

多抽样率信号处理

宗孔德

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书详细阐述了信号处理领域的多抽样率技术,共分七章。

第一、二章给出多抽样率技术中的几个基本概念;第三章介绍多抽样率技术中的等效变换;第四、五章介绍多抽样率系统的实现;第六章专门讨论滤波器组;第七章给出多抽样率技术的应用实例。

本书概念清楚、结构严谨、内容丰富、科学性强、语言流畅,适合于高等院校研究生及电类专业高年级学生作为多抽样率信号处理课程的教材或教学参考书。亦可供从事信号处理工作的技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

多抽样率信号处理/宗孔德. —北京:清华大学出版社,1996

ISBN 7-302-02151-1

I. 多… II. 宗… III. 数字信号-信号处理 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 08386 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

印刷者:北京市海淀区清华园印刷厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:18.5 字数:438 千字

版 次:1996 年 7 月第 1 版 1996 年 7 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-02151-1/TN·71

印 数:0001—3000

定 价:22.00 元

前 言

近十几年来在信号处理领域内多抽样率技术发展非常迅速。所谓多抽样率是指在一个系统中存在着两个或两个以上的抽样率。一个系统中为什么需要多个抽样率？这是因为利用多抽样率技术便于信号存储、传送、处理，可以减少工作量。随着信号处理技术的发展，工作中待处理的数据量越来越大，对处理速度的要求越来越高，多抽样率技术已渗入到各学科领域之中。

多抽样率技术最初用于抽样率的增高和降低、信号的分频带编码、数字音频技术和一个信道中的多路通信，后来发展到使用滤波器组准确地重建传输过来的信号，用于语音保密系统和图象数据压缩等方面，它还适用于时频表示方面，如短时傅里叶变换和子波变换等，它也用于自适应信号处理和抽样理论的进一步研究。多抽样率技术现在仍在迅速地发展着。但在基础理论方面已经达到了较为成熟的阶段，所以本书介绍有关多抽样率基础知识，供从事信号处理的工作者参考。

这本书是在为研究生教学过程中逐渐形成的，以数字信号处理作为先修课程，所以有关数字信号处理的内容就直接拿来使用。但为了照顾读者顺利地阅读，在讨论问题时尽量从一个较低的起点开始。

本书的第一、二两章是多抽样技术中的基本单元——抽取与零值内插（或称之为抽样率扩张单元）及分数倍抽取的内容。除了在概念上进行阐述以外，还从时域上和频域上导出其输入、输出关系。这些关系是以后讨论问题的基础。

第三章是多抽样率技术中的等效变换，其中有简单的恒等变换、可贵的等效变换（no-ble identities）、易位网络和多相分解。利用这些等效变换可以大大减少计算工作量。所以这些等效变换也是多抽样率技术的基础。

第四章和第五章是多抽样率系统的实现，包括直接实现、多相分解实现、时变网络实现和多级实现。这两章具体地讨论如何得到高效结构的问题。第五章讨论在高抽样率转换因子情况下出现的问题和解决的方法，其中提出了半带滤波器，它是解决多级实现所需要的，而在一般数字信号处理书籍中大多没有提到。

第六章专门讨论滤波器组。滤波器组在多抽样率技术中占有重要地位。很多问题的解决都要用它。滤波器组自80年代中期到现在一直是讨论的热点。在这一章里我们分析了无混迭正交镜像滤波器组的问题和准确重建的正交镜像滤波器组的问题。

第七章是多抽样率技术的一些应用的例子。我们只简单地说了4个例子，即多抽样率技术用于窄带滤波，用于差分抽样和不均匀抽样，用于多路通信，用于信号的时频表示（书中只涉及了短时傅里叶变换）。当然，这只是举例的性质而已，借以使读者了解多抽样率技术应用的广泛性。

多抽样率技术用于多维信号处理是近来发展很快的一个方面，多抽样率技术用于子波变换也是发展很快的一个方面……这些内容本书没有提及，感兴趣的读者可以查阅有

关书籍。

本书由杨福生教授对初稿进行了仔细的审阅并提出很多有益的建议和意见。谨在此表示诚挚的感谢。这本书是在清华大学研究生院、电机系和生物医学工程教研组大力支持下写成的,编写过程中得到许多同事们和同学们的关心和帮助,谨在此表示衷心的感谢。

限于作者水平,书中不妥和错误之处在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

1995 年 10 月

常用符号一览表

常用符号	含 义
$\downarrow D$	整数 D 倍抽取, $\downarrow$ 表示抽样率降低
$\uparrow I$	整数 I 倍零值内插, $\uparrow$ 表示抽样率增高, I 表示增高的倍数。即在两相邻抽样值之间插入 (I-1) 个零值点
f	频率, 是频率的真实值, 单位为 Hz
Ω	真实角频率, $\Omega = 2\pi f$ 。单位为 rad/s
T	抽样周期 (或称抽样时间间隔), 单位为 s
F	抽样率, 每秒抽样次数, $F = \frac{1}{T}$, 单位为 Hz
ω	归一化频率, $\omega = \Omega T = 2\pi f/F$, 单位为 rad
$x(nT)$	信号的抽样值, T 为其抽样周期, n 为抽样序号
$x(n_i T_i), i=1, 2, \dots$	同上, T_i 为抽样周期, n_i 为抽样序号
$h(n_i T_i), i=1, 2, \dots$	滤波器的冲激响应。 T_i, n_i 分别为抽样周期和抽样序号
$X(e^{j\omega_i}), i=1, 2, \dots$	$x(n_i T_i)$ 的傅里叶变换, $\omega_i = 2\pi f/F_i, F_i = \frac{1}{T_i}$
$X(z_i), i=1, 2, \dots$	$x(n_i T_i)$ 的 Z 变换, $z_i = z_i e^{j2\pi f/F_i} = z_i e^{j\omega_i}$
$H(e^{j\omega_i}), i=0, 1, 2, \dots$	频率响应, $\omega_i = 2\pi f/F_i, F_i = \frac{1}{T_i}$
$H(z_i), i=0, 1, 2, \dots$	转移函数
W_D, W	$W_D \stackrel{\text{def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{D}}$, 在不引起混淆的情况下, 可省去下标
$H(z)$	分析滤波器组的转移函数混迭分量矩阵
$H(z)$	分析滤波器组中滤波器的转移函数
$F(z)$	综合滤波器组中滤波器的转移函数
$E(z)$	分析滤波器组的多相分量矩阵 $E(z) \stackrel{\text{def}}{=} [E_{km}(z)]$
$R(z)$	综合滤波器组的多相分量矩阵 $R(z) \stackrel{\text{def}}{=} [R_{mk}(z)]$
$V^\dagger(z)$	$V(z)$ 为一非奇异矩阵, $\dagger$ 为取共轭并转置, 数学书中常写成 $\bar{V}'(z)$
$V^T(z)$	上标 T 为转置, $V^T(z)$ 为矩阵 $V(z)$ 的转置
$V^*(z)$	上标 * 为取共轭, $V^*(z)$ 为对矩阵 $V(z)$ 取共轭
$\tilde{V}(z)$	$V(z)$ 为一非奇异矩阵, $\tilde{V}(z) = V^T(z^{-1})$, 式中 T 为转置, 下标 * 为对系数取共轭及 $z^{-1} = \frac{1}{z}$
W	$W \stackrel{\text{def}}{=} [W_{km}] \quad k=0, 1, \dots, D-1, m=0, 1, \dots, D-1 \quad W_{km} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{D}km}$

