数学问题和猜想的科学计算

R.S. 瓦尔格 著

科学出版社

数学问题和猜想的科学计算

R. S. 瓦尔格　著

蔡大用　林鹏　译

科学出版社

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书主要内容包括：逼近论中的 Bernstein 猜想、1/9 猜想及最新解法、Riemann 假设的理论，e^z 部分和的计算、实逼近和复逼近等。本书将科学计算和猜想联系起来，内容丰富，可读性强。

本书可供高校计算机科学系，数学系师生阅读，也可作为科研人员的参考书。

Richardon S. Varga

Scientific Computation on Math. Problem and Conjetures

Society for Industrial And Applied Mathematics 1990

数学问题和猜想的科学计算

R.S. 瓦尔格 著

蔡大用 林鹏 译

责任编辑 刘嘉普

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1994年3月第一次印刷 印张：4 3/4

印数：1—1 000 字数：121 000

ISBN 7-03-003874-6/O · 681

定价：5.50 元

前　言

本书较详细地论述了科学计算在研究数学问题和猜想中的作用，首先，我们认为科学计算的含意是指，利用很多位有效数字进行的计算工作，这些计算都用于实现某些数值算法，如在多项式和有理逼近论中的(第二类)Remez 算法，数列的 Richardson 外插 (以便改进这个数列的收敛性)，准确解出高阶多项式的零点以及用求积技术求数值近似积分．我们的目的并不是深入到研制有效可行的软件来实现这些高精度计算这一专门领域中去，而是强调现有软件作为研究某些数学问题和猜测的手段之一所显示出的强有力的作用．

作为一个恰当的实例，在第一章中我们首先研究了在多项式逼近论中 1913 年的 Bernstein 猜测，研究人员通过直接地高精度的计算，于 1985 年解决了 (否定地) 这个猜测．在第二章中我们研究有理逼近论中 1977 年的 “1/9” 猜测．在这个例子中，高精度计算明显地表明这个猜测也不成立，但由 A.A.Gonchar 和 E.A.Rakhmanov 给出的这个猜测的最新的精确结论是一个漂亮的理论结果而不是数值结果．

在第三章中，我们梗概地综述了近年来对关于 1859 年著名的 Rieman 假设所进行的高精度计算工作．这个假设是关于在临界带中找 Riemann ζ 函数的零点问题．然后我们转到 1927 年的 Pólya 猜测，它是 Riemann 假设的一种较弱的形式．在这章中还给出由数值计算启发而得出的 Pólya 猜测的肯定的解析解．然后给出关于确定 de Bruijn-Newman 常数 Λ 下界的新近高精度数值研究成果．还证明了若 Riemann 假设成立，则这个常数满足 $\Lambda \leq 0$. 1976 年 C.M.Newman 给出了补充性的猜测： $\Lambda \geq 0$.

在其余章节中，主要分析了上述三个问题的理论结果．在这些章中高精度计算具有不同的性质，或者高精度数值试验用于提炼人们求解析解的直觉，或者用来给出高阶多项式零点的有价值的图形表示．

正如将要看到的，这个专著重点放在阐明困难的分析工作和高精度计算的相互作用上．这里我们提醒读者，每章都是相互独立的，并且每章结尾都给出该章参考文献．

我们衷心感谢对本书中的材料提出很多建议和意见的朋友和同事．在 Butler 大学的讲座上，本书作者曾经不明智地悬赏谁能在 CBMS-NSF 大会上散发的讲义中找出一个错误就给谁一个面包圈． (后来我曾多次希望，我要是开个面包店该多好呀！) 我还要感谢 Kent 州立大学

计算数学研究所的 Gail Bostic 女士，她出色地打印了本书的 LaTex 文本，感谢 Gretchen M.Varga 参与了本书编辑工作，感谢 George Csordas 教授，他对第三章提出了宝贵的意见，感谢 Arden Ruttan 教授，他准备了第五章中有价值的图，感谢 Keith Fuller 先生，他准备了第六章 6.1 和 6.2 中的图.

