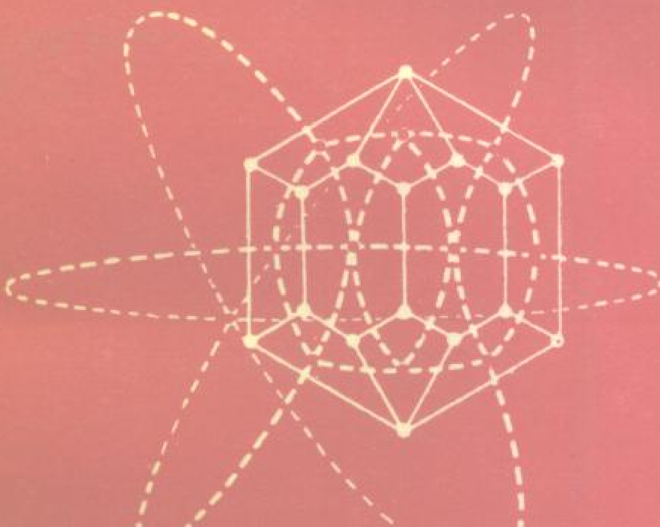
数学世界

[美] 舍曼·K·斯坦 著
单兴缘 卞福荃 孙立镌 主译
赵国清 校



哈尔滨工业大学出版社

数 学 世 界

〔美〕舍曼·K·斯坦 著
单兴缘 卞福荃 孙立镌 主译
赵国清 校

哈尔滨工业大学出版社

（黑）新登字第4号

内容简介

《数学世界》一书为美国加利福尼亚大学舍曼·K·斯坦教授所著。该书标新立异，文理兼容，极具趣味性。集揭示数学领域中的奥秘，普及提高与专业研究为一体。是全面介绍20世纪数学思想及其来源，了解数学发展演变过程和尚待开发研究领域的现代代表作。是为高中生和大、中专院校学生和教师提供奥林匹克数学竞赛思路与训练题型的重要教材。是为研究生、博士生和专业研究工作者提供科研方向、选择研究课题的重要参考文献。是为改变传统的呆板式教学方法和启发学生自由思维，刻意创新的一部智力开发型教学参考书。

数学世界
〔美〕舍曼·K·斯坦 著
单兴缘 卜福奎 孙立镌 主译
赵国清 校
*
哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
黑龙江省林业教育学院印刷厂印刷
*
开本787×1092毫米 1/32 印张13.75 字数332千字
1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷
印数1—3000
ISBN 7—5603—0541—5/O·43
定价 9.00元

原　序

现在《数学世界》第三版问世了。在这期间，受专业学术进展及社会一般变化的影响，数学及其教学法在不断地发展。第三版的内容和教师手册反映了我个人的观点和这些发展。例如，这次再版主要增加了概率一章，它反映了教师与学生对研究那些可用于解决社会或个人所面临问题的内容的兴趣增加了。

我们都知道自己处于一个并非人类所开创的世界之中。虽然大家都熟悉厨房的水池，但却不了解组成它的原子。厨池象我们周围其它物品一样，是一个方便的抽象。

可是数学却纯粹是人为之物。每个定理，每个证明，都是人脑的产物。数学所有的牌都可以摆到桌面上来。就这个意义来说，数学是具体的，而世界却是抽象的。

本书采用这种具体的方法向一般读者介绍数学。这"一般"读者可以是大学生，也可以是中小学生，还可以是有一定数学基础的成年人。

本书是一本为大学生编写的介绍各个数学领域的奥妙、范围及其实质的教材。数年来，我一直在寻求一个合适的教本，但所见到的不是太深就是专业性太强。

从数论、拓朴、集合论、几何、代数和分析中选出的内容可以使没有数学基础的人都能看懂（有几章只需要小学算术基础）。每个题目都介绍了一些重要的思想方法，由此轻而易举地把读者引导到实验和习题上去。

建议读者在看每个定理和证明时要利用数学的具体性特点；不要对任何东西深信不疑；要怀疑和警惕；要检查论证的每一步骤；要认真考虑这样的建议："读者可以自己举例"或者"在进行证明之前，读者应就某些特例验证本定理。"阅读此书时，最好纸和铅笔不离手。

