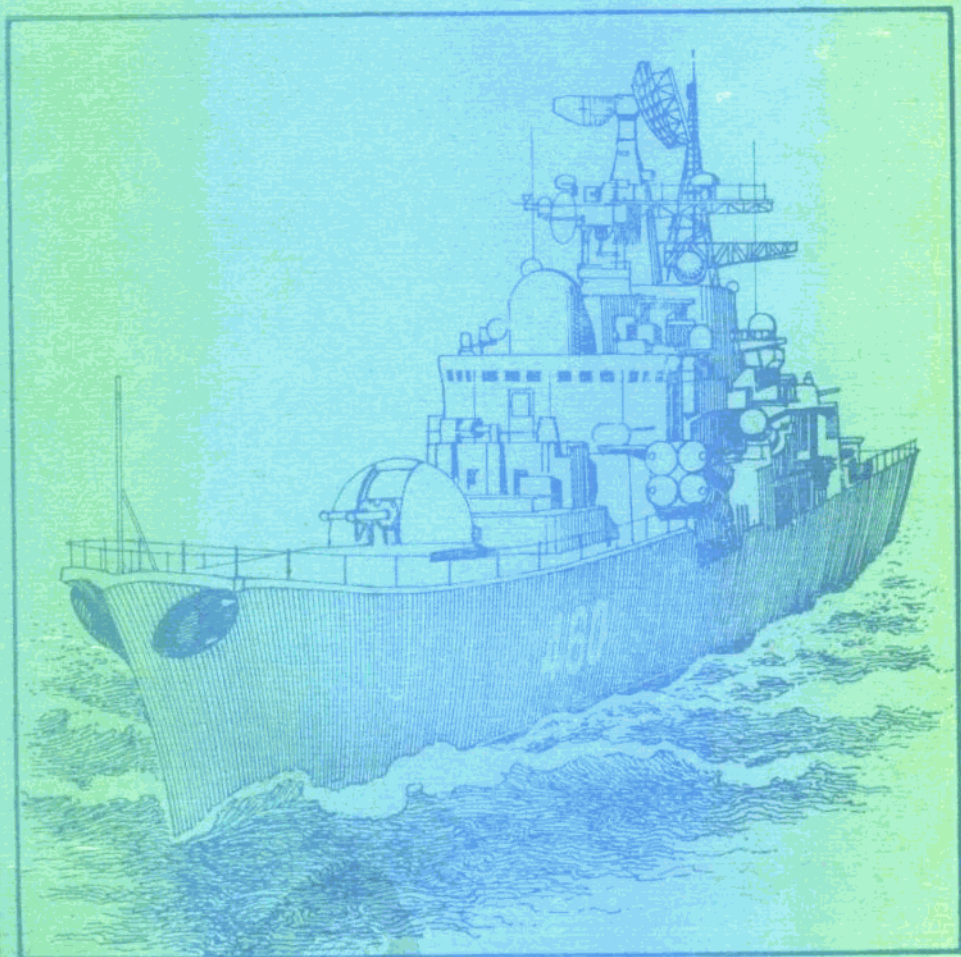


船舶波浪外荷 和水弹性

董艳秋 编著



天津大学出版社

船舶波浪外荷和水弹性

董艳秋 编著



天津大学出版社

内 容 提 要

本书简要介绍了波浪和波浪外荷理论,并着重讲述了解决船舶波激振动及砰击振动问题的船舶水弹性统一理论,同时对随机海浪理论和船舶响应的预报方法也作了阐述。书中不仅给出应用理论解决工程实际问题的方法,而且介绍了许多国内外研究成果及计算实例。

本书可作为船舶及海洋工程专业高年级大学生和研究生的教材,亦可供设计、研究人员及工程技术人员参考。

船舶波浪外荷和水弹性

董艳秋 编著

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本: 787 × 1092毫米^{1/16} 印张: 12^{1/4} 字数: 306千字