最后，我要感谢 Amos.J.Carpenter 教授，他不仅为在 Butler 大学举办这次大会操办了每一个细节，而且还十分细心地阅读了这一专著并提供了第一、四两章中的图片. 总之，和他一起工作我永远感到高兴.

译 者 的 话

收到 R.S.Varga 教授这本专著之后，使我爱不释手，一口气把它读完了. 除了关于 Bernstein 猜想， Riemann 假设等若干著名命题的最新结果迷住了我们之外，更重要的是每一章的内容在方法学上给予我们一种新的启示. 作者在利用高精度计算及符号运算的工具解决若干纯数学问题上所取得的进展，雄辩地说明电子计算机不仅仅可以成为工程师和应用科学家的助手，还完全可以成为纯数学家的得力工具. 利用计算机设计出十分精美的算法，藉以解决数学史上若干悬案应该成为一种有效手段. 当然，这绝不是轻而易举的，它需要数学上的区区为之付之心血.

基于上述的感知，我们把这本书翻译成中文奉献给中国读者，特别是年轻的数学家，并且想告诉有志于此道的朋友，在这条路上最近又留下了前人们脚印，你我不妨也赶上去，并超过去，不断地向前迈步.

在翻译本书的过程中， R.S.Varga 教授寄来的新的补充和订正，我们都一并收入了这个译本.

最后我们还要感谢国家攀登计划对出版本书的支持.

译　者

一九九三秋，北京

目　录

第一章 逼近论中的 Bernstein 猜测

1.1 引言

对于定义在区间 $[-1,+1]$ 上的任一实值函数 $f(x)$ 以及任意的 $\delta > 0$ 其连续模定义为:

$$\omega(\delta;f) := \sup_{\substack{|x_1-x_2|\le\delta \\ x_1,x_2\in[-1,+1]}} |f(x_1)-f(x_2)|, \tag{1.1}$$

而其在 $[-1,+1]$ 上的一致范数定义为

$$\|f\|_{L_\infty[-1,+1]} := \sup\{|f(x)| : x\in[-1,+1]\}. \tag{1.1'}$$

用 π_n 代表次数最高为 $n(n=0,1,\cdots)$ 的全体实多项式的集合, 下面是熟知的 Jackson[8] 中的结果 (见 (Meinardus [9, p.56], Rivlin[11, p.22]):

定理 1 (Jackson [8]) 若 $f(x)$ 为定义在 $[-1,+1]$ 上的一个连续实值函数, 则

$$E_n(f) \le \sigma\omega\left(\frac{1}{n};f\right) \quad (n=1,2,\cdots), \tag{1.2}$$

其中

$$E_n(f) := \inf\{\|f-g\|_{L_\infty[-1,+1]} : g\in\pi_n\}. \tag{1.3}$$

大家都知道 (见 [9, p.16]) 对定义在 $[-1,+1]$ 上的任何连续实值函数 $f(x)$, 在 π_n 中存在唯一的多项式 $\hat{p}_n(x)=\hat{p}_n(x;f)$ 使得

$$E_n(f) = \|f-\hat{p}_n\|_{L_\infty[-1,+1]}, \quad (n=0,1,\cdots), \tag{1.3'}$$

并称 $\hat{p}_n(x)$ 为在 $[-1,+1]$ 上函数 $f(x)$ 在 π_n 中的最佳一致逼近多项式. 此外, 由 (1.3) 序列 $\{E_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个非负的非增序列. 根据 Weierstrass 逼近定理 (见 [11, p.11]) 它趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0. \tag{1.4}$$

对于 $[-1,+1]$ 上特殊的连续函数 $|x|$, 不难看出

$$\omega(\delta;|x|) = \delta \quad (0<\delta\le 1),$$

从定理一的 (1.2) 式，可有，

$$E_n(|x|) \le \frac{\sigma}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4'}$$

对于函数 $|x|$ 说来，这个式子比 (1.4) 更精确.