目 录

第一章 整数倍抽取与整数倍内插	1
1.1 引言	1
1.2 整数倍抽取	1
1.3 整数倍内插	9
1.3.1 怎样进行整数倍内插	9
1.3.2 整数 I 倍内插的频域解释	10
1.3.3 内插器的输入、输出关系	13
1.4 整数倍抽取和内插的应用举例——数字音频系统	15
第二章 比值为有理数的抽样率转换	21
2.1 引言	21
2.2 用先内插后抽取的方法实现比值为有理数的抽样率转换	21
2.2.1 概念性的说明	21
2.2.2 数学表示形式	24
2.3 用 FIR 时变系统实现抽样率转换的时域分析	25
2.4 分数倍抽样率转换的应用举例	29
第三章 多抽样率系统中网络结构的等效变换	32
3.1 引言	32
3.2 网络结构的恒等变换	33
3.2.1 简单的恒等变换	33
3.2.2 LTI 系统的转移函数 $H(z)$ 与抽取(或零值内插)级联时的等效变换	34
3.2.3 既含抽取又含零值内插的等效变换	36
3.2.4 带有 $H(z)$ 、抽取和零值内插的系统等效问题	40
3.2.5 多抽样率系统中的易位(transposition)	41
3.3 多抽样率系统中的多相表示	47
3.4 离散时间线性时不变单一抽样率网络的易位	51
3.4.1 单一抽样率线性时不变网络中的一些符号和定义	51
3.4.2 离散时间线性时不变网络的 Tellegen 定理	53
3.4.3 两个信号流网络的交相互易性与交相互易定理	54
3.5 多抽样率线性时变(LTV)系统的性质	58
3.5.1 多抽样率 LTV 网络的系统响应和双频率系统函数	58
3.5.2 抽取器与零值内插器的输入、输出映射关系	59
3.5.3 LTV 系统中子系统级联及其位置的交换	62
3.6 多抽样率 LTV 系统中的 Tellegen 定理	67
3.6.1 一些符号和定义	67
3.6.2 Tellegen 定理的一种形式——广义易位网络的 Tellegen 定理	70
3.6.3 Tellegen 定理的另一种形式——Hermitian 易位网络的 Tellegen 定理	72

3.7	广义易位网络与广义易位定理	73
3.7.1	广义易位网络	73
3.7.2	广义易位定理	74
3.8	Hermitian 易位网络及 Hermitian 易位定理	76
3.8.1	Hermitian 易位网络的定义	76
3.8.2	Hermitian 易位定理	77
3.8.3	广义易位网络所遇到的矛盾和解决的方法	78
第四章	多抽样率 FIR 系统的网络结构	84
4.1	引言	84
4.2	多抽样率 FIR 系统的直接实现	84
4.2.1	整数倍抽取器 FIR 结构的直接实现	84
4.2.2	整数倍内插器 FIR 结构的直接实现	87
4.3	多抽样率系统的多相结构	89
4.3.1	整数倍内插器的多相结构	89
4.3.2	整数倍抽取器的多相结构	94
4.3.3	分数倍抽样率转换的多相结构	98
4.4	用易位网络实现多抽样率转换	106
4.5	实现抽样率转换的时变网络结构	108
4.5.1	分数倍抽样率转换器的时变网络结构	108
4.5.2	I 倍内插器的时变网络结构	110
4.5.3	D 倍抽取器的时变网络结构	111
第五章	抽样率转换器的多级实现	114
5.1	引言	114
5.1.1	什么是抽样率转换器的多级实现	114
5.1.2	为什么要使用多级实现	115
5.1.3	使用多级实现的途径	119
5.2	多级抽样率转换器(SRC)中滤波器的技术要求	119
5.2.1	多级 SRC 中第 i 级滤波器的技术要求	119
5.2.2	多级 SRC 中各级的每秒乘法次数和总存储量准则的确定	122
5.3	多级实现中寻找最优组合的设计方法	122
5.3.1	寻找最优组合的步骤	122
5.3.2	一个具体例子	123
5.3.3	过渡带内允许混迭情况下寻找最优组合	127
5.3.4	多级实现寻优方案中的 FIR 滤波器设计	128
5.4	使用多个二倍抽取(或内插)器级联实现高抽取(或内插)因子的转换	131
5.4.1	半带滤波器和它的特性	132
5.4.2	各级中半带滤波器的设计	134
5.4.3	使用半带滤波器实现 $D=2^k$ 的抽取系统	136
5.4.4	使用简单整数系数滤波器及多级半带滤波器级联实现高抽取因子抽样率转换系统	138
5.4.5	用一套特定的滤波器来实现多级抽样率转换系统	143
5.4.6	使用 IIR 数字滤波器实现最优化多级抽样率转换系统	146