1991年7月第一版 1991年7月第一次印刷

印数: 1—1000

ISBN 7-5618-0239-0

U · 2

定价: 3.60元

前 言

近10余年来,流体和固体相互作用的动力问题在许多学科领域中引起人们极大的关注。船舶及海洋工程结构物经常受到海浪的作用。这些结构物在波浪作用下的受力和振动都涉及流体与结构的相互作用。船舶又在海上航行,致使这些问题更加复杂。

70年代初,船舶耐波及波浪外荷的研究有了较大进展。波浪作用下船体的振动,亦即水弹性,则是近年来才发展起来的新学科。毕肖普和普莱斯(Bishop, R.E.D. and Price, W.G.)所著《船舶水弹性》(Hydroelasticity of ships)就是这方面研究的代表作。

本人多年来从事波浪作用下船舶及其结构动力响应问题的研究。这些问题有海上顶推船连接装置在波浪作用下的受力、浅吃水肥大型船舶底砰击和波浪外荷以及起重船吊杆在波浪作用下的动力响应等。尤其分段弹性龙骨船模试验和波激对称响应理论计算工作的完成,使这方面的研究又深入一步。

作者吸收了国内外新的研究成果,自1981年开始为高年级学生开设“船舶波浪外荷及水弹性”选修课,为研究生开设“船舶水弹性”课,并编著了本书。

全书共分三篇。第一篇为波浪理论和波浪外荷。介绍了几种经典波浪理论,重点是深水微幅波理论;进而分析被视为刚体的船,在规则波作用下的运动和受力,为此阐述了研究波浪外荷常用的原始切片理论和新切片理论以及求二因次附加质量、阻尼系数的方法;同时,列举一些实船的波浪诱导弯矩、切力和特殊船舶在波浪作用下的受力。

第二篇为船舶水弹性理论。讲述船体垂向弯曲及横向弯曲、扭转振动的固有频率、固有振形的求法;阐述船体梁对称及反对称强迫振动模态分析方程的建立过程,并给出船体的广义质量、广义刚度和广义阻尼矩阵的表达形式;进而讨论波浪引起的广义流体作用力和波激振动,分别给出船体对称、反对称波激振动响应和实例;同时还讨论了船底受到的砰击力和砰击振动,给出砰击响应计算方法及实例。

第三篇为不规则波作用下船体的动力响应。介绍随机海浪理论,给出长峰波波浪要素的概率分布密度,并给出几种常见的海浪谱;进而讲述在不规则波作用下,船体动力响应的预报方法。

在本书编著过程中,得到要明伦、林维学、苏兴翹等同志的帮助。张锡成教授、赵德有副教授对本书作了详细审查并提出了宝贵意见。在编辑出版过程中得到虞润禄副教授、天津大学出版社孙维善、张金锬同志的大力支持,本人一并致以衷心感谢。

编著者 董艳秋

1988年4月

目 录

第一篇 波浪理论和波浪外荷	(1)
第一章 波浪理论	(1)
第一节 概述	(1)
第二节 基本方程和边界条件	(4)
第三节 微幅波理论	(6)
第四节 有限幅波理论简介	(16)
第二章 船舶波浪外荷	(24)
第一节 概述	(24)
第二节 原始切片理论	(27)
第三节 新切片理论简介	(33)
第四节 船体剖面的附加质量和阻尼系数	(45)
第五节 船舶波浪外荷实例	(55)
第六节 特殊船舶波浪上受力	(59)
第二篇 船舶水弹性理论	(67)
第三章 船体干模态	(68)
第一节 船体对称干模态	(69)
第二节 船体反对称干模态	(77)
第四章 船体广义质量、刚度、阻尼矩阵	(80)
第一节 模态分析法简述	(81)
第二节 船体对称振动的广义质量、刚度矩阵	(84)
第三节 船体反对称振动的广义质量、刚度矩阵	(89)
第四节 船体对称振动的阻尼系数	(97)
第五节 船体对称振动计算实例	(98)
第五章 船体对称振动的广义流体作用力	(104)
第一节 流体作用力	(104)
第二节 广义流体作用力	(106)
第三节 流体阻尼	(108)
第四节 流体附加质量、阻尼系数的计算结果	(109)
第六章 波激对称响应	(110)
第一节 波激对称振动方程及其解	(111)
第二节 典型船波激对称响应的计算分析	(112)
第三节 波激对称响应的特性	(122)
第七章 船体反对称振动的广义流体作用力	(126)
第一节 在斜浪中船和波的相对运动	(126)
第二节 流体作用力	(129)
第三节 广义流体附加质量、阻尼、刚度矩阵及波浪激振力	(131)