因为 $|x|$ 是 $[-1, +1]$ 上的连续偶函数，那么对任何 $n \ge 0$ 它在 $[-1, +1]$ 上在 π_n 中的最佳一致逼近也是偶函数 (见 Rivlin [11, p.43 练习 1.1]). 把这个结果和最佳一致逼近多项式的 Chebyshev 变化特性结合起来，就可进一步得到 (见 [11, p.26])

$$E_{2n}(|x|) = E_{2n+1}(|x|) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1.5}$$

因此, 对我们来说, 仅考虑序列 $\{E_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{\infty}$ 减到零的样子就足够了. 从 (1.4′), 我们显然有

$$2nE_{2n}(|x|) \le 6 \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1.6}$$

为了改进 (1.6) 的上界，在 $[-1, +1]$ 上把 $|x|$ 展成 Chebyshev 级数，即

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}T_{2m}(x)}{(2m-1)(2m+1)}\right\}, \tag{1.7}$$

其中 $T_n(x)$ 是 n 阶 Chebyshev 多项式 (第一类). 因为对所有在 $[-1, +1]$ 中的 x 都有 $|T_n(x)| \le 1$, 去掉 (1.7) 式中的前 n 项和，则 (1.7) 式余项的绝对值满足

$$\frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}T_{2m}(x)}{(2m-1)(2m+1)}\right| \le \frac{4}{\pi}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+1)}.$$

但是

$$\frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right),$$

则这个上界可简单地缩小为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) + \cdots\right\} = \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

于是

$$\left| |x| - \frac{4}{\pi}\left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}T_{2m}(x)}{(2m-1)(2m+1)} \right\} \right| \leq \frac{2}{\pi(2n+1)}, \qquad (1.8)$$

对于在 $[-1,+1]$ 中的所有 x 及任何 $n \geq 1$ 成立. 因为 (1.8) 式中给出 $|x|$ 的逼近多项式为一个具体的 $2n$ 次多项式，从而 (1.8) 隐涵着

$$2nE_{2n}(|x|) \leq \frac{4n}{\pi(2n+1)} < \frac{2}{\pi} = 0.63661\cdots \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad (1.9)$$

它又改进了 (1.6) 式.

在 1913 年 S.Bernstein[2] 进一步把 (1.9) 中的上界 $0.63661\cdots$ 大大地精确化了. 从 (1.9) 式直接给出 (1.10) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, 2nE_{2n}(|x|) \leq \dfrac{2}{\pi} = 0.63661\cdots$, 经过一个冗长复杂的证明， Bernstein 给出下面更进一步的结果:

定理 2 (Bernstein [2]) 存在正的常数 β(β 代表 Bernstein 常数), 使得

$$\lim_{n\to\infty} 2nE_{2n}(|x|) = \beta, \qquad (1.11)$$

其中 β 满足

$$0.278 < \beta < 0.286. \qquad (1.12)$$

除上述结果外， Bernstein 在 [2, p.56] 中还指出常数

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.2820947917\cdots \qquad (1.13)$$

也在 (1.12) 给出的界限内，并接近于 (1.12) 中 β 上、下限的平均值 0.282, 这好像是一种奇怪的巧合. 过几年这个发现就成为 Bernstein 猜测 (1913):

$$\beta \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.282094917\cdots. \qquad (1.14)$$

从 Bernstein 的论文问世 70 多年以来，尽管有几位作者 (见 Bell 和 Shah[1], Bojanic 和 Elkins [3], 以及 Salvati [12]) 进行了数值上的探索，但这个猜测的真伪尚属未知，这个猜测迄今悬而未决的原因可能是由于如下事实 (i) 对于大的 n 值，准确地确定 $E_{2n}(|x|)$ 绝非易事，而且 (ii) 由 (1.11) 式确立的 $2nE_{2n}(|x|)$ 收敛到 β 的速度太慢.

