念相当于实变函数的线积分的概念。

令设有从点 a 到点 b 的一条曲线 C 和一个复变函数 $f(z)$，此函数在包含 C 的一个域内有定义（图1-6）。

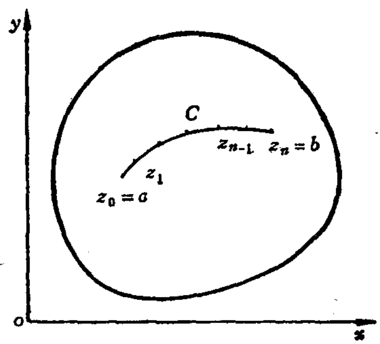

图 1-6

将曲线 C 用点

$$a = z_0,\ z_1,\ \cdots z_{n-1},\ z_n = b$$

分成若干小段，而且