潘承洞　于秀源

阶的估计

山东科学技术出版社

阶的估计

潘承洞　于秀源

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

内 容 提 要

本书共分十章。第一章为全书的基础，主要介绍了阶的基本概念和运算法则。其余九章分别介绍了如何运用阶的观点来研究各种级数和积分的敛散性；各种极限的交换问题；分部求和公式与Euler求和公式；分部积分法和驻相法；积分和、三角和、Dirichlet多项式及由此引出的一些重要方法；隐函数与导函数阶的估计法；Lagrange定理和重要的迭代法；各种Tauber型定理及阶的各种估计方法和重要应用。

本书内容丰富系统，论证清晰严谨，只要具有数学分析基础知识就可以阅读。

阶 的 估 计
潘承洞 于秀源
*
山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东肥城印刷厂印刷
*
850×1168毫米32开本 13.75印张 316千字
1983年1月第1版 1983年1月第1次印刷
印数：1—6,000
书号 13195·79 定价 1.75元

出版说明

无穷量的阶的估计是数学分析的一个极其重要的方法，它在本质上属于极限的方法。运用这种方法，可以卓有成效地处理复杂的数学问题，简化计算程序，得到精确的结果。因此，它在数学和自然科学的许多学科方面都有着广泛的应用。

阶的估计方法一般都分散在各类专著和论文中，在大学的普通分析教材中很难作系统而详尽地介绍。本书对阶的基本概念、法则及其应用做的较全面的总结概括。全书共分十章。第一章主要介绍了无穷量的阶的基本概念和运算法则，是全书的基础。以后各章分别介绍了不同形式的无穷量的阶的估计方法及其重要应用。书中配有例题与习题。内容丰富系统，论证清晰严谨，只要具有数学分析的基础知识，就可以读懂。

本书可作为大学数学系学生和研究生学习数学分析的补充教材和参考书，也可供大学数学教师、科研人员和工程技术人员学习、参考。

在编写本书的过程中，裘卓明等同志从各方面给予了帮助，特一并致谢。

一九八二年七月

目　　录

第一章　阶的概念及O与o的运算

无穷大量与无穷小量的阶，是数学分析中的基本概念之一．在这一章中，我们主要介绍阶的概念以及阶的比较；引进了O与o符号，并讲述了它们的基本运算规则和有关的基本定理．这些内容是以后各章的基础．所以，我们除了对定理加以分析外，还演做了大量的习题，以使读者能够较深刻地理解这些基本知识，并熟练地运用它们．

在本章以下的叙述中，多次涉及变量或函数的极限过程．一般情况下，这些变量或函数的定义域及其应该满足的条件都是显而易见的，所以，为了叙述简洁起见，我们将不一一列举．若确属必要，则将个别地予以说明．

第一节　基本概念

我们从定义无穷大量与无穷小量开始．

定义1　若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,$$

则称$f(x)$当$x\to x_0$时是无穷小量，记为

$$f(x)=o(1),\qquad x\to x_0.$$

特别地，若数列$\{a_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,$$

则

$$a_n=o(1),\ n\to\infty,$$

例如，当$x\to\infty$时，

$$\frac{x+\sin x}{x^2+5x-2},\quad \frac{3x}{e^x+\log x},\quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x},$$

$$\frac{x\sin x+\cos\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x^2+4x+2\log x-\sqrt{x}},\quad \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin x}{x}$$

都是无穷小量．下面的量也是无穷小量：

$x+\sin x\quad(x\to 0)$；$\quad\dfrac{\sin n+\cos n}{n}\quad(n\to\infty)$；

$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}\quad(x\to 1)$；$\quad\log\cos x\quad(x\to 0)$；