近年来， Varga 和 Carpenter[13] 在 1985 年指出 Bernstein 猜测不成立；这个结论是基于 [13] 中给出的 β 的改进界限 (将在下节中讨论):

$$0.2801685460\cdots = l_{20} \le \beta \le 2\mu_{100} = 0.2801733791\cdots. \quad (1.15)$$

因为 (1.15) 式中 β 的上界小于 $1/(2\sqrt{\pi}) = 0.2820947917\cdots$, 因此 Bernstein 猜测 (1.14) 不成立！下面 §1.2 中我们讨论高精度计算 $E_{2n}(|x|)$ 的问题，而 §1.3 和 §1.4 介绍在 [13] 中根据 Bernstein 方法得到 Bernstein 常数 β 上、下界的方法. 在 §1.5 中，我们讨论高精度数 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 的 Richardson 外插，它给出了有 50 位有效数字的 β 估计值：

$$\beta \doteq 0.28016949902386913303643649123067200004248213981236 \quad (1.16)$$

在 §1.6 中我们讨论关于估计非负量 $\beta(\alpha)$ 这一更一般的问题，其中

$$\beta(\alpha) = \lim_{n\to\infty}(2n)^{2\alpha}E_{2n}(x^{\alpha};[0,1]) \quad (\alpha > 0), \quad (1.17)$$

$\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 收敛到 (1.16) 中的常数 β. 最后作为本章的结束，在 §1.7 中我们讨论对于 $|x|$ 在 $[-1,+1]$ 上的最佳一致有理逼近问题.

1.2 高精度计算 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$

令 π_{2n} 中的 $\hat{p}_{2n}(x)$ 是 $[-1,+1]$ 上函数 $|x|$ 的最佳逼近多项式；即 (见 (1.3′)),

$$\||x| - \hat{p}_{2n}(x)\|_{L_\infty[-1,+1]} = E_{2n}(|x|) \quad (n = 1,2,\cdots). \quad (2.1)$$

因为 $|x|$ 在 $[-1,+1]$ 区间上是偶函数，根据 §1.1 的讨论，其在 $[-1,+1]$ 上的最佳一致逼近多项式也是偶函数，从而

$$\hat{p}_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(n)x^{2j} \quad (n = 1,2,\cdots). \quad (2.2)$$

我们做变量变换 $x^2 = t$, $t \in [0,1]$, 于是我们的逼近问题变为：

$$E_{2n}(|x|) = E_n(\sqrt{t};[0,1]) := \inf\{\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]} : h_n \in \pi_n\}. \quad (2.3)$$

如果我们记

$$E_n(\sqrt{t};[0,1]) = \|\sqrt{t} - \hat{h}_n(t)\|_{L_\infty[0,1]}(\hat{h}_n \in \pi_n), \tag{2.4}$$

那么，显然有 (见 (2.2))

$$\hat{p}_{2n}(x) = \hat{h}_n(x^2) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{2.5}$$

因此，确定 $E_{2n}(|x|)$ 和 $\hat{p}_{2n}(x)$ 等价于确定 $E_n(\sqrt{t};[0,1])$ 和 $\hat{h}_n(t)$.

利用下面的标准 (第二类)Remez 算法就可以解决 (2.3) 的极小化问题 (见 Meinardus [9, p. 105]).

第一步，令 $S := \{t_j\}_{j=0}^{n+1}$ 是 $[0,1]$ 上 $n+2$ 个离散点构成的集合，它满足

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} \le 1. \tag{2.6}$$

第二步，找出唯一多项式 $h_n(t)$ 和常数 λ(这是一个线性问题) 使得

$$h_n(t_j) + (-1)^j \lambda = \sqrt{t_j} \quad (j = 0, 1, \cdots, n+1). \tag{2.7}$$

因此， $h_n(t)$ 在这个离散集 S 上 π_n 中对于 $\sqrt{t}$ 的最佳一致逼近多项式，而且在 S 的点 t_j 上其交错误差为 $|\lambda|$，使用和 (2.3) 中类似的记号，我们可以写

$$\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty(S)} = E_n(\sqrt{t};S) = |\lambda|. \tag{2.8}$$

由于 S 是 $[0,1]$ 的子集，故显然有

$$\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]} - |\lambda| \ge 0. \tag{2.9}$$

第三步，事先给定 (小的)$\varepsilon > 0$，如果 $\|\sqrt{t}-h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]}-|\lambda| \le \varepsilon$，则迭代终止. 否则，利用前面第二步，在函数 $\sqrt{t} - h_n(t)$ 位于 $[0,1]$ 区间上交替变号的局部极值点中找出一个新的集合 S'，并重复第二和第三步，如此等等.