第三版《数学世界》全书有大量的改动。其中有新的结果，

更简单的证明和新习题。跟第二版一样，很多改动是为明确内容作出的。书末附有大多数习题的答案，其它答案可在教师用书中找到。

和第二版一样，习题分为三组。第一组是使读者检查其对定义和基本概念的理解的一般习题。第二组中的习题用一个“○”和第一组隔开，一般要求读者应用该章的概念。第三组习题前有两个圈，这组中的习题需要动些脑筋，提供了可供选择的方法，或者建立一些新的概念。

这本教材可有几种不同的学习讲授方法，适用不同种类、不同水平的学生。这一点很重要。利用5和6页中的图和指南，读者或教师可自行选择使用本书途径。《教师用书》详细建议对三种学生：文科、师范和数学或其它专业学生每章应如何讲授。教师用书中的建议是以作者和其他以本书为教材的人的经验为基础的。

一本教程进行到第三版时，教师和学生对它的贡献已不亚于作者；我想把第二版以来收到的很多建议在这里说明并对下列人员（从略—译注）为我交流思想花的时间和精力表示感谢。

舍曼·K·斯坦

序　言

现代社会越来越离不开数学，而数学的研究又越越来越抽象，致使数学基础不够的人对近代数学越来越难于理解而不敢问津。一方面现代社会中文理差距越拉越大，一方面现代社会又恰需文理兼备的人才。因此，早就希望有本简述近代数学思想来源与发展的书。看到舍曼·K·斯坦著的《数学世界》时，我们感到这正是我们所需要的。舍曼为美国加利福尼亚大学教授，《数学世界》曾再版三次，其内容几乎囊括了数学各个领域。书中每个问题都从实际引入，进而介绍数学思想和方法。对一些著名定理，作者用完全不同的多种方法加以论证，极富启发性。对一些表面上毫不相关的实际问题都能引导读者找出内在联系。他把有些人认为枯燥无味的数学与丰富多采的现实世界中的实际问题有机地结合起来，写得深入浅出，通俗易懂，引人入胜，既可以使没有多少数学基础的人也可以看懂；同时又把读者带到了每个领域的前沿，使有志者可以选题攻关。

其中，模代数、记忆轮、同余等内容是国内现行教材与参考书中尚未见到的。全书共十九章，书末有附录。翻译过程中考虑篇幅、思想内容和实际需要，将第十四章和第十九章及书末附录删去未译；个别习题亦有所取舍。译者对书中明显错误之处做了改正，不另加注，请读者谅解。其它一切照旧，以期得观全豹。这本书虽已完稿多时，但由于种种原因今天才与大家见面，实在有负热心读者的厚望。我们希望这本书的翻译出版能增加读者对数学的兴趣与爱好，体会到即使是近代数学也有它的实际背景和诗一样的美。

本书由单兴缘、卞福荃、孙立镌共同翻译。其中由单兴缘主译第 1 章、第 2 章、第 4 章、第 15 章、第 16 章；由卞福荃主译第 5 章、第 6 章、第 8 章、第 11 章、第 12 章、第 18 章；