$x\log(x\sin x)\quad(x\to 0)$；$\quad e^x-1\quad(x\to 0)$；

$\log(1+x)\quad(x\to 0)$．

定义 2 若

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\infty,$$

则称$f(x)$当$x\to x_0$时是无穷大量．特别地，若数列$\{a_n\}$有极限

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty,$$

则当$n\to\infty$时，a_n是无穷大量．

例如，下面的一些量都是无穷大量：

$Ax^n+Bx^m(n\neq m,\ A^2+B^2\neq 0,x\to\infty)$；

$x+\sin x\cdot\log x\quad(x\to\infty)$；$x^\alpha+A(\log x)^\beta\ (\alpha>0,x\to\infty)$；

$\dfrac{1}{\sin x}+\cos x+1\ (x\to 0)$；$\dfrac{5}{\sqrt{x}-1}\quad(x\to 1)$；

$(-1)^n n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}$；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad(n\to\infty)$．

无穷大量与无穷小量的概念，只反映变量的变化趋势，对于变量的其它性质并未做出任何描述．而在具体问题中，除了变量的变化趋势，我们更关心的却是对于这种变化的量的了

解．事实上，经常需要比较变量的变化趋势在量的方面的差异，并通过对这些差异的分析，找出它们的内在联系．在这些差异中，最明显的一个就是变化“速度”的不同．例如，变量

$$\sqrt{x}, \quad x^2, \quad x^3$$

当$x\to\infty$时虽都是无穷大量，但是它们趋于∞的“速度”是大不相同的．事实上，由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x}}=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\infty.$$

可见，当$x\to\infty$时，这三个变量趋于∞的速度是无法相比的．简单地说，x^2趋于∞的速度相对于$\sqrt{x}$的速度，是一个无穷大量．x^3相对于x^2亦有这种关系．

当然，变量之间这种增长（或变化）“速度”的差异，并不单单存在于无穷大量或无穷小量之间．例如，分别取a_n及b_n为

$$a_n:\ n,\ \frac{n-1}{n},\ \sqrt{n}+1,\ \log n;$$

$$b_n:\ \sqrt{n+1},\ \sin\frac{1}{n},\ \sqrt[3]{n},\ \cos\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

则在a_n与b_n之间也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$$

的关系．

为了清楚地表明变量的这种关系，我们引进“阶”的概念．

定义3 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称$f(x)$对于$g(x)$当$x\to x_0$时是无穷小量，记为

$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to x_0.$$

若$f(x)$与$g(x)$都是无穷大量，则称$f(x)$是比$g(x)$低阶的

无穷大量．

若$f(x)$与$g(x)$都是无穷小量，则称$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量．

定义4 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称$f(x)$与$g(x)$当$x\to x_0$时是等价的，记为

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0.$$

例如

$$\sin x\sim x,\quad x\to 0;$$

$$e^x-1\sim x,\quad x\to 0.$$

定义5 设$g(x)>0$，若存在常数$A>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant Ag(x),\quad x\in(a,b)$$

成立，则称$g(x)$是$f(x)$的强函数，记为

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\in(a,b).$$

显而易见，改变$f(x)$与$g(x)$在有限个点的数值后，上式仍成立．

例如

$$\cos x=O(1),\quad -\infty<x<\infty;$$

$$\log x=O(x),\quad x\geqslant 1.$$

定义6 设当$x\to x_0$时，$f(x)$与$g(x)$都是无穷大量（小量），且存在常数$A>0$，$B>0$，使得

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A,\quad \overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{g(x)}{f(x)}\leqslant B,$$

则称$f(x)$与$g(x)$当$x\to x_0$时是同阶无穷大量（小量）．

例如，当$n\to\infty$时，

$\log(n+\sin n)$ 与 $3\log n$

是同阶无穷大量；

$$e^{\frac{1}{n}}-1 \quad 与 \quad \sin\frac{4}{n}$$

是同阶无穷小量。

注意，在定义 5 与定义 6 中，常数A、B被称为“大 O 常数”，它们与变量x无关。在一般情况下，这点不作特别说明。但是，“大O常数”可能与参变量有关。例如，在