从计算的观点说来，知道由重复利用 Remez 算法产生的 $|\lambda|$ 序列是单调非减，这一事实是很有用的.

从一个特殊的交错集 $S^{(0)} := \{t_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$，

$$t_j^{(0)} := \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{(n+1-j)\pi}{n+1}\right]\right\} \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, n+1) \tag{2.10}$$

开始，其中 $t_j^{(0)}$ 是在 $[0,1]$ 区间上 Chebyshev 多项式 $T_{n+1}(2t-1)$ 的 $n+2$ 个极值点，并利用 Brent 的 MP 软件包 [4] 在肯特州立大学数学系的 Vax 11/780 上进行高精度计算，当 $\|\sqrt{t}-h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]}$ 和 $|\lambda|$ 重合到 100 位有效数字时，Remez 算法的迭代终止．由于已知这种 (第二类)Remez 算法有二次收敛性，因此对于每种所考虑的情况，最多需要九次迭代．考虑到保留位和可能存在的小的舍入误差，我们相信我们得到的 $\{E_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 至少有 95 位有效数字．

表 1.1 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$

n	$2nE_{2n}(\|x\|)$	n	$2nE_{2n}(\|x\|)$
1	0.25000 00000 00000 00000	27	0.28010 92365 22206 18525
2	0.27048 35971 11137 10107	28	0.28011 34608 89950 28384
3	0.27557 43724 01175 38604	29	0.28011 72562 49499 61792
4	0.27751 78246 75052 69646	30	0.28012 06787 72662 82833
5	0.27845 11855 35508 60152	31	0.28012 37757 31660 88450
6	0.27896 79174 64958 70636	32	0.28012 65871 38731 91844
7	0.27928 29449 58518 02460	33	0.28012 91470 43904 51720
8	0.27948 88375 94507 44771	34	0.28013 14845 70012 61069
9	0.27963 06574 10128 20125	35	0.28013 36247 44030 04676
10	0.27973 24337 71973 82968	36	0.28013 55891 69271 11713
11	0.27980 79172 88743 87383	37	0.28013 73965 72336 69662
12	0.27896 54321 23793 27279	38	0.28013 90632 50782 89591
13	0.27991 02543 15557 69036	39	0.28014 06034 41582 48218
14	0.27994 58584 85782 13247	40	0.28014 20296 25997 94087
15	0.27997 46066 86407 49231	41	0.28014 33527 83104 08169
16	0.27999 81519 56316 72827	42	0.28014 45826 01611 08707
17	0.28001 76771 33297 25379	43	0.28014 57276 57645 50097
18	0.28003 40474 14993 50964	44	0.28014 67955 64600 41624
19	0.28004 79072 85905 85156	45	0.28014 77930 99959 13546
20	0.28005 97447 60423 15265	46	0.28014 87263 13048 74446
21	0.28006 99348 31809 43067	47	0.28014 96006 16931 43684
22	0.28007 87694 75287 53423	48	0.28015 04208 67046 95023
23	0.28008 64787 57075 57049	49	0.28015 11914 28744 92326
24	0.28009 32459 38808 50547	50	0.28015 19162 35465 27355
25	0.28009 92184 52382 83558	51	0.28015 25988 39017 81632
26	0.28010 45159 86556 70489	52	0.28015 32424 53163 84249

为了节省篇幅，在表 1.1 中给出了截断到 20 位有效数字后的 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 的值. 为的是表明该序列收敛是很慢的. (如果需要的话可以打印出 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 至 100 位有效数字).

看来表 1.1 中的乘积 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 已经收敛到 4 位有效数字，按照 §1.6 中的渐近估计式，若 $|2nE_{2n}(|x|)-\beta|<10^{-10}$，则必须 $n\geq 20968$. 这将需要在 $[0,1]$ 上找出 $\sqrt{t}$ 的至少 10484 阶最佳一致逼近多项式，这是绝对令人生畏的计算工作.