第八章	波激反对称响应.....	(135)
第一节	波激反对称振动方程及其解.....	(135)
第二节	两种特殊情况.....	(136)
第三节	集装箱船波激反对称响应.....	(141)
第九章	砰击响应.....	(148)
第一节	船底砰击力.....	(148)
第二节	船底砰击力引起的船体响应.....	(151)
第三节	砰击力和砰击响应计算实例.....	(156)
第三篇	不规则波作用下船体的响应预报.....	(161)
第十章	随机海浪理论概述.....	(161)
第一节	海浪要素的统计分布规律.....	(162)
第二节	海浪谱.....	(167)
第十一章	不规则波作用下船体的动力响应.....	(174)
第一节	波浪外荷及波激振动的短期预报.....	(174)
第二节	砰击预报.....	(179)
参考文献		(186)

第一篇 波浪理论和波浪外荷

海洋是船舶的环境条件。船舶的运动、受力以及船舶的振动等都与海洋环境条件密切相关。狂风巨浪吞没船舶的海上事故触目惊心。人类在和这种恶劣的自然条件斗争中认识并掌握了它的规律，建立了海浪运动的各种波浪理论，提出了计算船舶在波浪作用下运动和受力的“切片理论”等。虽然这些理论都引入一些简化条件，不能完全地反映客观情况，但还是能够满足设计和使用要求。

海浪是一种随机现象，可以用概率分析方法给出它的统计特征，或者用海浪谱表示，亦可从研究规则波入手，用若干规则波迭加描述。相应地，船舶在海浪作用下的运动和受力，也就有两种研究方法。自1953年圣·丹尼斯（St. Denis）把迭加原理引进船舶运动学之后，在线性范围内，船舶对规则波的响应得到迅速发展。本篇主要阐述经典波浪理论以及在规则波作用下船舶的波浪外荷。

第一章 波浪理论

第一节 概述

海洋中大约70%时间有浪。广义的海浪包括风浪、潮汐波、地震波（又称海啸）以及船行波等。本书只研究风浪。

风浪是由风力作用产生的浪。当风吹过平坦的海面时，海面上首先出现微小的毛细管浪，或称涟漪。这种浪主要由表面张力起控制作用，波高很小，传播速度很慢，看起来像皱纹一样。随着风力增大和作用时间增长，形成重力波。重力波是重力起控制作用的波。深水重力波的常见频率为0.05~1Hz。

风浪生成和发展的全部过程是很复杂的。经典波浪理论只考虑已形成的波，没有考虑风的作用。建立风浪物理理论仍是艰巨的任务。简单来说，风浪与风速、风时、风区等因素有关。

风速是指海面以上10m处风的速度。它对风浪的影响可通过波令 β_0 表示，即

$$\beta_0 = \frac{c}{V},$$

式中 c ——波速，
 V ——风速

β_0 为0.3—0.4时，对应风浪成长的初期，海面吸收风能后，风浪尺度增加很快。当 β_0 达到0.7—0.8时，风浪充分发展，海面上形成较长较高的大波。如果风继续作用，波长、波速仍在增加，但波高增加甚少。当 β_0 等于或大于1，亦即波速等于或大于风速时，风浪变成涌浪，风对涌浪几乎无明显的影响。观测资料表明，离开风区，涌浪的波速、波长仍继续增大，波高变小，风浪趋于平坦，属于内部能量的转换。

