

金属压力加工的现代力学原理

汪家才 著

清华大学出版社

金属压力加工的 现代力学原理

汪家才 著



冶金工业出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍金属压力加工问题的变分解法。这是金属成型力学中近十年来发展比较快也比较新的领域。它通过设定流函数在变形区建立连续速度场,利用连续体力学的极值原理求解,用这种方法可求得应变场、应力场和边界外力,而且可以达到事先指定的精度。本书按连续体力学的体系,先介绍张量场论的知识,然后分章讨论应变场、速度场、应力场、守恒定律和本构方程。对于泛函分析、保角变换和变分法也作了专门介绍。最后一章是求解的实例。

本书以受过工科大专教育的读者为对象,可供金属压力加工和冶金机械专业的大学生和研究生阅读,也可供金属塑性成型方面的研究人员和教师在工作中参考。

金属压力加工的现代力学原理

汪家才 著

责任编辑 葛志祺

冶金工业出版社出版发行

(北京朝阳区大屯路钱院北巷19号)

新华书店总店科技发行所经销

冶金工业出版社印刷厂印刷

850 × 1168 1/32印张 13 字数 332 千字

1991年5月第一版 1991年5月第一次印刷

印数00,001~2,000册

ISBN 7-5024-0817-7

TG·118 定价12.50元

ABSTRACT

A systematical introduce to variational method of solution of metal forming problems is given in this book. The recommended method is a new and quickly developing field in the metal forming theory. By this method a continuous velocity field is assumed in the form of a flow function, and, the problem could be resolved with the aid of extremum principle for continuum. Using this method, the strain field, stress field, and the external forces may be obtained in a predicted accuracy. According to stylistic rules of continuum mechanics, in the first chapters of this book have been discussed tensor field, velocity field, strain field, and stress field. A special attention have been put to the conservation laws and constitutive equations separately. In order to form a complete conception for readers, a outline is also given to functional analysis, conformal mapping and variational calculus. In the last chapter of this book a series of examples of solution is shown.

This book is intended for persons of institutions of higher education, those as students and graduate fellows specialized in metal forming.

序

一、金属压力加工力学及其任务

金属压力加工原理作为一门学科，习惯上分为两个分支，即金属压力加工的金属学原理和力学原理。本书是讲金属压力加工的力学原理的。

金属压力加工力学的任务是：

1) 研究给定的压力加工过程（轧制、锻造，挤压，拉拔等）所需的外力；外力和变形的外部条件之间的关系，例如和工具形状、变形方式、摩擦条件之间的关系；这个外力也是设计机器的基本依据。

2) 研究变形金属内部的应力场，应变场（或应变速度场）和边界位移，从而可以防止加工过程中金属内部发生破坏，或者力图造成这种“破坏”（例如穿孔过程），显然，对应力场的研究反过来可以提高所求得的外力的准确性。

3) 研究新的，更为合理的加工过程，提高加工效率，节省能耗。

二、金属压力加工力学所用的方法

直到20世纪60年代，压力加工力学中的主要方法是所谓初等解析法。方法的特点是认为变形是或多或少均匀的，对于变形区内的应力不作仔细研究，用比较笼统的平衡条件去求外力。这就是目前仍广泛采用的工程计算法。用初等解析法求得的外力，在经过一系列修正以后，还是可信的。这种方法在今天仍有重要价值。

由于用初等解析法难以准确地计入金属的强化，又不能求得变形区内部的应力分布，所以60年代中期出现了视塑性法。通过在变形体内预先嵌入细密的网格，在变形以后将畸变的网格取出

并放大, 可以获得变形图象, 甚至计算出应力分布。在当代, 视塑性法的一种——密栅云纹法获得了广泛的应用, 并成为检验一切理论的和工程的计算方法准确性的有力工具, 但是视塑性法一般只能检验而不能预见。

对于平面应变问题, 用一种古老的方法——滑移线法, 可以准确地算出应力和应变, 但金属的强化不能计入, 而且对于稍复杂的变形区形状, 用滑移线方法求解会遇到数学上的巨大困难。

60年代后期, 出现了塑性有限元法。此方法可以用于边界形状复杂的情况, 也可以计入强化, 计算精度只取决于划分的网格多少和所取变形增量步的大小。可惜它给出的解过于离散, 计算的结果可以描述应力和应变, 但不能预见, 即不能用于分析。此方法对于几何参数和材料性能参数的改变, 显得不够灵活, 但是无论如何, 有限元法的应用, 确是当代连续体力学中的奇迹。