1.3 计算 Bernstein 常数 β 的上界

为了得到 Bernstein 常数 β 的上界和下界， Bernstein 引进了下面的特殊函数

$$F(t):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t}{(t+2k+1)^2-1/4}\quad(t\geq 0). \tag{3.1}$$

利用 psi(双 γ 函数) 函数 (见 Whittaker 和 Watson [14, p.240])

$$\Psi(z):=\frac{d}{dz}(\log\Gamma(z))=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \tag{3.2}$$

(3.1) 式中的函数 $F(t)$ 有表达式

$$F(t)=\frac{t}{2}\left\{\Psi\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{4}\right)-\Psi\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)\right\}\quad(t\geq 0), \tag{3.3}$$

$F(t)$ 的其它表达式还包括 (见 [2])

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{t}{2t+1}H\left(1,1;t+\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)=t\int_0^1\frac{z^{t-1/2}dz}{z+1}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}du}{\cosh(u/2t)},\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $H(a,b;c;z)$ 代表古典的超几何函数 (见 Henrici [7, p.56]). 在 (3.4) 式中最后的积分式表明 $F(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格增加，且 $F(0)=0$ 和 $F(\infty)=\dfrac{1}{2}$.

至此，还看不出为什么 (3.1) 式中的函数 $F(t)$ 在确定 Bernstein 常数 β 中能起作用. 为了说明如何想出的这个函数， Bernstein 考虑了

下面的多项式插值问题. 对于每个固定的正整数 n, 考虑在 $[-1,+1]$ 中由下式给定的 $2n+1$ 个离散点

$$x_0 := x_0(2n) = 0; x_k := x_k(2n) := \cos\left[\frac{(k-1/2)\pi}{2n}\right] \qquad (3.5)$$

$$(k = 1, 2, \cdots, 2n),$$

因为点 $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$ 恰恰是 Chebyshev 多项式 $T_{2n}(x)$ 的零点，我们记

$$\omega(x) := \prod_{j=0}^{2n}(x - x_j) = xT_{2n}(x)/2^{2n-1}. \qquad (3.6)$$

如果 $R_{2n}(x)$ 代表在 π_{2n} 中唯一多项式，它在 (3.5) 中给定的点上插值 $|x|$, 那么 $R_{2n}(x)$ 是 x 的偶多项式，经过一定演算后，它满足

$$|x| - R_{2n}(x) = \frac{T_{2n}(x)}{n}H_{2n}(x) \quad (x \in [0,1]), \qquad (3.7)$$

其中

$$H_{2n}(x) := -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k \sin[(k+1/2)\frac{\pi}{2n}]}{x + \cos[(k+1/2)\frac{\pi}{2n}]} \quad (x \in [0,1]). \qquad (3.7')$$

经过很长的证明后， Bernstein[2] 得到

$$|x| - R_{2n}(x) = \frac{T_{2n}(x)}{n}\left[F\left(\frac{2nx}{\pi}\right) + \eta_n(x)\right] \quad (x \in [0,1]), \qquad (3.8)$$

其中

$$|\eta_n(x)| \le \frac{4+\pi^2}{2n^{2/5}} \quad (x \in [0,1]; n = 1, 2, \cdots). \qquad (3.9)$$

接下来，按照定义

$$E_{2n}(|x|) \le \||x| - R_{2n}(x)\|_{L_\infty[-1,+1]} = \||x| - R_{2n}(x)\|_{L_\infty[0,1]},$$

最后一个不等式是由 $|x|$ 和 $R_{2n}(x)$ 都是偶函数这一事实得出的. 因为在 $[0,1]$ 中 $|T_{2n}(x)| \le 1$, 而且 $F(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，并有 $F(+\infty) = \frac{1}{2}$, 所以从 (3.8) 和 (3.9) 可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, 2nE_{2n}(|x|) \le 2F(+\infty) = 1. \qquad (3.10)$$

注意，当用来改进 (1.6) 式时，(3.10) 式不如 (1.10) 好. 此外，(3.8) 式表明：对于大的 n, 误差 $|x| - R_{2n}(x)$ 在 $[-1, +1]$ 区间内远不是等幅振荡. 因为 $F(t)$ 的严格递增性质隐含了最大的误差只能出现在 $x = \pm 1$ 的区域内而不可能出现在 $x = 0$ 的邻域内.