各地区的风速可以查看当地气象资料和天气图。如果没有海面以上10m处的风速资料，而只有其它高度的风速资料时，可按国际船舶结构力学会议（ISSC）提出的关系式换算

$$\frac{V_z}{V_{10}} = \frac{\lg z - \lg z_0}{1 - \lg z_0},$$

式中 V_z ——海面以上 z （m）高度处的风速；
 V_{10} ——海面以上10m高度处的风速；
 z ——已知风速在海面以上的高度；
 z_0 ——粗糙长度（m），当风速小于15m/s时， $\lg z_0 = -3.8$ ，当风速大于15m/s时， $\lg z_0 = -2.4$ 。

另外，若已知蒲福风级 B ，也可以求得海面以上10m处的风速

$$V_{10} = 0.836 \sqrt{B^3}, \quad (\text{m/s})$$

现将蒲福风标各级相应的 V_{10} 列于表1-1中。

表1-1 蒲福风标与 V_{10} 对应关系

蒲福风级	0B	1B	2B	3B	4B	5B	6B
风速 $V_{10}(\text{m/s})$	0	0.84	2.36	4.34	6.69	9.35	12.29
蒲福风级	7B	8B	9B	10B	11B	12B	
风速 $V_{10}(\text{m/s})$	15.48	18.92	22.57	26.44	30.50	34.75	

风时是指某一特定风速持续作用的时间，以小时（h）计。

风区是指风作用的水域，内海、湖泊称为有限水域，大洋、开阔水域称为广海。

风时长，风区大，风浪就大。

风的大小用风级给出。风作用下海面出现的情况，如浪花、飞沫、波形等称为“海况”，以海况等级给出。至于风作用下生成的风浪，常用波高、波长、周期表示，用浪（涌）级给出。风、浪、海况虽然有密切联系，但不可混为一谈。目前各国的浪级标准差别较大，这里只介绍我国和苏联的有关规定。表1-2是我国国家海洋局规定的浪级，表中 $\bar{H}_{\frac{1}{3}}$ 是指所有记录的波，按波高大小顺序排列，取其中 $\frac{1}{3}$ 的大波波高的平均值，通称有义波高。表1-3是苏联的浪级标准。表中波高是指所有记录的波，按波高的大小顺序排列，取居百分之三位的大波波高，通称超越概率为3%的保证波高。比如，有1000个波，按波高大小排列，其第30个大波的波高就是表1-3中的波高。另外，苏联关于海况的规定比较详细，将它列于表1-4中。

表1-2 我国国家海洋局规定的浪级

浪级	名称	浪高 (m)
0	无浪	0
1	微浪	<0.1
2	小浪	$0.1 \leq \bar{H}_1 \leq 0.5$
3	轻浪	$0.5 \leq \bar{H}_1 \leq 1.25$
4	中浪	$1.25 \leq \bar{H}_1 \leq 2.5$
5	大浪	$2.5 \leq \bar{H}_1 \leq 4.0$
6	巨浪	$4.0 \leq \bar{H}_1 \leq 6.0$
7	狂浪	$6.0 \leq \bar{H}_1 \leq 9.0$
8	狂涛	$9.0 \leq \bar{H}_1 \leq 14.0$
9	怒涛	$\bar{H}_1 \geq 14.0$

注：有义波高 $\bar{H}_1$ 在船舶工程中多以 H_1 表示。

表1-3 苏联涌浪等级

涌 级	涌 名 称	涌浪平均尺度		
		波高(m)	波长(m)	周期(s)
0	平静	—	—	—
1	微浪	<0.25	<10	<2
2		0.50	15	3
3	中浪	1.0	30	4
4		2.0	60	6
5		3.0	90	8
6	大浪	5.0	150	10
7		7.0	210	12
8		>7.0	>210	>12