5.5	用易位网络来实现高内插因子的抽样率转换器	147
5.6	小结	149
第六章	滤波器组	150
6.1	滤波器组的概念	150
6.1.1	分析滤波器组和综合滤波器组	150
6.1.2	滤波器组应用的例子	152
6.1.3	对滤波器组的进一步观察	154
6.2	均匀 DFT 滤波器组	157
6.2.1	均匀 DFT 分析滤波器组及其多相结构	158
6.2.2	均匀 DFT 综合滤波器组及其多相结构	162
6.3	D 通道、最大抽取、分析/综合正交镜像滤波器(QMF)组	165
6.3.1	什么是 QMF 组	165
6.3.2	D 通道 QMF 组的输入输出关系	166
6.3.3	D 通道 QMF 组中的误差来源及消除的途径	169
6.4	无混迭的二通道 QMF 组	170
6.4.1	二通道 QMF 组的输入输出关系	170
6.4.2	减小幅度失真的途径	172
6.4.3	如何实现无混迭的二通道 QMF 组	175
6.4.4	实现无混迭失真、无幅度失真的途径	176
6.5	能够进行准确重建的二通道 QMF 组	177
6.5.1	二通道 QMF 组中的转移矩阵及其变换	178
6.5.2	酉矩阵和仿酉矩阵	180
6.5.3	二通道 QMF 组中矩阵 $E(z)$ 的一般形式	183
6.5.4	$H_1(z_1)$, $F_0(z_1)$ 及 $F_1(z_1)$ 如何用 $H_0(z_1)$ 来表示	184
6.5.5	二通道 PR 系统中 QMF 组的格形结构	186
6.5.6	二通道 QMF 组 FIR PR 系统的设计步骤	193
6.6	D 通道、最大抽取、无混迭 QMF 组	200
6.6.1	循环矩阵和伪循环矩阵的介绍	201
6.6.2	D 通道 QMF 组的输入输出关系	202
6.6.3	D 通道 QMF 组无混迭的充分和必要条件	204
6.6.4	无混迭情况下 $P(z_2)$ 的一般形式	205
6.6.5	无混迭、D 通道 QMF 组的设计步骤	207
6.7	能够进行准确重建的 D 通道 QMF 组	209
6.7.1	基于旋转单元的 D 通道 PR QMF 组	210
6.7.2	基于 diadic 形式的 PR QMF 组的结构	213
6.8	树形结构 QMF 组	220
6.8.1	什么是树形结构 QMF 组	220
6.8.2	树形结构 QMF 组与平行结构 QMF 组的等效关系	222
6.8.3	树形结构 QMF 组的优点	224
6.9	小结	228
第七章	多抽样率技术及滤波器组的应用举例	235
7.1	多抽样率技术用于实现 FIR 数字滤波器	235

7.1.1	实现 FIR 低通数字滤波器	235
7.1.2	实现 FIR 带通数字滤波器	238
7.1.3	实现 FIR 带阻数字滤波器	242
7.1.4	实现 FIR 高通数字滤波器	244
7.2	多抽样率技术用于抽样定理	244
7.2.1	引言	244
7.2.2	离散序列的差分抽样及差分抽样定理	246
7.2.3	信号的不均匀抽样和不均匀抽样定理	249
7.3	多抽样率滤波器组与多路通信	255
7.3.1	时分通信中多抽样率技术的应用	256
7.3.2	频分通信中滤波器组的应用	260
7.3.3	TDM-FDM-TDM 系统的多相表示及其等效结构	263
7.4	离散时间短时傅里叶变换(STFT)与滤波器组	266
7.4.1	STFT 的定义和性质	266
7.4.2	研究 STFT 的两种观点	269
7.4.3	STFT 的逆变换与综合滤波器组	273
7.4.4	分析窗或分析滤波器的作用	274
参考文献		276
索引		283

第一章 整数倍抽取与整数倍内插

1.1 引言

在一个信号处理系统中有时需要不同的抽样率。这样做的目的有时是为了系统中各处需要不同的抽样率,以利于信号的处理、编码、传输和存储,有时则是为了节省计算工作量。

在抽样率满足抽样定理的前提下,从概念上讲,我们可以先将以某一抽样率 F_1 得到的抽样信号经过数模转换器(D/A C)变成模拟信号(即连续时间信号),然后再经过模数转换器(A/D C)用另一个抽样率 F_2 进行抽样,这样就可以改变抽样率。上述步骤可用图 1.1.1 表示。但是实际上改变抽样率并不一定需要先变成模拟信号再进行另一次不同抽样率的抽样,而是以简单得多的数字处理方法完成抽样率的转换。

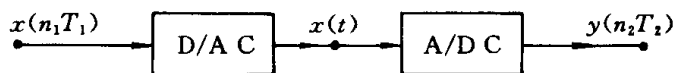


图 1.1.1 用 D/A C 和 A/D C 完成抽样率的转换

使抽样率降低的抽样率转换称为抽取,亦称抽样率压缩。使抽样率升高的抽样率转换称为内插,亦称抽样率扩张。抽取和内插有时是整数倍的,有时是有理分数倍的。抽取和内插是多抽样率信号处理中的基本环节,对它们应有清楚的理解。

本章讨论整数倍的抽取和内插。讨论抽取和内插既要研究时域中的作法也要研究频域和复频域中的结果,这样才能了解抽取和内插的全貌。

1.2 整数倍抽取

当信号的抽样数据量太大时,为了减少数据量以便于处理和计算,我们把抽样数据每隔 $D-1$ 个取一个,这里 D 是一个整数。这样的抽取称为整倍数抽取, D 称为抽取因子。例如一个序列 $x(n_1 T_1)$,其抽样周期(或称抽样时间间隔)为 T_1 ,单位为秒,相应的抽样率 $F_1 = \frac{1}{T_1}$,单位为赫。进行整数倍抽取后所得的新序列为 $y(n_2 T_2)$ 。 $y(n_2 T_2)$ 的抽样周期为 T_2 ,抽样率为 $F_2 = \frac{1}{T_2}$,由于每隔 D 个 T_1 抽取一个数据,所以

$$T_2 = D T_1 \quad (1.2.1)$$

这个系统可用图 1.2.1(a)表示。它表示序列 $x(n_1 T_1)$ 经过抽取得出 $y(n_2 T_2)$ 。如果用符号表示则如图 1.2.1(b)所示。图中 $\downarrow D$ 表示抽样率降低为原来的 $1/D$, D 为 Decimation 的第一个字母,表示抽取。图中的(c)和(d)分别表示 $x(n_1 T_1)$ 和 $y(n_2 T_2)$ 序列。其中 n_1 和 n_2

