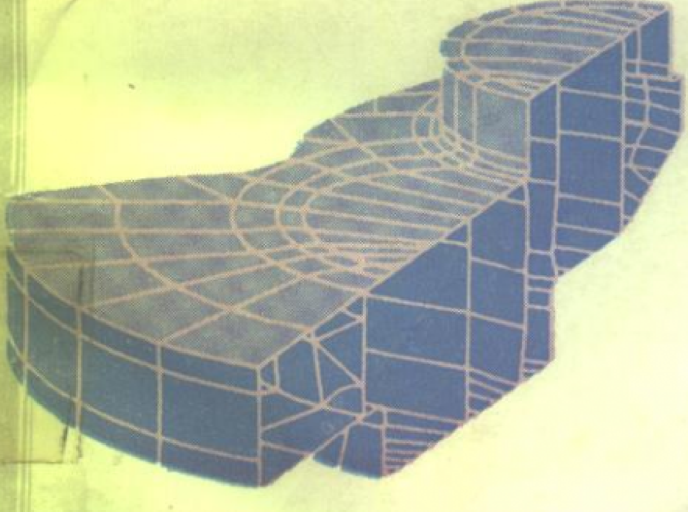
工程中边界元法及其应用

孙炳楠　项玉寅　张永元 编



浙江大学出版社

工程中边界元法及其应用

孙炳楠 项玉寅 张永元 编

浙 江 大 学 出 版 社

前　　言

近十多年中，边界单元法(Boundary Element Method)在国内和国际上受到了广泛的重视，发展很快。其原因是边界单元法与“区域型”求解方法（如差分法和有限元法等）相比较，具有许多优点，主要是：

(1) 由于该方法只是将结构的边界进行离散，降低了维数，使得计算时的准备工作大大简化，输入数据量很少，所占计算机的内存小，计算机时省；

(2) 能较好地处理应力集中区域、无限区域或半无限区域问题，求解精度高；

(3) 该方法能与有限元法、差分法等其他数值方法耦合求解，较好地解决工程实际问题。

因此，边界单元法已在各个工程领域中获得广泛应用，特别是土木结构应力分析；机械构件静动态分析；流体力学研究；电磁工程；地质和采矿等领域中，已有大量的应用实例。

由于边界单元法的优越性与实用性，它已日益成为机械、土建、结构、力学、电磁、化工等专业的学生和工程技术人员必须掌握的一种方法和知识。从1986年以来，我们为有关专业的本科生和研究生开设了“工程中边界单元法及其应用”课程，同时编写成了讲义，以后又经过多次的教学实践，修改写成本书。在内容上，本书提供了比较系统完整的方法和理论，分析深入浅出，既可作为边界元法自学入门的读物，也能为今

后进一步深入研究奠定基础。在书中给出了较多的应用实例，以便读者能很快地掌握该方法并应用到工程实际中去。书中每章最后还引证了大量的参考文献，为读者进一步的研究和探讨提供了方便。本书汇集了我们多年来在边界单元法领域内的研究成果，具有较好的参考价值。本书可作为土木、机械、力学、化工等各类专业的本科生和研究生的教学用书，以及有关工程技术人员的参考书。

本书共分 8 章。第 1 章“基础知识”，提供边界单元法学习的必备基础知识；第 2 章“势问题的边界元法”和第 3 章“弹性力学的边界元法”是本课的基本内容之一；第 4 章“时间相关的弹性力学边界元法”和第 5 章“弹塑性力学边界元法”为读者提供了一些较深层次的知识，1～5 章由孙炳楠编写；第 6 章“板壳结构边界元法”提供了边界单元法在结构分析中应用的基础；第 7 章“边界单元法与其他方法的耦合”详细地讨论了边界元法与有限元法的耦合理论，并提供了一些近似方法，这 2 章由项玉寅编写；第 8 章“边界单元法在断裂力学问题中的应用”由上海交通大学张永元教授编写。全书由浙江大学土木系唐锦春教授细致审阅，提出了很多宝贵的修改意见，我们在此一并表示感谢。