表1-4 苏联海况等级

海况级别	海况名称	海况征象
0	完全平静	海平如镜
1	平静	波 纹
2		波峰不大, 开始破裂, 浪花为玻璃色
3	不平静	波浪不大, 但很触目, 其中有些波峰破裂, 形成白色绕旋的浪花——白浪
4		波浪具有十分明显的形状, 到处形成白浪
5		出现高大的波峰, 泡沫状的波顶占有很大面积, 风开始破坏波峰的浪花
6	风暴	波峰出现风暴波的长浪形状, 波峰上风所破坏的浪花开始沿斜面伸长成带状
7		风所破坏的浪花长带布满了波的斜面, 有几处达到波谷
8		浪花广阔而稠密成带, 布满了波斜面, 海面呈白色, 只有波谷有些地方还没有浪花
9	异常的风暴	整个海面布满了稠密的浪花层, 空气中充满了水点和飞沫, 能见度显著降低

风浪是一种复杂的流体运动, 研究的方法有两种: 一是流体力学方法, 把波浪看成是若干规则波的迭加; 二是概率统计方法, 用统计特征量或谱的形式表示。本章主要讨论用流体力学方法表示线性微幅波和非线性有限幅波。

第二节 基本方程和边界条件

一、基本方程

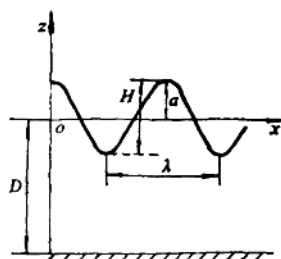


图 1-1 波动形式

某一瞬时, 风力作用于海面, 使静水面失去平衡。而重力作用, 使其恢复至平衡位置, 在重力和惯性力作用下, 形成波动。图1-1表示水深为 D 的海面上的波动。

假定水体是不可压缩的理想流体, 其连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

式中 u ——水质点在 x 方向的速度;
 v ——水质点在 y 方向的速度;
 w ——水质点在 z 方向的速度。

又假设风在很短的时段 τ 内作用于流体, 而后消失。风作用使流体受到瞬时压力 p' , 则流体的运动方程为

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p',$$

式中 V ——水质点的速度。

从 0 到 τ 积分得

$$V' - V = -\int_0^\tau \frac{1}{\rho} \text{grad} p' \cdot t,$$

式中 $V' - V$ —— τ 时段内流体速度的变化。

令瞬时压力 p' 的冲量为 Π ，即 $\Pi = \int_0^{\tau} p' dt$ ，故可得

$$V' - V = -\text{grad}\left(\frac{\Pi}{\rho}\right).$$

又根据不可压缩流体的连续条件，有散度 $\text{div} V' = 0$ 和 $\text{div} V = 0$ 。因此，得到

$$\text{div grad}\left(\frac{\Pi}{\rho}\right) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0$$

可见瞬时冲量 Π 满足拉普拉斯方程。在流体为无旋运动时，原速度场为势函数 ϕ_0 的梯度，亦即 $V = -\text{grad} \phi_0$ ，则

$$V' = -\text{grad}\left(\phi_0 + \frac{\Pi}{\rho}\right) = -\text{grad} \phi,$$

式中

$$\phi = \phi_0 + \frac{\Pi}{\rho}.$$

上式说明风作用后，流体仍保持无旋运动。

假如作用前流体为静止状态， $\phi_0 = \text{常值}$ ，则瞬时压力作用后的无旋运动为

$$V' = -\text{grad}\left(\frac{\Pi}{\rho}\right) = -\text{grad} \phi$$

故

$$\phi = \frac{\Pi}{\rho}.$$

可见风作用后的波动是无旋运动。根据理想不可压缩、无旋的条件，可设速度势为 $\phi(x, y, z, t)$ ，流体质点的速度为

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

其连续方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1-1)$$

流体的动量方程为

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0, \quad (1-2)$$

式中

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

式 (1-1) 和 (1-2) 即为波动的基本方程。

二、边界条件

波动的两个边界，一是自由表面，一是水底。

设自由表面为一曲面，其方程为

$$z = \zeta(x, y, t).$$

它对时间的导数为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

或写成

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

用速度势表示则为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (1-3)$$

这是自由表面的运动条件表达式。

下面考虑自由表面的动力条件。自由表面上压力为大气压 p_* ，因此是一个常数。由式 (1-2) 可写出

$$- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p_*}{\rho} + gz = 0.$$

$$\text{若令 } \phi^* = \phi + \frac{p_* t}{\rho},$$

对时间求导数，得

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_*}{\rho}. \quad (1-4)$$

因为 ϕ^* 与 ϕ 只差一含变量 t 的项，所以不影响速度。为方便起见，将 ϕ^* 就记为 ϕ 。将式 (1-4) 代入 (1-2) 得

$$\frac{p - p_*}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 - gz. \quad (1-5)$$