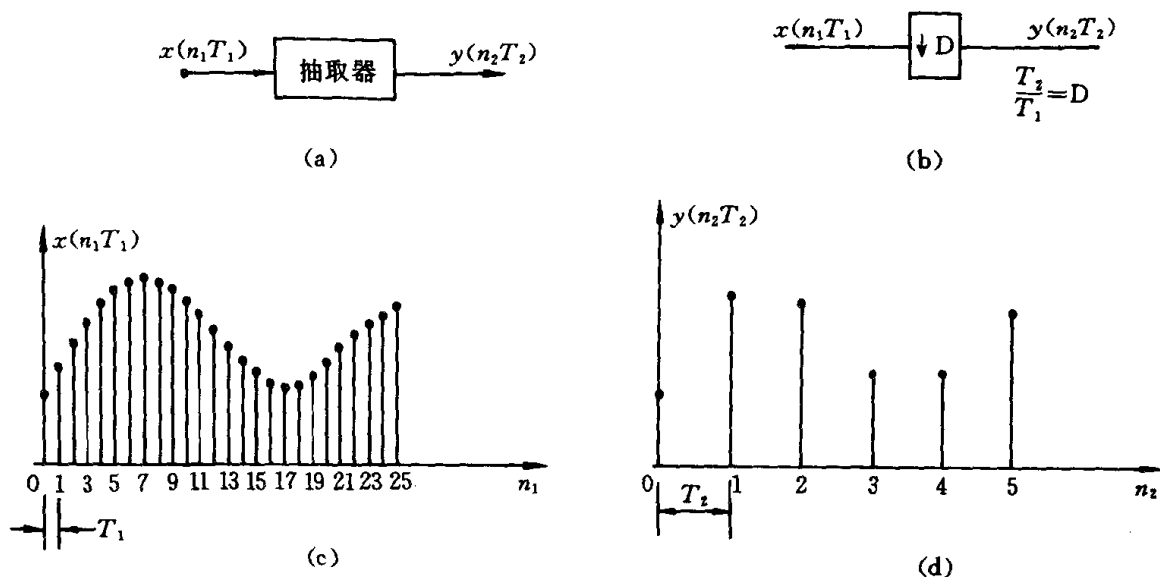


图 1.2.1 数字信号的抽取

分别为 $x(n_1T_1)$ 和 $y(n_2T_2)$ 序列的序号, 于是有

$$y(n_2T_2) = x(n_2DT_1) \quad (1.2.2)$$

当 $n_1 = n_2D$ 时, $y(n_2T_2) = x(n_1T_1)$ 。

以上是在时域中讨论整数倍抽取是怎样进行的。抽取看起来好像极为简单, 只要每隔 $D-1$ 个抽样抽取一个就行了。其实问题并不如此简单, 因为如果 $x(n_1T_1)$ 是模拟信号 $x(t)$ 的抽样信号, 则 $x(t)$ 与 $x(n_1T_1)$ 的傅里叶变换 $X(j\Omega)$ 与 $X(e^{j\Omega T_1})$ 将分别是

$$X(j\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1.2.3)$$

及

$$X(e^{j\Omega T_1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} x(n_1T_1)e^{-j\Omega T_1 n_1} \quad (1.2.4)$$

而 $X(e^{j\Omega T_1})$ 与 $X(j\Omega)$ 的关系是

$$X(e^{j\Omega T_1}) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T_1}\right) \quad (1.2.5)$$

式中 $\Omega = 2\pi f$, f 为频率变量, 单位为赫。

如果定义

$$\omega_1 = \Omega T_1 = 2\pi(f/F_1) \quad (1.2.6)$$

则(1.2.5)式可写成

$$X(e^{j\omega_1}) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega - jk\Omega_{s1}) \quad (1.2.7)$$

式中 ω_1 称为归一化角频率, 单位为弧度; $\Omega_{s1} = \frac{2\pi}{T_1}$, 单位为弧度/秒。

因为我们这里讨论的是 $x(t)$ 为一般的非周期连续时间函数, 所以 $X(j\Omega)$ 是连续频率的非周期函数。抽样后 $x(t)$ 变为 $x(n_1T_1)$ 其傅里叶变换 $X(e^{j\omega_1})$ 为连续频率的周期函数。在

满足抽样定理的条件下, $X(e^{j\omega_1})$ 的频谱在 $-\frac{\Omega_{sa1}}{2}$ 到 $+\frac{\Omega_{sa1}}{2}$ 范围内与 $X(j\Omega)$ 相似(差一个比例常数 $\frac{1}{T_1}$), 并且没有混迭现象, 如图 1.2.2(b) 所示。但是如果将抽样率降低 D 倍, 即 T_2

