高等工科数学

陈雄南 主编

4

上海科学技术文献出版社

高等工科数学

第四册
概率统计方法

陈雄南 主编
邢华良 张大豫
沈关生 陈惠忻 编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301号

高等工科数学
第四册
概率统计方法
陈雄南　主编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号)
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 10.75　字数 260,000
1991 年 10 月第 1 版　1991 年 12 月第 1 次印刷
印数：1—6,300
ISBN 7-80513-825-7/O·58
定 价：4.50 元
《科技新书目》247-344

前言

在上海高校工科数学协作组的亲切关怀下，我们着手编写了这套《高等工科数学》系列教材。我们的指导思想是，要着重体现工科数学课程教学基本要求和近代工程技术特点，强调专业需要和现代计算，在内容的精简、更新和能力的培养方面作出努力。至于在教材体系方面暂不作较大的更动，希望在今后的教学实践中，和大家共同探索。

全书分若干册出版，它们是一元微积分，多元微积分，线性代数、概率统计方法，复变函数与积分变换，数学物理方程及部分应用数学课程内容。供普通高校和成人高校工科学生学习用，也可作为广大工程技术人员自学参考。

本书为第四册，主要介绍概率论和数理统计。书中概率基础部分简明扼要，不显烦琐，便于掌握；统计方法介绍全面（如正交试验等），有利实际使用；检验方法注重分析和解题能力，编排上有新意；而系统辨识是当前新兴数学学科，在同类教材中尚不多见。

本书由陈雄南主编，邢华良（上海水产大学）、沈关生（上海海运学院）、张大豫（上海工程技术大学）、陈惠忻（上海城建学院）分工写出初稿。经多次反复讨论修改后，由茆诗松教授主审定稿。

限于编者水平，书中谬误难免，敬请不吝指教。

一九九〇年十一月

目　　录

第一章 概率基础

概率论是数学的一个分支，它是研究随机现象规律性的一门学科。随着生产实践和科学技术的不断发展，对随机现象的研究已日趋必要。因此，概率论如今已成为科技工作者必备的一种数学工具。它也是数理统计的理论基础。本教材仅就概率论中最基本的内容作些介绍，为今后实际应用提供必要的基础知识。

§1 概率的基本概念

一、随机现象与随机试验

宇宙间所发生的现象是多种多样的。其中有一类现象在一定条件下必然会发生(或必然不会发生)。如在地球上上抛一重物必然要下落；在标准大气压下水在0℃时结冰，而在100℃时沸腾，等等．凡此种种都是在一定条件下必然会发生的现象。反之，地球上上抛一重物不下落；在标准大气压下水在0℃时沸腾，而在100℃时结冰，等等。凡此种种则都是在一定条件下必然不会发生的现象。我们将这类现象统称为*确定性现象*。大家刚学过的高等数学和线性代数就是研究这类确定性现象的数学工具。然而在宇宙间也普遍存在着另一类现象，那就是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。例如：

相同条件下抛同一枚硬币，国徽一面(正面)朝上；

某工人连续2个月不出次品；

班上任意挑选10个学生，他们出生于同一月份；

检验一批罐头食品时，抽查3听全部合格。

凡此种种，其结论可能成立，也可能不成立，即它们都是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

在本课程中将各种科学实验、甚至对某一事物的某种现象的观察都统称为一个试验。例如，上面讲到的抛一枚硬币观察出现正、反面，每抛一次就称为做一次试验。

人们经过长期实践并深入研究之后发现，这类现象虽然就每次试验的结果而言呈现出不确定性，但若在相同条件下进行大量重复试验时，其结果却又会呈现出某种固有规律性。例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的大致有半数；多次重复班上任选10个学生观察他们的出生月份，发现这10个学生中至少有2人出生于同一月份。