三、关于连续体力学的极值原理

20世纪50年代初, 著名英国力学家R. 希尔 (Hill) 在总结前人成果的基础上, 以完整的形式证明了可变形连续体力学的极值原理^[1]。极值原理的现代表述详见本书第7章。极值原理之一的上限原理是说: 对于一个给定的压力加工过程, 金属变形时总是产生这样的速度场, 即力图使所消耗的变形功率最小。如果我们能设定出各种可能的速度场, 由它们一一算出变形功率和边界外力, 并比较这些功率, 则与较小的变形功率相对应的边界外力是较真实的外力, 它不小于真外力, 称它为真外力的上限。

极值原理引起学者们很大的兴趣。1959年, 英国人W. 约翰逊用上限原理来求解金属压力加工的平面问题^[11], 1960年, 日本人工藤英明 (H. Kudo) 用极值原理来求解轴对称空间问题^[7]。由于设定连续的速度场比较困难, 所以他们最初设定的场是由一些刚性块组成的。在平面问题中刚性块是三角形块, 在轴对称问题中刚性块则是空间回转体单元块, 变形区内全是刚性块, 而刚性块内部是无应变的。当工具, 例如轧辊或挤压头, 有一个运动

速度时,这些刚性块会发生相互搓动,利用作一种叫速端图(Godograph)的图解法,可以求出这些刚性块之间相互搓动的速度,而搓动面上的力则设为屈服剪应力,于是可以计算出“变形”功率和边界外力,进而求得外力上限。这类方法在文献中称为上限法。

上限法的优点是只需进行几何和三角函数的运算,繁而不难。但由于对变形区的这种处理过于粗略,所以求得的外力不太精确,强化不能计入,也无从谈求应力场的问题。

进入70年代以来,压力加工力学向更严格更精确的方向发展,原来那种设定刚性块的求解方法,逐渐为人们所不取,发展了在变形区内设定连续速度场的方法(就是设定速度的函数式)。由连续的速度场可以求出连续的应变速度场,这样可以更准确地计算变形功率。让速度场函数中有待定系数,用数学方法研究变形功率,使之极小化,求出待定系数,于是得到速度场和应变速度场的最终表达式。边界外力和应力都可以在任意指定的精度内算出,连续力学的极值原理得到了充分的体现和应用。在当代,运用这一方法的代表人物可以举出美国的V. 纳格帕(Nagpal)[9]和苏联的Г.Н.古恩(Гу́н)[2]。

具体说来,金属压力加工力学的这一进展应归因于:

1) 用张量形式表达的极值原理已达到相当整齐和完美的程度,特别是对于具有复杂强化性质的介质也能证明极值原理的存在[3],见本书第7.6节,理论上已无后顾之忧。

2) 由于边缘科学的交叉发展,流体力学的某些概念和理论伸入到压力加工力学中来。通过设定流函数这一方法,一开始就将变形区三维速度场采用流函数表达,使求压力加工问题应变速度场的解析解有了可能,见本书式3-94。

3) 根据流场的性质,运用场论知识,将速度场区分为基础场和附加场,这使流函数的设定变得相对简单和在方法上统一,见本书第3.8.4节。

4) 基础速度场可以通过复变函数的保角变换法得到。这样

一个无散又无旋的基础速度场不包含未知量，它自身就可以给出一个较好的边界外力近似解。有关的原理见第8.3节，实际应用见第9.1节。

5) 对于附加速度场，总可以根据泛函空间理论，将其用希尔伯特空间相对完备的坐标函数系统表达。这个系统连同基础场一起，就可以无限逼近真实速度场。有关的原理见8.1节，实际应用可见第9章。

6) 变形功率是速度场的泛函。为使变形功率取极小值，可以利用变分法或优化法，见8.2节。

7) 计算在计算机上完成。算式中采用无量纲参数，事实上对每一类过程（例如轧制、挤压等类过程）只要编一个程序，变形功率是否达到了极小，也可由计算机作图直接看出，例如图9-12。