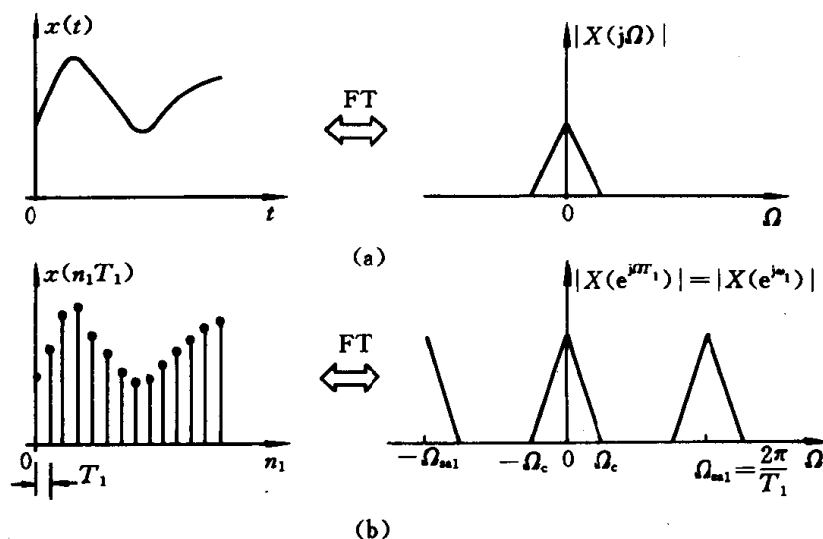


图 1.2.2 $x(t)$, $x(n_1T_1)$ 和它们的傅里叶变换 $X(j\Omega)$, $X(e^{j\omega_1})$

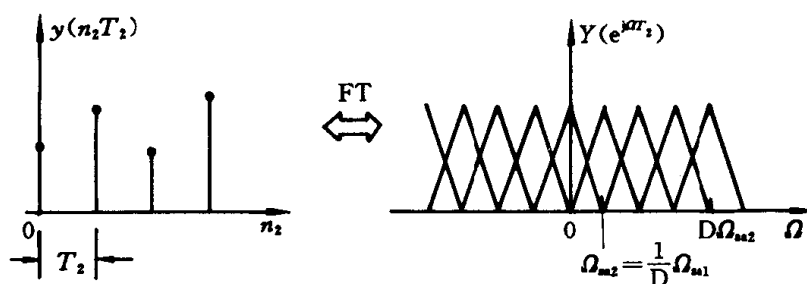


图 1.2.3 抽取后的信号 $y(n_2T_2)$ 及其傅里叶变换 $Y(e^{j\omega_2})$

$=DT_1$, 比如说 $D=4$, 得到 $y(n_2T_2)$, 则频域中的情况将如图 1.2.3 所示。图中 $y(n_2T_2)$ 为对 $x(n_1T_1)$ 抽取的结果, $Y(e^{j\omega_2})$ 为 $y(n_2T_2)$ 的傅里叶变换。 $Y(e^{j\omega_2})$ 的周期 $\Omega_{sa2} = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{DT_1} = \frac{1}{D}\Omega_{sa1}$ 。这就是说 $Y(e^{j\omega_2})$ 的周期是 $X(e^{j\omega_1})$ 周期的 $\frac{1}{D}$ 。 $Y(e^{j\omega_2})$ 中的 $\omega_2 = \Omega T_2 = \Omega T_1 D = \omega_1 D$ 。从图 1.2.3 中可以看出 $Y(e^{j\omega_2})$ 是有混迭的。这样就无法从 $y(n_2T_2)$ 中恢复出 $x(n_1T_1)$ 来。所以随意对 $x(n_1T_1)$ 进行抽取是不行的。只有在抽取之后的抽样率仍然符合抽样定理的要求时才能恢复出原来的信号 $x(t)$ 来, 否则就必须另外采取措施。通常采取的措施是抗混迭滤波。所谓抗混迭滤波就是在抽取之前, 对信号进行低通滤波, 把信号的频带限制在 $\frac{\Omega_{sa2}}{2}$ 以下。这时的抽取系统框图应如图 1.2.4 所示。图中 $h(n_1T_1)$ 为抗混迭滤波器, 它的输出 $v(n_1T_1)$ 的最高频率已被 $h(n_1T_1)$ 限制在 $\left| \frac{\Omega_{sa2}}{2} \right| \left(= \frac{\Omega_{sa1}}{2D} \right)$ 以下。图 1.2.4 中各点的信号

在时域和频域中的示意图如图 1.2.5 所示。这种方法虽然把 $x(n_1T_1)$ 中的高频部分损失掉了,但由于抽取后避免了混迭,所以在 $Y(e^{j\omega_2})$ 中仍然完好地保留了 $X(e^{j\omega_1})$ 中的低频部分。在信号恢复时可以从 $Y(e^{j\omega_2})$ 中恢复出 $X(e^{j\omega_1})$ 的低频部分。

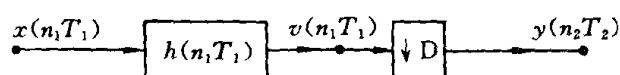


图 1.2.4 带有抗混迭滤波器的抽取器框图

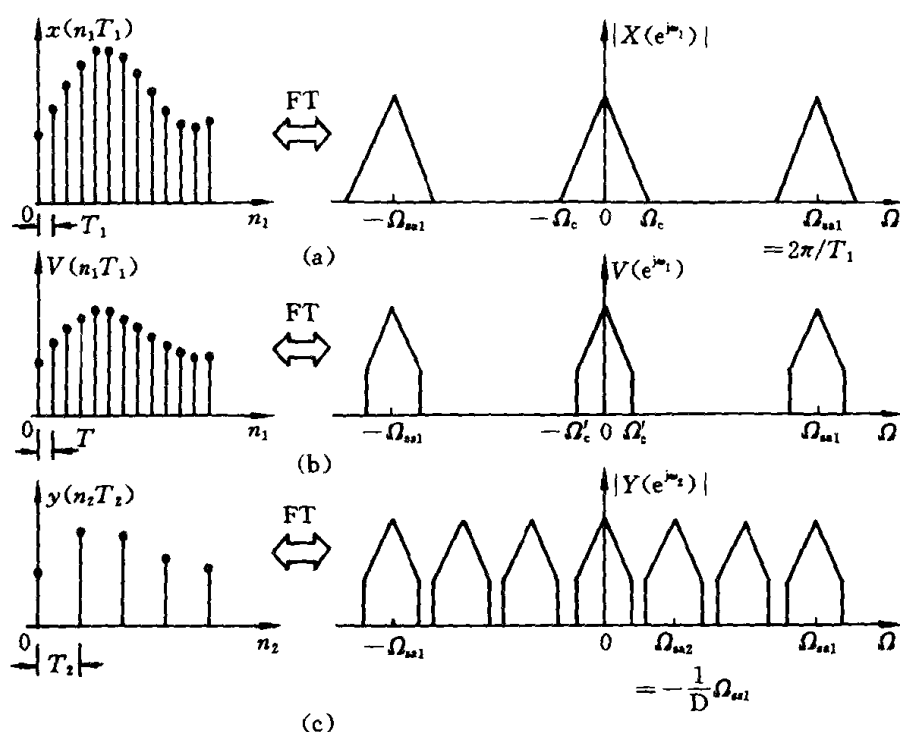


图 1.2.5 信号在抽取前、后的时域和频域示意图

为了进一步搞清 $x(n_1T_1)$ 经 $\downarrow D$ 前后的频谱关系,我们采取如下的频域分析。
图 1.2.6(a) 所示的直接抽取系统对我们进行频域分析是不方便的。因此,我们把(a)