我们将这种在个别试验中呈现不确定性，而在相同条件下，大量重复试验中呈现某种固有规律性的现象称为*随机现象*。

概率论和数理统计就是研究这种随机现象固有规律性的一门科学。它是通过随机试验来研究随机现象的。所谓随机试验就是指满足下列三个条件的试验：

i）可在相同条件下重复试验；

ii）具有多种可能结果，且能预知其所有可能的结果；

iii）每次试验完成前，却又无法预知该次试验的确切结果。

随机试验亦简称试验，并以字母 E 记之。如抛硬币就是一种随机试验，因为它可以在相同条件下重复抛掷，其结果仅有正面朝上或反面朝上两种可能，而每次抛掷结束前却又无法预知究竟哪面朝上。

二、随机事件与样本空间

我们将随机试验所获得的每个具体结果称为一个*随机事件*。例如抛硬币试验中的正面朝上（反面朝上）；某工人2个月

不出次品(出次品);班上任选10个学生出生于同一月份(不同月份);抽查3听罐头食品全部合格(部分合格或全不合格)等等都是随机事件。确切地说,就是在个别试验中其结果呈现不确定性,而在大量重复试验时又呈现某种规律性的事情便是随机事件,简称事件,并以大写字母A、B、C、…表示。

为了说明下面几个有关概念,让我们来研究"掷骰子"试验。显然骰子每掷一次就是一个试验,每掷完一次所得的点数就是一个事件。因此掷得"2"点是一个事件,掷得"4"点或"6"点也都是事件。那么掷得"偶数点"呢?大家肯定会讲这当然也是事件。但若加以仔细考察,不难发现这里却又有一定区别。由于"偶数点"是由"2点"、"4点"、"6点"三者之一所构成,亦即"偶数点"这一事件又可以分解为"2点"、"4点"和"6点"这三个事件,而"2点"、"4点"或"6点"已无法再细分为其它更简单的事件。于是我们就把"2点"、"4"点"、"6点"(当然也包括"1点"、"3点"、"5点")分别称为掷骰子这一试验中的基本事件,以示区别。为此,我们有:

1°基本事件　它是由试验直接观察而得且无法再细分的结果,是该试验中最简单的事件。今后基本事件以小写字母e_1,e_2,…表示。

显然,任一事件是基本事件或由基本事件所组成。

对应于确定性现象的结果,又有:

2°必然事件　它是指在一定条件下必然会发生的事件,并以字母S表示之。

3°不可能事件　它是指在一定条件下必然不会发生的事件,并以希腊字母ϕ表示。

必然事件和不可能事件本身并无不确定性(随机性),但为今后讨论方便计,我们仍将它们当作特殊的随机事件。

4°样本空间　试验 E 的一切基本事件所组成的集合，称为样本空间，记为 S。

显然，集合 S 中的元素就是 E 的基本事件．按集合的记号，有 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，其中 e_i（$i=1, 2, \cdots, n$；n 为有限或无限）为 E 的基本事件。有时也简记为 $S=\{e\}$。

按照唯物辩证法的观点，世间一切事物都是相互联系彼此制约的。因此，当我们研究随机事件及其规律性时，也必须从它们的联系中去分析问题。而弄清事件间的关系及其运算，对于推导有关公式及计算事件的"概率"必将带来极大的方便。

三、事件间的关系及其运算

为了直观地理解事件间的关系，先考察一个实例：罐头厂在检验圆柱形的空罐头盒子时，要求罐头的长度和直径都符合规格才算合格。这时就会有"罐头合格"、"罐头不合格"、"长度合格"、"直径不合格"、"长度不合格而直径合格"等等一系列事件，而这些事件之间又有一定的联系。于是，有：

1. 事件的包含与相等　设有事件 A 及 B，若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$．为方便计，今后简称这种关系为"A 必 B"。

例如检验圆柱形空罐时，"长度不合格"（设为事件 A），必然导致"罐头不合格"（设为事件 B），则 $B\supset A$。

样本空间 S 的引进，使我们可以用图形直观地表达事件间的关系。所用的图形称为文氏图（John Venn，英国数学家，1834～1883）。在该图中，样本空间 S 用一个矩形区域表示，矩形中的点表示样本空间 S 中的元素（即基本事件，从而 S 的基本事件亦称为 S 的样本点）。随机事件就用矩形区域内的圆形区域表示。于是 $B\supset A$ 便可由图 1-1 来表示。