$$\sin xy=O(1)$$

中，“大O常数”与参数y无关，但在

$$\sin xy=O(x)$$

中，“大O常数”就与参数y有关，此时我们常用下面的记号

$$\sin xy=O_y(x).$$

当然，在不致引起误会，或这个参数的引进对整个问题的处理没有影响时，也常略去不写。

例 1 设$\varepsilon>0$及A是任意常数，则对于任意的$\alpha>0$，有

$$x^A=o((1+\alpha)^{\varepsilon x}),\ x\to\infty \tag{1.1}$$

$$(\log x)^A=o(x^{\varepsilon}),x\to\infty \tag{1.2}$$

$$(f(x))^A=o(e^{\varepsilon f(x)}),\ x\to\infty \tag{1.3}$$

其中$f(x)$是单调上升的函数，且

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

解 设$n=[x]$,$[x]$表示x的整数部分（即是不超过x的最大整数），$m=[A]+1$，则当$x\to\infty$时，显然也有$n\to\infty$。因此，当$n\geqslant 2m+1$时，有

$$(1+\alpha)^x\geqslant(1+\alpha)^n\geqslant C_n^{m+1}\cdot\alpha^{m+1}\geqslant\frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)!}(n-m)^{m+1}$$

$$\geqslant\frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}=\frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{\alpha^{m+1}}{2^{m+1}}\cdot n^{m+1}.$$

由于α与m都是常数，所以当$n\to\infty$时，有

$$\frac{(1+\alpha)^x}{x^A}\geqslant\frac{\alpha^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{n^{m+1}}{(1+n)^m}\geqslant\frac{\alpha^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}$$

这就证明了：对于任意的常数A及$\alpha>0$，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^A}{(1+\alpha)^x}=0 \tag{1.4}$$

取$x=\varepsilon y$，则上式成为

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y^A}{(1+\alpha)^{\varepsilon y}}=0,$$

这就是（1.1）式.

在（1.4）式中取$\alpha=e-1$，$x=\varepsilon\log y$，则

$$\lim_{y\to\infty}\frac{(\log y)^A}{y^\varepsilon}=0,$$

这就是（1.2）式.

在（1.2）式中取$x=e^{f(y)}$，则当$y\to\infty$时，$x\to\infty$，因此立即可得（1.3）式.

第二节　O与o的运算

下面，我们给出有关O与o的基本运算法则：

法则1　若$f(x)$是无穷大量，$x\to x_0$；而$\varphi(x)=O(1)$，则

$$\varphi(x)=o(f(x)),\quad x\to x_0.$$

法则2　若$f(x)=O(\varphi)$，$\varphi=O(\psi)$，则

$$f(x)=O(\psi).$$

法则3　若$f(x)=O(\varphi)$，$\varphi=o(\psi)$.

则

$$f(x)=o(\psi).$$

法则 4 $O(f)+O(g)=O(f+g)$.

法则 5 $O(f)\cdot O(g)=O(f\cdot g)$.

法则 6 $o(1)\cdot O(f)=o(f)$.

法则 7 $O(1)\cdot o(f)=o(f)$.

法则 8 $O(f)+o(f)=O(f)$.

法则 9 $o(f)+o(g)=o(|f|+|g|)$.

法则10 $o(f)\cdot o(g)=o(f\cdot g)$.

法则11 $\{O(f)\}^k=O_k(f^k)$，k是自然数.

法则12 $\{o(f)\}^k=o(f^k)$.

法则13 若$f\sim g$，$g\sim\varphi$，则

$$f\sim\varphi.$$

法则14 若$f=o(g)$，$g\sim\varphi$，则

$$g\sim\varphi\pm f.$$

以上法则都易验证．我们仅举几条证明如下，其余请读者补足．

法则 6 的证明：

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ 且

$$|g(x)|\leqslant Mf(x),\quad x\in(a,b).$$

则

$$0\leqslant\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\varphi(x)g(x)}{f(x)}\right|\leqslant M\lim_{x\to x_0}|\varphi(x)|=0.$$

即是

$$\varphi(x)g(x)=o(f(x)).$$

法则11的证明：

设 $|g(x)|\leqslant Mf(x)$，$x\in(a,b)$.则当然有

$$|g(x)|^k\leqslant M^k f^k(x),\ x\in(a,b),$$

即是

$$(g(x))^k=O_k(f^k(x)),\ x\in(a,b).$$

注意，一般地"大O常数"与k有关.