四、关于本书的结构

本书的目的在于对压力加工力学的上述方法给出一个有系统的叙述。这一方法在文献中有时称为压力加工问题的变分解法，其实应该称为“通过流函数设定连续速度场的上限法”，至于是否用变分法求解，并不是关键。由于本书的基本体系是现代连续介质力学，所以书名叫“金属压力加工的现代力学原理”。

第1章扼要介绍了有关场论的知识，重点是笛卡尔张量，它是全书的基本工具。第2章主要是介绍拉格朗日变量和欧拉变量，以及小变形应变张量。第3章速度场是全书的重点，关于流线、流函数、势函数、曲线坐标等重要概念都集中于这一章。第4章应力场是初知弹性力学的读者所熟悉的，故写得简略。第5章守恒定律是读者从理论力学中熟知的，但现在它是对无穷多质点系，即对连续体写出的。特别是动量守恒导致平衡方程，而动量矩守恒导致剪应力互等定理，这是和弹性力学中的叙述不同的。能量方程是证明极值原理的出发点。至于热力学方程，这里只一般提到，目的是为了照顾该章的总标题，本书中不涉及热应

力问题。第6章本构方程是接第1章最后一节而来的，重点是第6.4和6.5两节，但为了照顾一般读者的需要，本章介绍了塑性力学的有关知识，从中可以看到塑性力学和连续体力学的联系。第7章是本书的又一重点，其中分别对理想刚塑性体和强化介质证明了极值原理。这一章读起来可能困难些，如果读者从别的初等读物中对极值原理已有所了解，则本章可暂不细读，但对第7.5和第7.6两节的表达方式应能理解，后面要用到。第8章分3节介绍3个数学方法，连同第1章的二阶张量理论，共同组成本书的四项数学工具。这些内容已尽量写得通俗，以便读者能不查阅别的书籍而顺利地读下来。虽然笔者担心由于自己水平所限和追求通俗，却反而造成疏误，但是笔者还是建议读者在读完本章以前先不忙于查阅相关书籍。

第9章包括7个算例。该章的目的在于说明，本书介绍的方法大体上怎样运用，能解决哪些问题。这些算例有的是笔者提供的，其余的已注明是取自别人的著作。每个算例侧重说明一两个问题。第9.1节说明保角变换法的应用。9.2节给出一个难题的解答。第9.3节说明各种解法的结构和速度场的设定。第9.4节说明，连变形区的边界也是可以通过极值原理来求出的。第9.5节介绍一种简化的方法，但此简化方法还是比工程方法给出了更多的信息，而工程方法只是这一简化方法的再简化。第9.6节给出一个有用又有趣的问题的解：到底空拔管是越拔管壁越厚，还是越拔管壁越薄？第9.7节用流函数求解了平板轧制问题，给出了轧制变形区内的速度场和应力场，确定了变形区的前后边界，这项工作似乎过去无人做过。

对于书中的不足之处，欢迎专家和读者指正。

著 者

1990年春

目 录

1 场论初步	1
1.1 场的定义和分类	1
1.2 标量场	2
1.2.1 标量场的等值面	2
1.2.2 标量场的方向导数	3
1.2.3 标量场的梯度	4
1.3 向量场	6
1.3.1 向量场的向量线	6
1.3.2 向量场的通量和散度	7
1.3.3 向量场的环量和旋度	11
1.4 哈密顿算子	17
1.5 缩写符号和求和约定	18
1.6 曲线坐标	20
1.6.1 曲线坐标的建立	20
1.6.2 弧元素在曲线坐标系中的表达式	22
1.6.3 柱坐标	23
1.6.4 球坐标	24
1.6.5 梯度在曲线坐标中的表达式	25
1.6.6 散度在曲线坐标中的表达式	26
1.6.7 旋度在曲线坐标中的表达式	27
1.6.8 调和量在曲线坐标中的表达式	29
1.7 矩阵	30
1.7.1 矩阵的运算及其性质	30
1.7.2 方阵	34
1.7.3 特征根与特征向量	38
1.8 张量场	41
1.8.1 张量的定义	41