由于编者学识浅薄，书中不免有错误和不妥之处，我们热忱期望读者批评指正。

编　者

1990年9月

目　　录

第一章　基础知识

§1.1　高斯定理

如图1.1所示，三维空间的区域用V表示，其表面积用S表示，表面的单位法线用n表示。对于在V和S上定义的可微函数ϕ，高斯-格林公式可表示如下：

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathrm{d}v = \int_S \phi n_i \mathrm{d}s \qquad (i=1,2,3) \qquad (1.1)$$

式中，$\mathrm{d}v$为体积微元，$\mathrm{d}s$为面积微元，n_i是单位外法线n的分量，即方向余弦。公式（1.1）就是关于函数ϕ的面积分和体积分之间的变换公式。

对于二维问题，如图1.2所示，高斯-格林公式为：

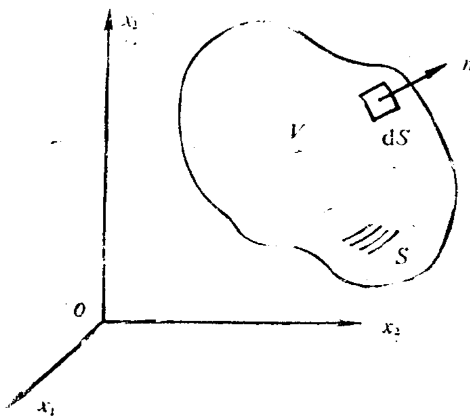


图1.1　三维物体示意图

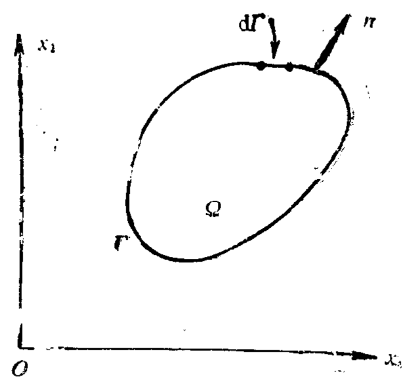


图1.2　二维物体示意图

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\phi n_i\,\mathrm{d}\Gamma\qquad(i=1,2)\tag{1.2}$$

式中，$\mathrm{d}\Omega$表示面积微元，$\mathrm{d}\Gamma$表示线微元，n_i 为方向余弦，且有：

$$n_1=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\Gamma};\qquad n_2=-\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\Gamma}\tag{1.3}$$

公式（1.2）就是关于函数ϕ的线积分和面积分之间的变换公式。

为了简便起见，我们以二维问题为例进行证明。区域Ω在x_1坐标的区间[a，b]内，将边界分成二部份Γ_1和Γ_2（见图1.3），公式（1.2）的左边可以计算如下：

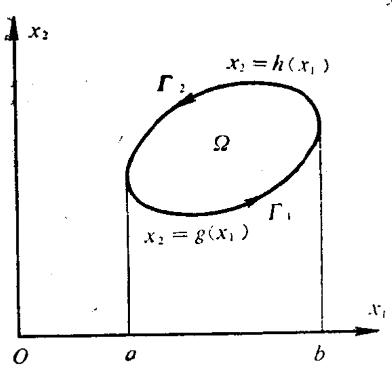


图1.3 [a，b]区间内的边界线Γ_1和Γ_2

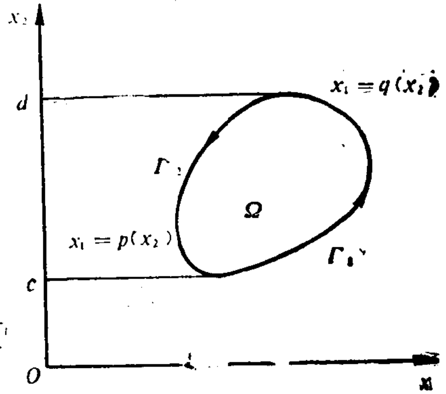


图1.4 [c，d]区间内的边界线Γ_1和Γ_2

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\,\mathrm{d}\Omega=\int_a^b\left[\int_{g(x_1)}^{h(x_1)}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1$$