在自由表面上，可写成

$$\left(- \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \Big|_{z=\zeta} = 0. \quad (1-6)$$

式 (1-3) 和 (1-6) 就是波动的自由表面条件。

对于水底，即 $z = -D$ 处，因流体法向速度为零，故波动的水底条件可写成

$$V_n = 0,$$

或

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (1-7)$$

第三节 微幅波理论

一、微幅波方程及其解

假定波动的振幅相对波长来说是很小的，或者说波动振幅很小，这就是微幅波理论的基本出发点。1845年由艾利 (Airy) 首先提出微幅波理论，所以又称艾利波理论。

根据上述假设，波动基本方程及边界条件将大大简化。

因为波面升高 ζ 很小, 故 $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ 非常小, 而且 $z = \zeta$ 可以近似地用 $z = 0$ 代替。这样, 自由表面运动条件式 (1-3) 中的非线性项可以略去, 写成

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1-8)$$

因为波幅很小, 所以水质点运动的速度缓慢, 故动量方程中的非线性项 $\frac{1}{2}v^2$ 可以忽略不计。这样自由表面的动力条件, 式 (1-6) 可写成

$$- \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + g\zeta = 0. \quad (1-9)$$

将式 (1-9) 对时间求导数后代入式 (1-8), 得

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0}. \quad (1-10)$$

式 (1-10) 是自由表面的运动条件和动力条件的综合表达式, 通称柯西-波依松 (Cauchy-Poisson) 条件。式 (1-1) 连续方程及式 (1-7) 水底边界条件都不变。

综上所述, 微幅波速度势 $\phi(x, y, z, t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

及边界条件

$$\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} = 0,$$

和

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-D} = 0.$$

此外, 势函数 $\phi(x, y, z, t)$ 还必须满足初始条件。

水面受瞬时压力扰动后的初位移为

$$z = \zeta(x, y, t) = \zeta(x, y, 0), \quad (1-11)$$

初速度为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} = g\zeta(x, y, 0). \quad (1-12)$$

而 $\phi(x, y, z, 0) = \frac{1}{\rho} \Pi(x, y, z)$, 其中 $\Pi(x, y, z)$ 仍表示初冲量。

根据数理方程可知, 只要初始条件式 (1-11) 和 (1-12) 确定, 该波动问题有唯一解。下面用分离变量法求解。

令微幅波速度势 $\phi(x, y, z, t) = P(x, y)Q(z)R(t)$, 将 ϕ 代入连续方程 (1-1), 得

$$Q \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + P \frac{d^2 Q}{dz^2} = 0. \quad (1-13)$$

整理后得

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{dz^2}.$$

因该式左右两边为不同变量的函数，所以只能等于常数 k^2 。这样，就分解成两个方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k^2 P = 0, \quad (1-14)$$

和
$$\frac{d^2 Q}{dz^2} - k^2 Q = 0. \quad (1-15)$$

现由方程 (1-15) 求解 $Q(z)$ 。

令 $Q(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$, (1-16)

其中 A 、 B 为任意常数，由水底条件式 (1-7) 可得

$$\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=-D} = kAe^{-kD} - kB e^{kD} = 0.$$