1.8.2 张量运算	45
1.8.3 张量的分解	50
1.8.4 张量的主值、主方向和不变量	51
1.8.5 偏张量的主值、主方向和不变量	55
1.8.6 向量对坐标向量的导数	57
1.8.7 张量场的散度	60
1.8.8 各向同性张量	62
1.8.9 两个二阶对称张量之间的关系	70
1.8.10 张量在多维空间的向量表达	75
2 应变场	78
2.1 拉格朗日变量和欧拉变量	78
2.1.1 拉格朗日变量	78
2.1.2 欧拉变量	80
2.1.3 拉氏变量与欧氏变量间的关系	80
2.2 作为线性变换看待的连续体运动	83
2.3 有限应变张量	85
2.3.1 拉格朗日有限应变张量	86
2.3.2 欧拉有限应变张量	88
2.3.3 对数应变张量	89
2.4 小变形应变张量	92
2.4.1 小变形下应变的线性化	92
2.4.2 小变形下的应变张量和转角张量	93
2.4.3 主应变	98
2.4.4 应变偏张量	100
2.5 变形连续方程	102
2.6 曲线坐标下的应变张量	103
3 速度场	105
3.1 速度场的性质	105
3.1.1 流线	105
3.1.2 轨迹	106

3.1.3 流管	109
3.1.4 速度势	110
3.1.5 速度场通量 (或称流通)	111
3.2 随体导数和局部导数	112
3.2.1 标量场对时间的导数	112
3.2.2 向量场对时间的导数	113
3.3 应变速度张量	114
3.3.1 一点附近的速度	114
3.3.2 应变速度张量	115
3.3.3 主应变速度	116
3.4 应变速度偏张量	118
3.4.1 偏应变速度	118
3.4.2 应变速度偏张量的不变量	119
3.4.3 剪应变速度强度	120
3.4.4 剪应变程度	121
3.5 应变速度协调条件	122
3.6 曲线坐标下的速度几何方程	122
3.7 势函数和流函数	124
3.7.1 平面流动	124
3.7.2 平面流动的速度势函数	124
3.7.3 平面流动的流函数	128
3.7.4 速度复势	130
3.7.5 曲线坐标下的流函数	131
3.7.6 轴对称问题的流函数	132
3.8 任意三维流动的流函数	136
3.8.1 三维流函数和流面	136
3.8.2 任意三维流动的通量	138
3.8.3 推广	139
3.8.4 三维流动速度场的一般表示法	140
4 应力场	142
4.1 外力	142

4.1.1 质量力和体积力	142
4.1.2 表面力	143
4.2 应力张量和边界条件式	143
4.2.1 应力分量	143
4.2.2 任意斜平面上的应力	145
4.2.3 主应力	146
4.2.4 最大剪应力	150
4.3 应力偏张量	151
4.3.1 偏应力	151
4.3.2 应力偏张量的不变量	152
4.3.3 剪应力强度	152
6 守恒定律	155
5.1 系统和控制体积及系统导数	155
5.1.1 系统	156
5.1.2 控制体积	156
5.1.3 系统导数	156
5.2 质量守恒定律	158
5.2.1 积分形式的质量守恒定律	158
5.2.2 连续性方程	159
5.2.3 诱导公式	160
5.3 动量守恒定律	161
5.3.1 动量守恒定律的积分形式	161
5.3.2 运动方程和平衡方程	161
5.3.3 曲线坐标下的平衡方程	162
5.4 动量矩守恒定律	163
5.4.1 动量矩守恒定律的积分形式	163
5.4.2 剪应力互等定理	164
5.5 能量守恒定律	165
5.5.1 外力功率和系统能量	166
5.5.2 连续介质能量方程	167
5.5.3 能量方程应用于包含相变区的情形	168

5.6 间断场	169
5.6.1 密度间断	169
5.6.2 速度间断	170
5.6.3 应力间断	171
5.6.4 间断场的能量方程	172
5.7 热力学方程	174
5.7.1 热平衡方程	174
5.7.2 热传导方程	175
6 本构方程	177
6.1 本构方程通则	177
6.1.1 宏观确定性	177
6.1.2 物理可能性	178
6.1.3 对坐标的不变性	178
6.2 基本试验	178
6.2.1 拉伸曲线	178
6.2.2 加载和卸载	180
6.2.3 温度影响	180
6.2.4 静水压力试验	181
6.3 屈服准则	182
6.3.1 屈服准则的含义	182
6.3.2 特雷斯卡准则	182
6.3.3 米塞斯准则	184
6.3.4 屈服轨迹	186
6.4 复杂应力下的本构方程	188
6.4.1 应变强化介质	188
6.4.2 粘性强化介质	189
6.5 关于强化的假说	191
6.5.1 简单加载和复杂加载(加载准则)	191
6.5.2 应变强化假说——单一曲线假设	192
6.5.3 粘性强化假说	194
6.5.4 混合强化假说	196