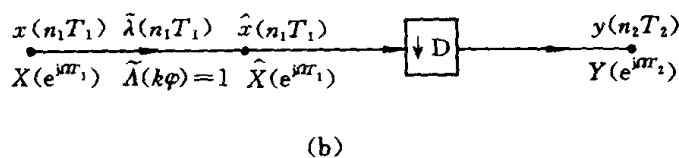
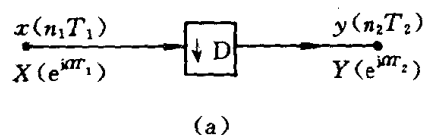


图 1.2.6 数字信号的直接抽取及其等效框图

中的系统等效为(b)中的样子,即,先令 $x(n_1T_1)$ 乘以一个周期序列 $\tilde{\lambda}(n_1T_1)$, $\tilde{\lambda}(n_1T_1)$ 的定义如下

$$\tilde{\lambda}(n_1T_1) = \begin{cases} 1, & \text{当 } n_1 = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1.2.8)$$

令 $x(n_1T_1)$ 与 $\tilde{\lambda}(n_1T_1)$ 的乘积用 $\hat{x}(n_1T_1)$ 表示,即

$$\hat{x}(n_1T_1) = \tilde{\lambda}(n_1T_1) \cdot x(n_1T_1) \quad (1.2.9)$$

由于 $\tilde{\lambda}(n_1T_1)$ 的离散傅里叶级数(DFS) $\tilde{\Lambda}(k\varphi)$ 为

$$\tilde{\Lambda}(k\varphi) = \sum_{n_1=0}^{D-1} \tilde{\lambda}(n_1T_1) e^{-j\frac{2\pi}{D}kn_1}, 0 \leq k \leq D-1 \quad (1.2.10)$$

式中 $\varphi = \frac{2\pi}{DT_1}$ 及 $\tilde{\Lambda}(k\varphi)$ 的周期为 $D\varphi$ 。

从(1.2.8)和(1.2.10)式可得

$$\tilde{\Lambda}(k\varphi) = 1$$

于是

$$\tilde{\lambda}(n_1T_1) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}kn_1} \quad (1.2.11)$$

将 $\tilde{\lambda}(n_1T_1)$ 代入(1.2.9)式,有

$$\hat{x}(n_1T_1) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} x(n_1T_1) e^{j\frac{2\pi}{D}kn_1} \quad (1.2.12)$$

对 $\hat{x}(n_1T_1)$ 进行抽取,每隔 $(D-1)$ 个点取一个抽样值,即所取的抽样点都在 $\tilde{\lambda}(n_1T_1)$ 为 1 的点上。把这样抽取的结果作为 $y(n_2T_2)$ 。这样得到的结果和直接对 $x(n_1T_1)$ 进行抽取所得的结果是等效的。如图 1.2.7 所示(图中 $D=4$)。

为了求 $Y(e^{j\omega_2})$ 与 $X(e^{j\omega_1})$ 的关系,或者说把 $Y(e^{j\omega_2})$ 用 $X(e^{j\omega_1})$ 来表示,可作如下推导:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega_2}) &= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} y(n_2T_2) e^{-j\omega_2 n_2} \\ &= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} y(n_2DT_1) e^{-j\omega_2 n_2} \end{aligned}$$

当 $n_2D=n_1$ 时, $y(n_2DT_1) = \hat{x}(n_1T_1)$ 而当 $n_2D \neq n_1$ 时, $\hat{x}(n_1T_1) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega_2}) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n_1T_1) e^{-j\omega_1 n_1} \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} x(n_1T_1) e^{j\frac{2\pi}{D}kn_1} \right] e^{-j\omega_1 n_1} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j\omega_1} e^{-j\frac{2\pi k}{D}}) \end{aligned} \quad (1.2.13 a)$$

令 $W \stackrel{\text{def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{D}}$, 则