因 $k \neq 0$ ，故 $Ae^{-kD} - Be^{kD} = 0.$

即令 $Ae^{-kD} = Be^{kD} = \frac{1}{2}G,$

式中 G 是设定的常数，因此

$$A = \frac{G}{2e^{-kD}},$$

$$B = \frac{G}{2e^{kD}}.$$

将它们代入式 (1-16) 得

$$Q(z) = \frac{G}{2} (e^{k(z+D)} + e^{-k(z+D)}) = G \cosh k(z+D).$$

再将 $Q(z)$ 代入式 (1-13) 得

$$\varphi(x, y, z, t) = P(x, y) G \cosh k(z+D) R(t). \quad (1-17)$$

对式 (1-17) 求导，得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = P(x, y) G \cosh k(z+D) \frac{d^2 R}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = P(x, y) G K \sinh k(z+D) R(t).$$

代入柯西-波依松条件式 (1-10)，得

$$\frac{1}{R(t)} \frac{d^2 R(t)}{dt^2} = -gk \tanh kD. \quad (1-18)$$

令 $\omega^2 = gk \tanh kD$, (1-19)

则式 (1-18) 可改写成

$$\ddot{R} + R\omega^2 = 0.$$

式中 $\ddot{R}$ 表示对时间的二阶导数，从中解得

$$R(t) = b \sin(\omega t + \varepsilon),$$

其中 b 和 ε 由初始条件式 (1-11) 及 (1-12) 决定。 $R(t)$ 亦可写成复数形式 $R(t) = b e^{i(\omega t + \varepsilon)}$ 或 $R(t) = b e^{-i(\omega t + \varepsilon)}$ 。

将 $R(t)$ 的表达式代入式 (1-17), 得

$$\varphi(x, y, z, t) = P(x, y) G' \cosh k(z + D) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (1-20)$$

式中 G' 为任意常数, 下面仍记为 G 。

式 (1-19) 中, ω 是无穷的离散数, 因此有

$$\omega_n^2 = k_n g \tanh k_n D,$$

式中, n 为 1、2、3... 自然数。

ϕ 的通解为

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cosh k_n(z + D) \sin(\omega_n t + \varepsilon_n) P(x, y).$$

下面继续讨论式 (1-20) 中的 $P(x, y)$ 。从式 (1-14) 中不能解出 $P(x, y)$, 所以只得令 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, 即表示波动只在 x 方向进行, 水质点在 y 方向速度为零。代入式 (1-13) 得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

因此, 式 (1-14) 简化为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k^2 P = 0.$$

这就是大家熟悉的振动方程。它的解为

$$P(x) = b' e^{-ikx} \quad (\text{或者 } p(x) = b' e^{ikx}).$$

代入式 (1-20), 得

$$\phi(x, z, t) = G \cosh k(z + D) e^{i(\omega t - kx + \varepsilon)}.$$

取其虚部得

$$\varphi(x, z, t) = -G \cosh k(z + D) \sin(kx - \omega t - \varepsilon). \quad (1-21)$$

式 (1-21) 为 xoz 平面内的微幅波速度势, 又称平面进行波的速度势。由所得的速度势, 可以推导出微幅波的一些重要特征。

二、微幅波的特征

1. 简谐自由表面形式

将式 (1-21) 代入式 (1-9), 得

$$\xi = \frac{G\omega}{g} \cosh kD \cos(kx - \omega t - \varepsilon).$$

令

$$a = \frac{G\omega}{g} \cosh kD$$

则

$$\xi(x, t) = a \cos(kx - \omega t - \varepsilon). \quad (1-22)$$

• 本章讨论沿 x 轴正方向传播的平面进行波, 若波浪向 x 轴反方向传播, 则 $\xi(x, t) = a \cos(kx + \omega t + \varepsilon)$ 。

式中 a ——微幅波波幅,

k ——波数, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

λ ——波长;

ω ——波动圆频率, $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

T ——波动周期。

式 (1-22) 表示微幅波自由表面形式。可见微幅波是一简谐形式。

将式 (1-22) 代入式 (1-21) 中, 得

$$\phi(x, z, t) = -\frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+D)}{\cosh kD} \sin(kx - \omega t - \varepsilon). \quad (1-23)$$