6.6 增量理论的本构方程	197
6.6.1 全量理论和增量理论	197
6.6.2 普朗特(L. Prandtl) - 罗伊斯(A. Reuss)弹塑性状态 方程	198
6.6.3 利维(M. Levy) - 米塞斯塑性流动方程	199
6.6.4 材料强化的引入	200
6.7 德鲁克 (D.C. Drucker)公设和塑性势	202
6.7.1 九维空间的加载面	202
6.7.2 德鲁克公设	203
6.7.3 塑性应变增量的方向	206
6.7.4 加载面的外凸性	206
6.7.5 塑性势	207
7 极值原理	209
7.1 基本能量方程	210
7.2 可能场和虚功(率)方程	212
7.3 理想刚塑性体的极值定理	213
7.3.1 下限定理	213
7.3.2 上限定理	215
7.3.3 极值定理应用于间断场	218
7.4 连续体的变分原理和虚速度原理	220
7.4.1 质点系的虚速度原理	221
7.4.2 关于函数的变分	224
7.4.3 问题的提法和基本术语	227
7.4.4 可压缩连续体的变分原理	231
7.4.5 不可压缩连续体的变分原理	234
7.5 金属压力加工问题的虚速度原理	236
7.6 金属压力加工问题的全功率最小原理	238
8 金属压力加工问题的求解方法	241
8.1 泛函空间初步	241
8.1.1 集和和度量空间	242

8.1.2 赋范线性空间	248
8.1.3 希尔伯特空间	250
8.1.4 算子和泛函	256
8.1.5 迭代法	259
8.1.6 投影法	260
8.2 变分法	264
8.2.1 泛函的变分和极值	264
8.2.2 变分计算基本引理	268
8.2.3 欧拉方程	269
8.2.4 依赖于多个函数的泛函	269
8.2.5 依赖于高阶导数的泛函	270
8.2.6 依赖于多元函数的泛函	272
8.2.7 变分问题的直接解法	273
8.2.8 差分法	273
8.2.9 里兹法	274
8.2.10 里兹法的收敛性	278
8.2.11 求泛函极值的搜索法	283
8.3 保角变换法	284
8.3.1 复变函数和解析函数	285
8.3.2 保角变换	288
8.3.3 保角变换和曲线坐标	291
8.3.4 有限区域到单位圆的映射	293
8.3.5 多边形映射成上半平面	295
8.3.6 速度复势与保角变换	299
8.3.7 复应变速度和复应变	300
9 金属压力加工过程解题实例	302
9.1 通过直线型模孔的平面应变挤压问题	302
9.1.1 求解的思路	302
9.1.2 对应于基础场的全功率方程	305
9.1.3 基础场的求解—区域的保角变换	306
9.1.4 对应于基础场的边界外力	310
9.1.5 附加速度场的设定	311

9.1.6 由全功率极小条件确定完全速度场	313
9.1.7 应力场的确定	314
9.2 通过异型模孔挤压薄壁构件	317
9.2.1 基础速度场	318
9.2.2 附加速度场	321
9.2.3 全功率方程	322
9.2.4 变形区长度和挤压力的确定	325
9.2.5 速度场的求解	325
9.3 圆柱体镦粗问题	327
9.3.1 边界条件	327
9.3.2 基础解	328
9.3.3 附加速度场	329
9.3.4 求解 a_{mn} 的方法	332
9.3.5 计算结果	335
9.4 通过锥形模的拔棒问题	340
9.4.1 接触面方程和无量纲坐标	340
9.4.2 基础流函数	341
9.4.3 附加流函数	342
9.4.4 运动学可能的边界	344
9.4.5 变形全功率	346
9.4.6 应力计算	348
9.4.7 计算和试验结果的比较	350
9.5 计入宽展的轧制问题	354
9.5.1 广义平面流	355
9.5.2 能量方程和变分方程	357
9.5.3 弱锥的轴向平衡条件	358
9.5.4 材料强化条件的引入	359
9.5.5 轧制问题的一种变分解	361
9.6 无衬芯空拔管问题	366
9.6.1 速度场的设定	366
9.6.2 基本方程	368
9.6.3 计算结果	371
9.7 平板轧制问题的流函数解	372