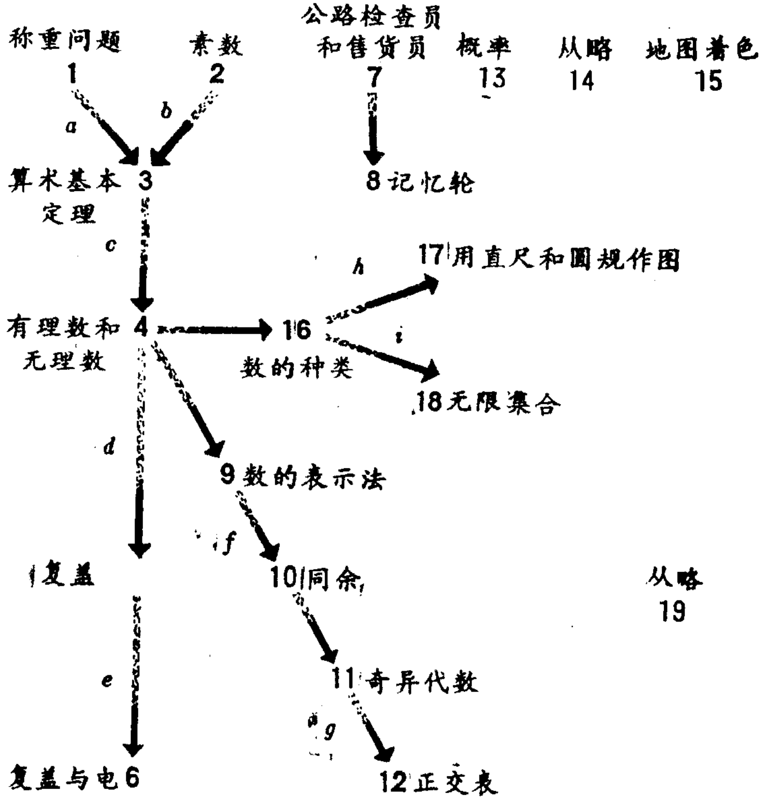
由孙立镌主译第 3 章、第 7 章、第 9 章、第 10 章、第 13 章、第 17 章。全书由单兴缘统稿，赵国清教授审校。

最后，借本书出版之际向王淑艳、樊　红、常向阳、张艳玲、刘至聪诸君表示感谢。没有他们激励、解惑、抄稿、绘图，本书出版是不可能的。同样要感谢哈尔滨科学技术大学及出版界的有关方面给予的大力支持，没有他们，本书出版也是不可能的。限于我们的水平，译文虽是本着“增损一字赏千金”的精神，亦或有不妥之处，敬请批评指正。

单兴缘

于哈尔滨

各章关系图


称重问题 1
素数 2
公路检查员和售货员 7
概率 13
从略 14
地图着色 15
a
b
算术基本定理 3
8 记忆轮
c
17 用直尺和圆规作图
h
有理数和无理数 4
16 数的种类
i
18 无限集合
d
9 数的表示法
f
复盖
10 同余
从略 19
e
11 奇异代数
g
复盖与电 6
12 正交表

导读指南

第一、二、三、四、九、十、十三章是本教程的中坚。

(a) 第一章是第三章的前奏而不是逻辑上的前提。

(b) 第三章只需要第二章中“素数”的定义。

(c)第三章的主题，分解成素数是唯一的在第四章中用于证明某些平方根不是有理数。

(d) 第五章把有理数和无理数的区别应用于几何问题。

(e) 第六章用不到第五章。

(f)虽然第十章几乎自成体系，但是却用到第九章的十进制记数法。

(g) 第十二章只用到第十一章中“表”的定义。

(h)第十七章用到复数。复数在自成体系的第十六章中利用几何方法定义（第十六章的内容也可以先讲）。

(i) 第十八章用到第十六章讨论的代数数与超越数的区别。

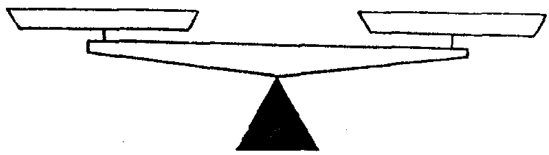
第十三、十四、十五章和第七，八章是独立的；第十九章进行总结。

目　录

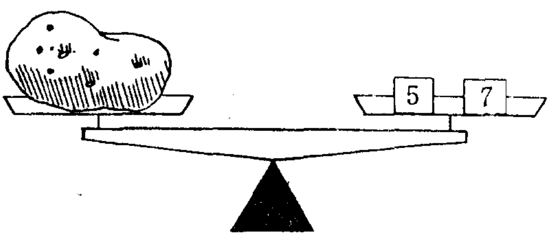
第一章 称重问题

本章将提出一些关于数的重要问题。这些问题看起来象所有学过算术的人都能做的娱乐游戏。其实，其中包含了数论的基本性质。直到第二章才会考虑到这些答案后面的"为什么"。本章的目的是提供一个可以广泛解释的问题的实验，使大家看到一个数学概念可以多种不同的形式出现。