若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

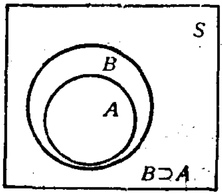

图 1-1

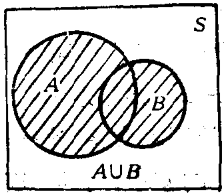

图 1-2

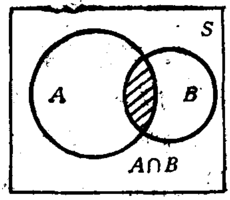

图 1-3

2. 事件的和　事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$，并简述为“A 或 B”。

例如“罐头不合格”这一事件便是“直径不合格”与“长度不合格”这两个事件的和事件。其文氏图见图 1-2 中的阴影部分。

两个事件的和可以推广到有限个或可列个的情形，即 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\left(\text{或}\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)$；$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…中至少有一个发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n，…的和事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots\left(\text{或}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)$。

3. 事件的积　事件 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$（或 AB），并简述为“A 且 B”。

例如“罐头合格”这一事件便是“直径合格”与“长度合格”这两个事件的积事件。其文氏图为图 1-3 中的阴影部分。

两个事件的积也可推广到有限个或可列个的情形，即 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\left(\text{或}\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k\right)$；$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…同时发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n，…的积事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$

$\cap \cdots \left(或 \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \right)$.

4. *事件的差* 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$，并简述为"A 不 B"。

例如"直径合格但长度不合格"这一事件便是"直径合格"与"长度合格"这两个事件的差事件。其文氏图为图 1-4 中的阴影部分。

5. *事件的斥* 若 A 与 B 不可能同时发生(即 $A \cap B = \phi$)，则称 A 与 B 是互斥(亦称互不相容)事件。

例如"罐头合格"与"罐头不合格"是互斥的。其文氏图见图 1-5. 当 A, B 互斥时，$A \cup B$ 亦常写成 $A+B$.

显然同一试验下的基本事件都是互斥的。

6. *事件的逆* 若 A 与 B 中有且仅有一发生的事件(即 $A \cup B = S$, $A \cap B = \phi$)，则 A 与 B 称为互逆事件(亦称 A 与 B 互为对立事件)。事件 A 的逆事件常记作 $\bar{A}$. 其文氏图如图 1-6所示。

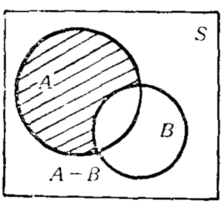

图 1-4

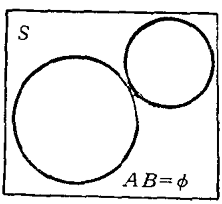

图 1-5

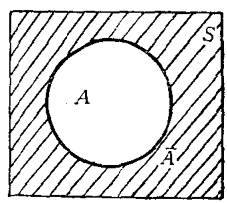

图 1-6

从上面的讨论可见，概率论中事件之间的关系与集合论中集合之间的关系是一致的。这是因为随机事件是基本事件，或由基本事件所组成。引入样本空间后，试验 E 的事件便是样本

空间 S 中的子集。于是事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生。特别，必然事件就是样本空间 S；不可能事件就是空集 ϕ. 从而，我们常常可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算来分析事件间的关系。

按照上述事件间关系的定义，不难验证事件间的运算还符合如下一些运算规律：

1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$。

3）分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

4）对偶律　（Demorgan 公式）

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

5）$A-B=A\cap\overline{B}$，意即 A 与 B 的差等于 A 与 $\overline{B}$ 之积。

现以对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 为例，说明这类问题的证明方法（事实上也就是通常证明两个集合相等的方法）。

证　设 $\forall e\in\overline{A\cup B}\Rightarrow e\,\overline{\in}\,A\cup B\Rightarrow e\,\overline{\in}\,A$ 且 $e\,\overline{\in}\,B\Rightarrow e\in\overline{A}$ 且 $e\in\overline{B}\Rightarrow e\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

另一方面，$\forall e\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow e\in\overline{A}$ 且 $e\in\overline{B}\Rightarrow e\,\overline{\in}\,A$ 且 $e\,\overline{\in}\,B\Rightarrow e\,\overline{\in}\,A\cup B\Rightarrow e\in\overline{A\cup B}\Rightarrow\overline{A\cap B}\supset\overline{A}\cap\overline{B}$.