为了在 $x = 0$ 附近有等振荡性，Bernstein[2] 建议如下，对于任何偶数 n, 首先记

$$T_{2n}(x) = \cos(2n \arccos x) = \cos(2n \arcsin x). \tag{3.11}$$

其次，对于固定的任意非负整数 m 和所有的 $n > m$, 令 $\left\{\xi_k(2n) := \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right]\right\}_{k=1}^{m}$ 是 $T_{2n}(x)$ 在 $[0, 1]$ 中 m 个最小的零点. 显然，对于每个 $1 \le k \le m$, $T_{2n}(x)/(x^2 - \xi_k^2(2n))$ 是 π_{2n} 中的偶多项式，于是由

$$Q_{2n}(x) := R_{2n}(x) + \frac{T_{2n}(x)}{n}\left\{a_0 + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x^2 - \xi_k^2(2n)}\right\}, \tag{3.12}$$

定义的多项式 $Q_{2n}(x)$, 对于每个 $n > m$ 也是一个 π_{2n} 中的偶多项式. 除此之外，令 $x = \pi b/(2n)$ 从 (3.8) 和 (3.12) 式可以得到，对于每个 $n > m$.

$$|x| - Q_{2n}(x) = \frac{T_{2n}(x)}{n}\left\{F(b) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{b^2 - \left[\frac{2n}{\pi}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right]^2} + r_n(x)\right\}, \tag{3.13}$$

对每个非负整数 m 现在我们定义

$$\mu_m := \inf_{\substack{a_0, a_1, \cdots a_m \\ \text{实}}} \left\{\left\| \cos(\pi b)\left[F(b) - \left(a_0 + \sum_{k=1} \frac{a^k}{b^2 - \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2}\right)\right]\right\|_{L_\infty[0,+\infty)}\right\}, \tag{3.14}$$

对于固定的 $b \geq 0$, 由 (3.11) 可得

$$T_{2n}(x) = \cos\left[2n \arcsin\left(\frac{\pi b}{2n}\right)\right] \to \cos(\pi b) \quad (n \to \infty).$$

类似于 (3.10) 可以验证

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, 2nE_{2n}(|x|) \leq 2\mu_m \quad (m = 0, 1, \cdots). \tag{3.15}$$

从 (3.14) 式可知正常数序列 $\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ 显然是非增的:

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots, \tag{3.16}$$

因此是收敛的. Bernstein [2, p.55] 证明了 (1.11) 式中的 Bernstein 常数 β 和序列 $\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ 的极限通过

$$\beta = 2 \lim_{m\to\infty} \mu_m \tag{3.17}$$

连系起来, 由 (3.16), 每个逼近问题 (3.14) 的常数 μ_m 给出了如下 β 的上界

$$\beta \leq 2\mu_m \quad (m = 0, 1, \cdots). \tag{3.18}$$

有趣的是, 在 1913 年 Bernstein[2] 对于 $m = 3$ 数值估计了 (3.14) 的解, 并发现 $\mu_3 < 0.143$, 于是

$$2\mu_3 < 0.286.$$

这就是在 (1.12) 中提到的 β 的上界 (在表 1.2 中可以找到 $2\mu_m$ 更精确的估计值).

表 1.2 $\{2\mu_m\}$

m	$2\mu_m$	m	$2\mu_m$
0	0.50000 00000 00000	10	0.28056 81480 84662
1	0.30981 66482 77486	20	0.28026 79181 28026
2	0.28964 46428 36759	30	0.28021 30013 47551
3	0.28458 56232 64382	40	0.28019 38951 81171
4	0.28268 16444 08752	50	0.28018 50827 23738
5	0.28177 99926 24272	60	0.28018 03067 66681
6	0.28128 65208 69723	70	0.28017 74317 42434
7	0.28098 84334 65837	80	0.28017 55680 33390
8	0.28079 50582 78109	90	0.28017 42915 00582
9	0.28066 26720 87176	100	0.28017 33791 01718