$$=\underset{(\Gamma_2)}{\int_a^b\phi[x_1,h(x_1)]\mathrm{d}x_1}-\underset{(\Gamma_1)}{\int_a^b\phi[(x_1,g(x_1)]\mathrm{d}x_1}$$

$$= -\left\{\underset{(\Gamma_1)}{\int_a^b} \phi[x_1, g(x_1)]\mathrm{d}x_1 + \underset{(\Gamma_2)}{\int_b^a} \phi[x_1, h(x_1)]\mathrm{d}x_1\right\}$$

$$= -\int_\Gamma \phi \mathrm{d}x_1 = \int_\Gamma \phi n_2 \mathrm{d}\Gamma \tag{1.4}$$

即 $$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \phi n_2 \mathrm{d}\Gamma \tag{1.5}$$

同理 $$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \phi n_1 \mathrm{d}\Gamma \tag{1.6}$$

将式（1.5）和式（1.6）相加，得

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma (\phi n_1 + \phi n_2)\mathrm{d}\Gamma \tag{1.7}$$

将式（1.5）中的ϕ改成ϕ_2，将式（1.6）中的ϕ改成ϕ_1，然后相加，可得高斯积分定理：

$$\int_\Omega \phi_{i,i} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \phi_i n_i \mathrm{d}\Gamma \tag{1.8}$$

对于三维空间，可写成：

$$\int_V \phi_{i,i} \mathrm{d}v = \int_S \phi_i n_i \mathrm{d}s \tag{1.9}$$

根据散度定理有：

$$\mathrm{div}\,\overline{\phi} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = \phi_{i,i}$$

由式（1.9）可证得：

$$\int_V \mathrm{div}\,\overline{\phi}\,\mathrm{d}v = \int_S \overline{\phi}\,\overline{n}\,\mathrm{d}s \tag{1.10}$$

对于二维问题，也有类似的关系式：

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\overline{\phi}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \overline{\phi}\,\overline{n}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{1.11}$$

式（1.10）和（1.11）称为高斯发散定理。

§1.2 格林公式

根据高斯发散定理，在式（1.10）中，用$\psi\nabla\phi$代替$\vec{\phi}$，可得格林第一公式：

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}v=\int_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{1.12}$$

式中 $$\nabla(\quad)=\vec{i}\frac{\partial(\ )}{\partial x_1}+\vec{j}\frac{\partial(\ )}{\partial x_2}+\vec{k}\frac{\partial(\ )}{\partial x_3} \tag{1.13}$$

$$\nabla^2(\quad)=\frac{\partial^2(\ )}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2(\ )}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2(\ )}{\partial x_3^2} \tag{1.14}$$

ψ也是在区域V和边界S上定义的可微函数。

在式（1.12）中，交换ϕ和ψ，则成为：

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi+\nabla\psi\cdot\nabla\phi)\mathrm{d}v=\int_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{1.15}$$

将上式减去式（1.14），则有：

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}v=\int_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{1.16}$$

上式称为格林第二公式。

§1.3 单位阶梯函数

单位阶梯函数（Heaviside函数）定义如下（见图1.5）：

$$H(x,\ \xi)=\begin{cases}0 & x<\xi\\ 1 & x>\xi\end{cases} \tag{1.17}$$

引入算法语言中的符号函数SGN(x)，则上式可写成：

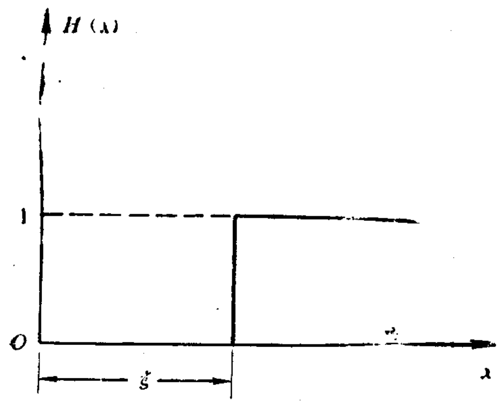


图1.5 单位阶梯函数图

$$H(x,\ \xi)=\frac{1}{2}[\mathrm{SGN}(x-\xi)+1] \tag{1.18}$$

单位阶梯函数$H(x,\xi)$中的自变量是x和ξ，它的数值就是由x和ξ的相对位置决定，故有时称为2点函数。通常把x称为观察点(Observation Point)，把ξ点称为源点(Source Point)。