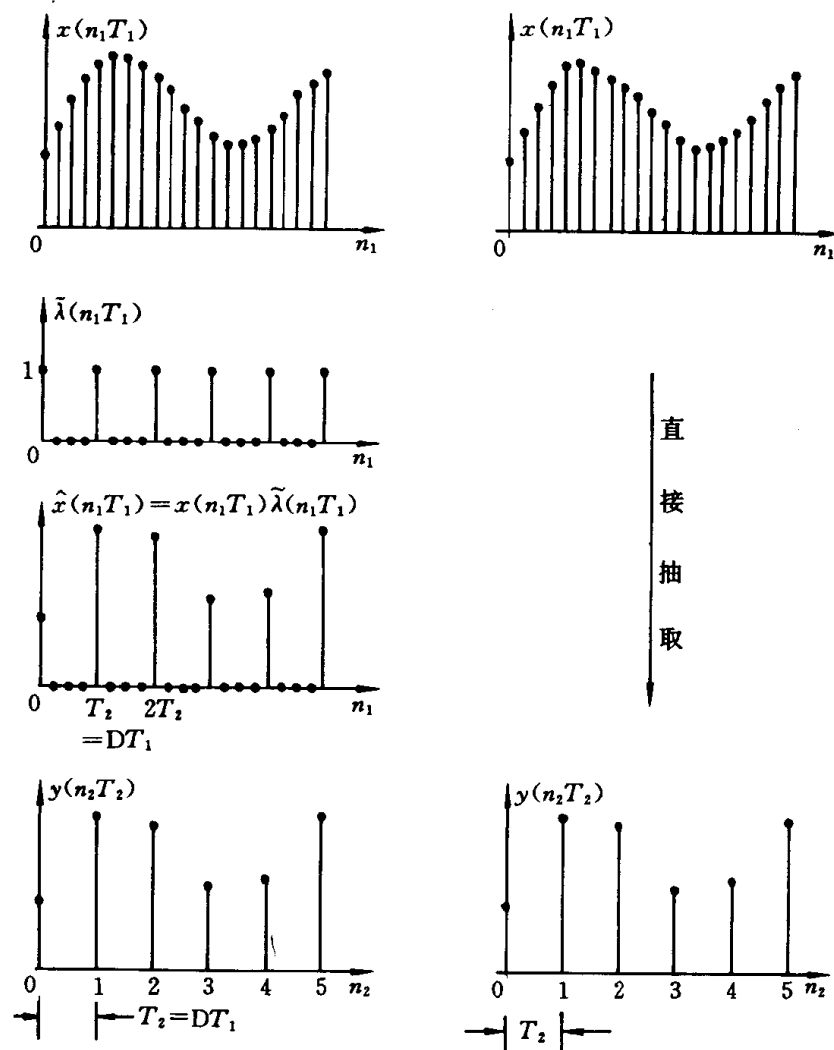


图 1.2.7 对 $x(n_1T_1)$ 的直接抽取和等效抽取

$$Y(e^{j\omega_2}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j\omega_1} W^k) \quad (1.2.13b)$$

如果令 $z_2 \stackrel{\text{def}}{=} e^{j\omega_2}$, $z_1 \stackrel{\text{def}}{=} e^{j\omega_1}$, 则

$$Y(z_2) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z_1 W^k) \quad (1.2.13c)$$

式中 $z_1 = e^{j\omega_1} = e^{j\Omega T_1} = e^{j\Omega T_2/D} = z_2^{1/D}$ 。

(1.2.13) 式就是 $Y(e^{j\omega_2})$ 与 $X(e^{j\omega_1})$ 的关系。可以看出, $Y(e^{j\omega_2})$ 是 $X(e^{j\omega_1})$ 的频谱混迭样本。这是由于 (1.2.13a) 式中求和号里的成分为 $X(e^{j\omega_1})$, $X[e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{D})}]$, $X[e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{D} \times 2)}]$, ..., 相邻的成分在频率轴(横轴)上相差 $2\pi/D$, 而 $Y(e^{j\omega_2})$ 则是这些平移样本之和。

为了更清楚地说明上述结论, 我们把上述经由 $\hat{x}(n_1T_1)$ 求得 $y(n_2T_2)$ 的频谱的过程用图 1.2.8 和图 1.2.9 表示出来。图 1.2.8 所示为抽取后产生混迭的情况, 即 $X(e^{j\Omega T_1})$ 中的最高频率 $\Omega_c > \frac{1}{2} \frac{1}{D} \Omega_{sa1} = \frac{1}{2} \Omega_{sa2}$ 。这里 Ω_{sa1} 为 $X(e^{j\Omega T_1})$ 的周期, Ω_{sa2} 为 $Y(e^{j\Omega T_2})$ 的周期。图

1.2.9 所示为抽取后不产生混迭的情况,即 $X(e^{j\omega T_1})$ 中的最高频率 $\Omega_c < \frac{1}{2} \frac{\Omega_{sa1}}{D} = \frac{1}{2} \Omega_{sa2}$ 。