于是按事件相等的定义，便有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

四、概率的定义

概率的直觉含义对大家来说是并不陌生的。人们常说办成某件事有多大的把握。例如有人说："我有 80% 的把握能跳过 1.3 米。" 跳过 1.3 米是一个随机事件，即可能跳过也可能跳不过，亦即能跳过仅仅是种可能性，那么能跳过的可能性究竟有多大呢？80% 便是能跳过 1.3 米这一随机事件发生可能性大小

的一种数量标志，80%这一数量也就被称作此人能跳过1.3米的概率。所以粗略地说，概率就是事件发生可能性大小的数量标志。概率的定义曾是概率论发展史上人们长期探讨的课题，随着数学工具的不断发展以及对概率概念认识的不断深化，概率由古典定义、统计定义而发展为公理化定义，现就常用的古典定义和统计定义分别叙述于下。

1. 概率的古典定义

引例1 乒乓球比赛前，裁判员常用抛掷一个抽签器来决定谁先发球。“抽签器”是一个均匀的圆形塑料片，一面画有一个红色圆圈，另一面为一绿色圆圈。裁判员将它抛掷后如果红圈朝上表示甲方发球。试问甲方得发球权的可能有多大？

由于裁判员每次抛掷的结果有且仅有“红圈朝上”（记作事件A)或“绿圈朝上”(记作事件B)，故样本空间$S=\{A, B\}$，样本空间中基本事件的总数为2.由于“抽签器”均匀对称，所以事件A或B发生的可能性是相等的，于是事件A(即甲发球)发生的可能性为1/2。像这种样本空间由两个等可能的基本事件所组成的实例并不少见。例如“抛硬币”试验，其出现正面或反面的可能性是相等的。又如早在公元前两千多年，我国人口统计中就发现男、女婴儿出生率近似相等。

引例2 某农机厂加工稻麦收割机上的一个万向接头，要在一个均匀、对称的立方体钢块上打孔，如果将立方体钢块的六个面编好号，且把“从第i面打孔”的事件记作A_i($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).求A_3发生的可能性有多大？

在大批生产时，工人师傅是随手拿来加工的，因此从哪一面打孔是随机现象，它包括六个随机事件。由于立方体钢块是均匀的、对称的，在相同条件下做大量重复试验将表明，从六个面的任何一面打孔的可能性都相等。因此，这六个事件是等可能事

件．本例的样本空间为：$S=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$，样本空间中基本事件的总数为6．故$A_3$(即从第三面打孔)发生的可能性为1/6．

"掷骰子"试验可类比此例进行讨论．

引例3 设有一批产品总数为100件，其中正品95件，次品5件．如果从这100件中任意抽取1件，试问抽得次品的可能性有多大？

任抽1件可能抽到100件产品中的随便哪一件，即总共有100个可能的结果（即基本事件的总数为100)，而且每种结果出现的可能性都相等．由于次品共有5件，所以抽得次品这件事包含其中5个可能结果（即抽得次品这一事件中所包含的基本事件数为5)．因此抽得次品的可能性应是5%．

在产品质量检验中，对于外观大致相同的一批产品，经常从中抽取少数几件进行检验，在抽检中每个产品受到检验的可能性是相等的．

将上述各例加以抽象，便得

概率的古典定义 设样本空间里基本事件的总数为一有限数n，每一基本事件等可能地发生，又事件A中所包含的基本事件数为$k(k\leqslant n)$，则定义事件A发生的概率为k/n，记作

$$P(A)=k/n \tag{1}$$

由于这类概率问题要求基本事件等可能地发生，故亦称为等可能概型．又由于这类概率问题是概率论早期所研究的对象，故又常称为古典概型．

概率的古典定义是在一种特殊情形下给出的，那就是假定试验的基本事件的总数是有限的，且各基本事件是等可能地发生的．而一般的随机试验当然不一定有这样的等可能性．例如"明天的天气"这一随机现象，它可能包括"明天天晴"，"明天多