对于深水情况, 式 (1-19) 可写成

$$\omega^2 = gk. \quad (1-24)$$

又因, 式 (1-23) 中 $\frac{\cosh k(z+D)}{\cosh kD} \approx e^{kz}$,

故深水微幅波速度势为

$$\phi(x, z, t) = -\frac{a\omega}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t - \varepsilon). \quad (1-25)$$

2. 波周期 T 与波长 λ 的理论关系

将 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 代入式 (1-19) 得

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{\lambda} g \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} D\right).$$

整理后得

$$T^2 = \frac{2\pi\lambda}{g} \operatorname{ctanh}\left(\frac{2\pi}{\lambda} D\right) \quad (1-26)$$

或

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda} D\right). \quad (1-27)$$

根据波传播速度的定义可导出波速

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi D}{\lambda}\right). \quad (1-28)$$

从上述理论关系中看出, 波周期、波长及波速都与水深 D 有关。

(1) 深水情况

当水深 D 与波长 λ 的比值等于或大于 $\frac{1}{2}$ 时, 即为深水情况。常以 $\frac{D}{\lambda} \geq \frac{1}{2}$ 或 $kD \geq \pi$ 表示。

此时, 因为 $\tanh kD \approx 1$, 所以式 (1-26)、(1-27) 和式 (1-28) 可简化为

$$\left. \begin{aligned} T^2 &= \frac{2\pi\lambda}{g}, \text{ 即 } T = 0.8\sqrt{\lambda} \\ \lambda &= \frac{gT^2}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

$$c = \frac{gT}{2\pi}.$$

(2) 极浅水情况

当水深 D 与波长 λ 之比值等于或小于 $\frac{1}{20}$ 时, 称为极浅水情况, 以 $\frac{D}{\lambda} \leq \frac{1}{20}$ 或 $kD \leq 0.1\pi$ 表示。

此时, 因为 $\tanh kD \approx kD = \frac{2\pi D}{\lambda}$, 故式 (1-26)、(1-27) 和式 (1-28) 写成

$$\left. \begin{aligned} T^2 &= \frac{\lambda^2}{gD}, \\ \lambda &= T(gD)^{\frac{1}{2}}, \\ c &= (gD)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

(3) 浅水情况

当水深在深水 and 极浅水之间时, 称浅水情况。以 $\frac{1}{20} < \frac{D}{\lambda} < \frac{1}{2}$ 或 $0.1\pi < kD < \pi$ 表示。

浅水情况波周期与波长的关系式就是式 (1-26) 和 (1-27), 波速由式 (1-28) 决定。有时, 用无因次表达式表示水深情况。

令 $\delta = \frac{H}{\lambda}$, 称为波陡; $\eta = \frac{D}{H}$, 称为相对水深。则深水情况可表示为 $\eta\delta \geq \frac{1}{2}$, 浅水情况可表示为 $\frac{1}{20} < \eta\delta < \frac{1}{2}$; 极浅水情况写成 $\eta\delta \leq \frac{1}{20}$ 。

3. 水质点运动轨迹

水质点在 x 方向、 z 方向的速度分别为

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(z+D)}{\cosh kD} \cos\theta,$$

$$w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{agk}{\omega} \frac{\sinh k(z+D)}{\cosh kD} \sin\theta,$$

式中

$$\theta = kx - \omega t - \varepsilon. \quad (1-31)$$

因此, 质点绕某点 (x_0, z_0) 运动可表示为参数方程 *

$$x = -\int_0^t u dt = x_0 - a \frac{\cosh k(z_0 + D)}{\sinh kD} \sin\theta,$$

$$z = -\int_0^t w dt = z_0 + a \frac{\sinh k(z_0 + D)}{\sinh kD} \cos\theta.$$

由质点运动的参数方程, 可写出它的轨迹方程

$$\frac{(x-x_0)^2}{A^2} + \frac{(z-z_0)^2}{B^2} = 1, \quad (1-32)$$

式中 A ——椭圆长轴, $A = a \frac{\cosh k(z_0 + D)}{\sinh kD}$;

* 注意到 $gk/a^2 = c^2 \tanh kD$