§1.4 狄拉克函数

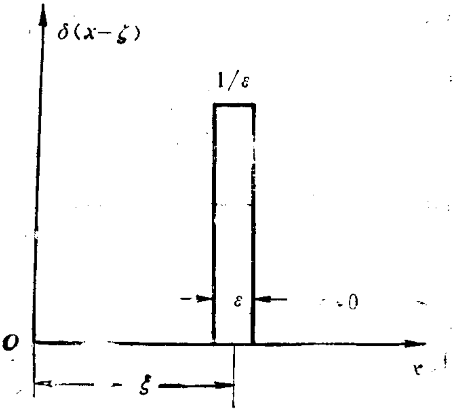
狄拉克（Dirac）δ函数定义如下（见图1.6）：

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x-\xi)=0 \qquad x\neq\xi\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=1\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

狄拉克δ函数的重要特性是：对于任意一个x的连续函数，在$x=\xi$处存在，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=f(\xi) \tag{1.20}$$

单位阶梯函数和狄拉克δ函数之间的关系是很容易建立



$\delta(x-\xi)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}$

图1.6　狄拉克δ函数图

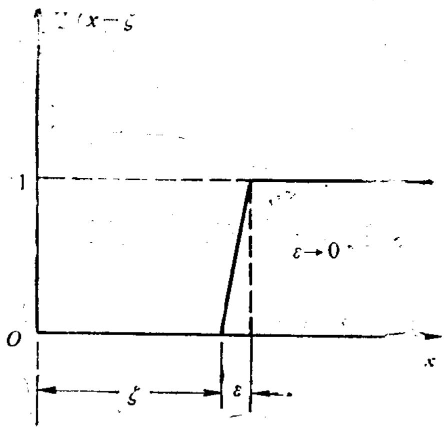


图1.7　函数示意图

的，考虑如图1.7所示的函数$H(x-\xi)$：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}H(x-\xi)=\begin{cases}0 & x\leqslant\xi\\ \dfrac{x-\xi}{2} & \xi\leqslant x\leqslant\xi+\varepsilon\\ 1 & x\geqslant\xi+\varepsilon\end{cases}\tag{1.21}$$

根据$H(x-\xi)$函数的定义，同时比较式（1.19），可以得：

$$\frac{\mathrm{d}H(x-\xi)}{\mathrm{d}x}=\delta(x-\xi) \tag{1.22}$$

式中，导数就取在$\varepsilon\to 0$以前。

应该注意到，以上单位阶梯函数和狄拉克δ函数的特性和关系的证明是不严格的，但形式是正确的。这些特性的严格证明，必须从间断理论出发。

§1.5 线性算符与基本解

某一算符$\mathscr{L}$作用在函数u上，会产生另一函数，设为p，则可以写出：

$$\mathscr{L}(u)=p \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.23}$$

式中，$\mathscr{L}(\ )$即是算符，Ω表示直角坐标x，y，z下的空间区域。通常，我们可以认为$\mathscr{L}(\ )$是个微分算符，但也可以是个积分算符。如果算符$\mathscr{L}(\ )$是线性的，则有：

$$\mathscr{L}(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha\mathscr{L}(u_1)+\beta\mathscr{L}(u_2) \tag{1.24}$$

式中，α和β是二个常数，而u_1和u_2是两个函数。

现在考虑在区域Ω内满足齐次方程的问题：

$$\mathscr{L}(u)=0 \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.25}$$

同时定义$\mathscr{L}(u)$与另一函数v的内积：

$$\int_\Omega \mathscr{L}(u)\cdot v\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.26}$$