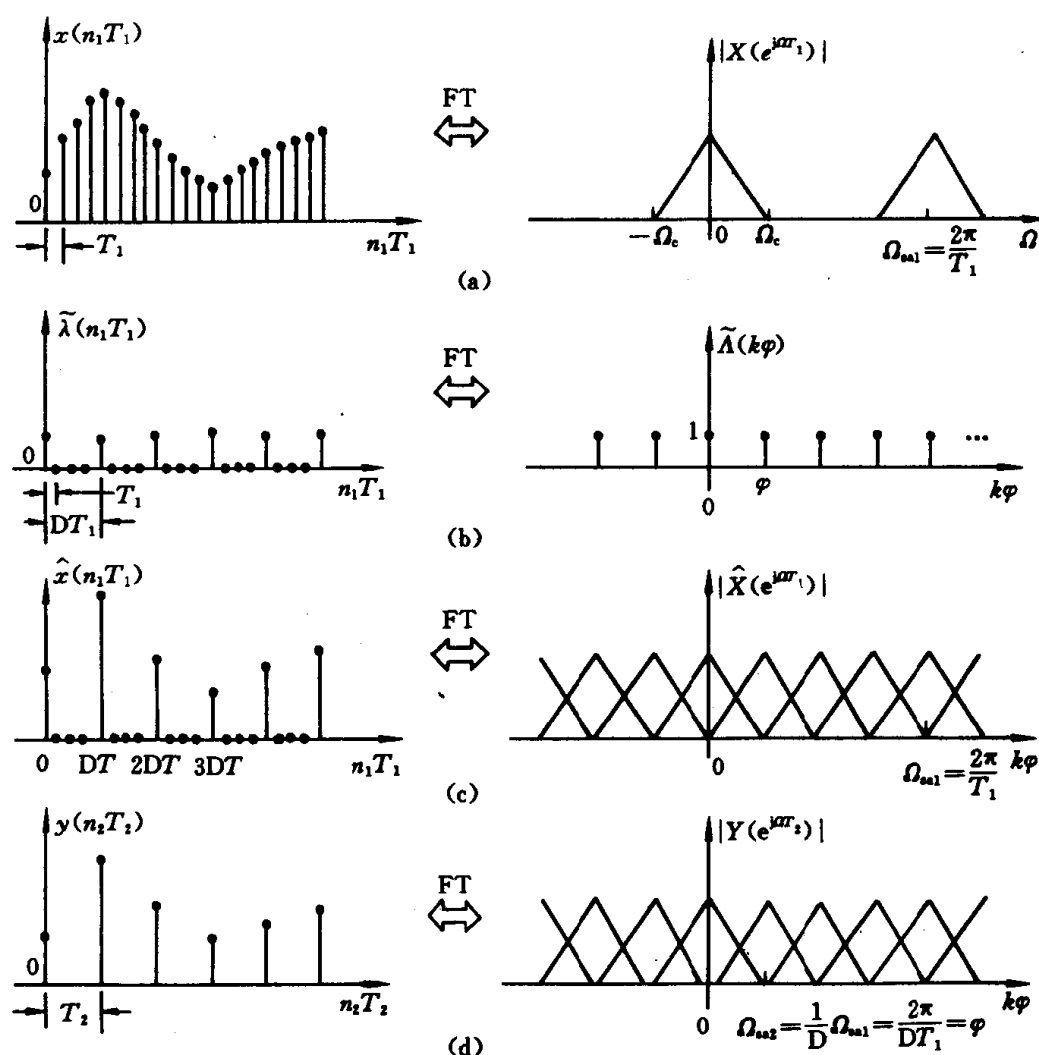


图 1.2.8 在 $\Omega_c > \frac{1}{2} \Omega_{sa2}$ 的条件下,抽取前后信号的时域和频域情况

为了在复频域(或称变换域)中导出(1.2.13c)式,我们也可以直接对 $y(n_2T_2)$ 求 Z 变换,即

$$Y(z_2) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} y(n_2T_2) z_2^{-n_2} \quad (1.2.14)$$

式中

$$z_2 = e^{\sigma_2 + j\omega_2}.$$

将(1.2.12)式代入上述关系式,并使用 $n_2 = n_1/D$, 则有

$$\begin{aligned} Y(z_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} x(n_1T_1) e^{j\frac{2\pi}{D}kn_1} z_2^{-(n_1/D)} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} x(n_1T_1) (z_2^{1/D} W^k)^{-n_1} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z_2^{1/D} W^k) \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

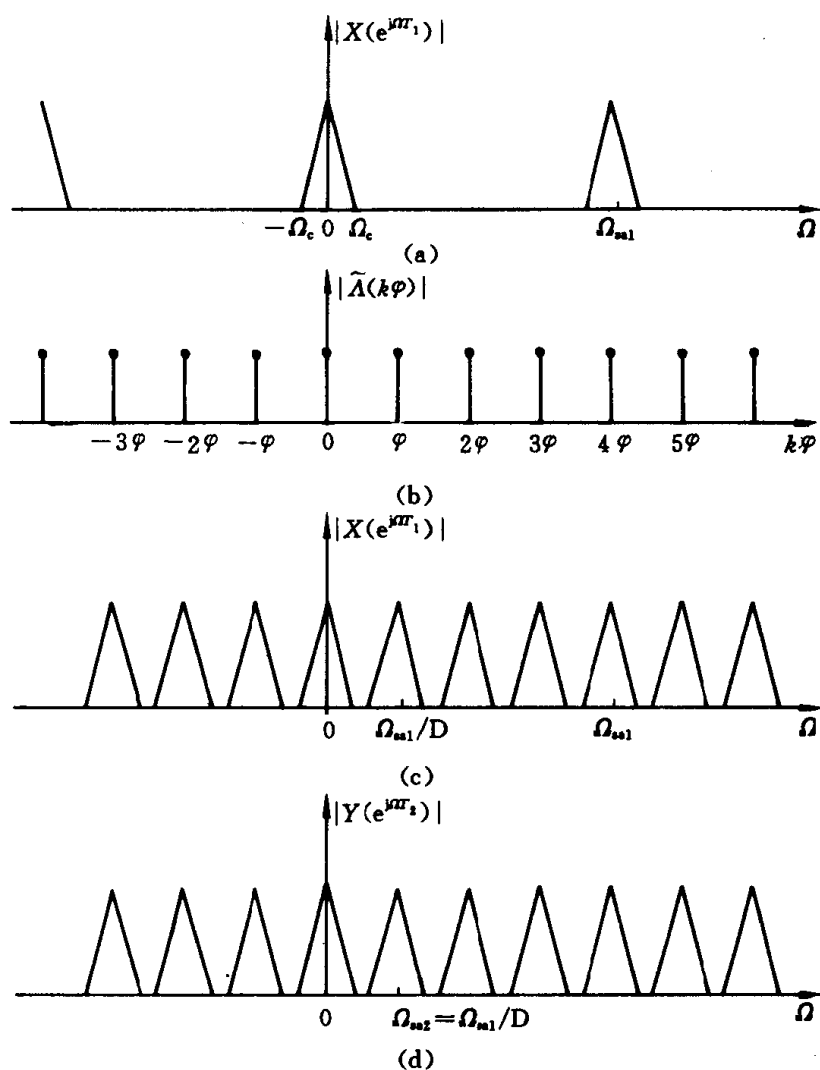


图 1.2.9 在 $\Omega_c < \frac{1}{2}\Omega_{s2}$ 的条件下,抽取前后信号的时域和频域情况

式中 $W \stackrel{\text{def}}{=} e^{-j\frac{2\pi}{D}}$ 。

当 $\sigma_2 = 0$, 或 $\sigma_2 = \sigma_1 D$ 时, $z_2 = e^{(\sigma_2 + j\omega_2)} = e^{\sigma_1 D} e^{j\omega_1 D} = z_1^D$, 这里 $z_1 \stackrel{\text{def}}{=} e^{(\sigma_1 + j\omega_1)}$ 。于是(1.2.15)式变为

$$Y(z_2) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z_1 W^k) \quad (1.2.16)$$

(1.2.16)式就是前面给出的(1.2.13c)式。(1.2.15)式是一个常用的形式,其中 z_2 的下标常被省去,写成

$$Y(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z^{\frac{1}{D}} W^k) \quad (1.2.17)$$

例题 一整数倍抽取系统如图 1.2.10 所示,试求其输出。

[解] 设输入序列 $x(n_1 T_1)$ 是已知的,且设抽取后信号的抽样率仍大于 Nyquist 频率。

图中

$$\begin{aligned} x_0(n_1 T_1) &= x(n_1 T_1) \\ x_1(n_1 T_1) &= x[(n_1 - 1)T_1] \end{aligned}$$