上面的基本法则虽然简单，却使我们能够容易地处理大量的阶的估计问题．例如，有：

当$x\to\infty$时，

$$5x+\sin x\sim 5x;\ 3e^x+x^4\sim 3e^x;$$

$$8e^x+x^3\log x=O(e^x);\ \ 2+\sin\frac{1}{x}=O(1);$$

$$x^n\log x(\log\log x)^2=o(x^{n+1})\cdots$$

当$x\to 0$时，

$$x^2+x^3=o(x);\ x\log x+x^2(\log\log x)^3=o(\sqrt{x});$$

$$e^x\log\frac{1}{x}=o(\frac{1}{x});\ x\cos x+\sin x=O(x);$$

$$\frac{1}{|\log x|^3+5}=o\left(\frac{1}{\log\log\frac{1}{x}}\right);\cdots.$$

请注意，在上面的基本运算中，我们没有说到关于反函数的性质．就是说，如果$\varphi(x)$与$f(x)$都是增函数，$\tilde{\varphi}(x)$与$\tilde{f}(x)$分别表示它们的反函数，一般说来，由

$$\varphi(x)=o(f(x))$$

不能得到

$$\tilde{f}(x)=o(\tilde{\varphi}(x)).$$

这可从下例看出：

$$f(x)=e^x,\varphi(x)=\frac{e^x}{x},\ x\to\infty,$$

此外，我们强调一下，符号

$$\varphi=O(f) \quad 或 \quad \varphi=o(g)$$

是不等式，只不过写成等式的形式罢了。

第三节　几个基本公式及应用

定理 1　在x_0的某个邻域内，若$f^{(n)}(x)$存在，且$|f^{(n)}(x)|\leqslant M$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O(|x-x_0|^n)$$

在x_0的该邻域内成立。

这是Taylor公式的推论。

由定理 1 立即可以得到下面几个常用的估计式：

(1) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)$，$x\to 0$。

(2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$，$x\to 0$。

(3) $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)$，$x\to 0$。

(4) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+O(x^2)$，$x\to 0$。

(5) $e^x=1+x+O(x^2)$，$x\to 0$。

更一般地，有下面的估计式：

若　$f(x)$满足条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,$$

则

(6) $\sin f(x)=f(x)-\frac{f^3(x)}{3!}+O(|f(x)|^5)$，$x\to x_0$。

(7) $\cos f(x)=1-\dfrac{f^2(x)}{2}+O(f^4(x))$, $x\to x_0$.

(8) $\log(1+f(x))=f(x)-\dfrac{f^2(x)}{2}+O(|f(x)|^3)$, $x\to x_0$.

(9) $(1+f(x))^\alpha=1+\alpha f(x)+O(f^2(x))$, $x\to x_0$.

(10) $e^{f(x)}=1+f(x)+O(f^2(x))$, $x\to x_0$.

例如

$$\log(1+\sin x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+O(|\sin x|^3),\quad x\to 0.$$

前面所列举的几个常用的公式，当然不是仅在$x=0$ 的邻域内才能使用．例如，有

$$e^x=1+x+O(x^2),\quad |x|<1;$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4),\quad |x|<\infty.$$

我们给出估计式（10）的一个简单应用．

例 2 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\log n}=1 \tag{1.5}$$

证明 因为

$$\sqrt[n]{n}=exp\left(\frac{\log n}{n}\right)=1+\frac{1}{n}\log n+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right),n\to\infty.$$

所以

$$n(\sqrt[n]{n}-1)=\log n+O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

$$\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\log n}=1+O\left(\frac{\log n}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

由此推出