有时，我们将这种内积表示为$\langle\mathscr{L}(u),\ v\rangle$。若对内积式(1.26)进行多次分部积分，直到不包含有u的微分，于是我们可以得到内积的变换形式，其结果是：

$$\int_\Omega \mathscr{L}(u)\cdot v\,\mathrm{d}\Omega$$

$$=\int_{\Omega}u\mathscr{L}^{*}(v)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}[G^{*}(v)S(u)-G(u)S^{*}(v)]\mathrm{d}\Gamma \tag{1.27}$$

式中，Γ是区域的外边界，S和G是两个由分部积分而得到的微分算符。

算符$\mathscr{L}^{*}$称为算符$\mathscr{L}$的“相伴”（Adjoint）算符，如果$\mathscr{L}^{*}=\mathscr{L}$，则$\mathscr{L}$被称为“自相伴”（Self-adjoint）。此外，在分部积分时，还产生两类不同的边界条件，给定$G(u)$称为基本边界条件，而给定$S(u)$称为本质边界条件。在物体的边界上就必须给出这二类条件中的一个。设Γ_1和Γ_2分别表示总的物体表面Γ的二个部份，则自相伴问题的边界条件可以表示为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{在}\Gamma_1\text{上给定}G(u)\\ \text{在}\Gamma_2\text{上给定}S(u)\end{array}\right\}\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$$

一个自相伴算符($\mathscr{L}^{*}=\mathscr{L}$),对于所有函数$u$，它还必须是正定的，即

$$\int_{\Omega}[\mathscr{L}(u)]u\mathrm{d}\Omega\geqslant 0 \tag{1.28}$$

上式等号仅只是在$v=0$时才成立。为了证明算符$\mathscr{L}$的正定特性，我们可以对内积进行分部积分直到具有相同的微分阶数，这实际上是从$\mathscr{L}$到$\mathscr{L}^{*}$变换的中点，从而可证明这种正定特性。

若考虑一维的函数$u(x)$，它满足方程；

$$\mathscr{L}[u(x)]=0 \tag{1.29}$$

则有另一函数$u^{*}(x,\xi)$，它满足方程：

$$\mathscr{L}[u^{*}(x,\ \xi)]+\delta(x,\xi)=0 \tag{1.30}$$

称$u^{*}(x,\xi)$为对应于方程（1.29）的基本解，有时也称基本奇异解或无限域的格林函数。

按δ函数的定义，式(1.30)中的基本解$u^{*}(x,\xi)$表示在$x=\xi$

的位置上存在着大小为1的点源时，对无限区域中任意点x的影响，这个点源在流场中即是涌流，在电场中即是集中电荷，在温度场中即是点热源，在应力场中即是作用的集中力等。

如果$\mathscr{L}$（ ）是二维的拉普拉斯（Laplace）算符，则方程是：

$$\mathscr{L}[u(x_1,x_2)]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}\right)u(x_1,x_2)=0 \tag{1.31}$$

对应的基本解$u^*(x_1,\xi_1,x_2,\xi_2)$应满足微分方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}\right)u^*(x_1,\xi_1,x_2,\xi_2)+\delta(x_1,\xi_1,x_2,\xi_2)=0 \tag{1.32}$$

该方程的解是：

$$u^*(x_1,\xi_1,x_2,\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}} \tag{1.33}$$

§1.6 高斯数值积分公式

一维的高斯(Gauss)数值积分公式：

$$I=\int_{-1}^{1}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{k=1}^{n}W_kf(\xi_k) \tag{1.34}$$

式中，n为求I的近似值所取的积分点数，ξ_k为积分点坐标，W_k称为加权系数。对应于k个积分点可选$2k$个W_k和ξ_k的数值，下面我们还是利用求积公式（1.34）对于任何不超过$2k-1$次的多项式应精确成立这一事实来决定W_k和ξ_k。

如取二个积分点：