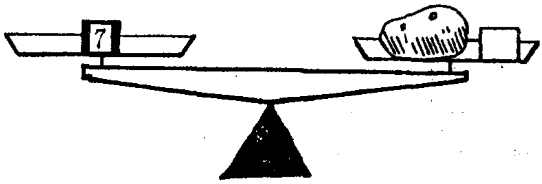
关于称重问题，可以用很多的例子介绍出来。假如我们有一台化学实验室中的天平和砝码，而且有无数的5—和7—盎司的砝码可供使用，现在，设土豆的重量都是整数的盎司，而不是象实际那样重量不一。现在问用我们的天平和砝码能够称多重的土豆呢？



例如，只用5—盎司砝码，我们可称5，10，15，20，25，30，35…盎司。或只用7—盎司砝码，我们可称7，14，21，28，35…盎司。而且，我们可在天平一端放两种砝码各一个：

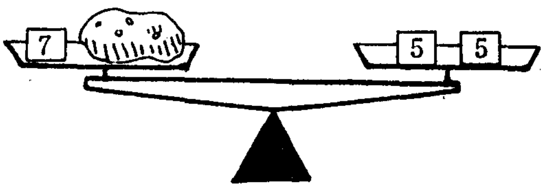


于是可称12盎司，12=5+7。或我们在每端放一种砝码一：



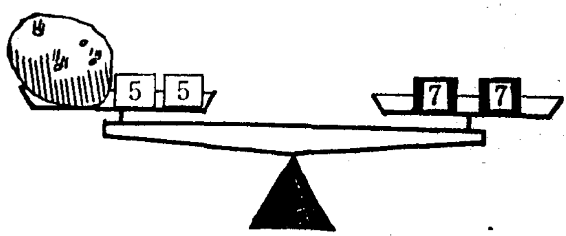
这样可称 2 盎司，因为这样重的土豆和 5一盎司砝码与 7一盎司砝码平衡。

那么我们能称 3一盎司土豆吗？可以。在一端放两个 5一盎司砝码，另一端放一个 7一盎司砝码和土豆：



平衡记录下等式 $3+7=2\times 5$。

能称 4一盎司土豆吗？能。例如，在一端放两个 5一盎司砝码和土豆，另一端放两个 7一盎司砝码：



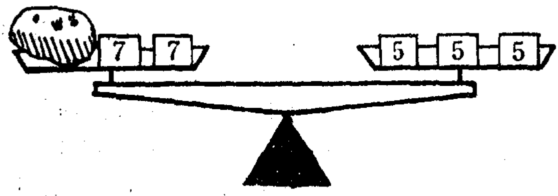
相应等式是

$$4+2\cdot 5=2\cdot 7$$

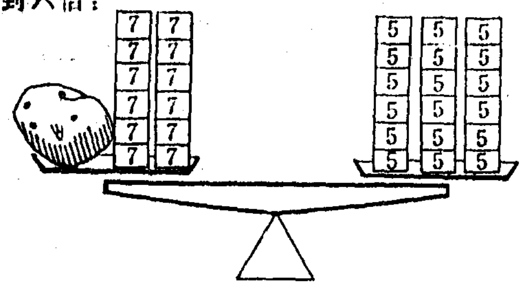
我们也可以在一端放 3 个 7一盎司砝码和土豆，另一端放 5 个 5一盎司砝码。这时等式是 $4+3\cdot 7=5\cdot 5$。

能称 1—盎司土豆吗？这也可以办到。在读下句之前读者可自行试出。一端的 2 个 7—盎司砝码和土豆与另一端的 3 个 5—盎司砝码平衡。读者可能希望停一下，找出用 5—盎司和 7—盎司砝码称 1 盎司土豆的方法。

只要我们知道了可以称 1—盎司土豆，那我们就知道可称任何重量的土豆了。例如，我们可按如下方法称 6—盎司土豆。先回忆一下，两个 7—盎司砝码和 1—盎司土豆与三个 5—盎司砝码平衡：



把这个排列加到六倍：



就称出了 6—盎司土豆。也就是，从关系式 $1+2\cdot7=3\cdot5$ 得到 $6(1+2\cdot7)=6(3\cdot5)$ 或 $6+12\cdot7=18\cdot5$。

当然，这也可能不是称 6—盎司土豆的最简单的方法。实际上，$6+3\cdot5=3\cdot7$，所以我们也可以在一端放三个 5—盎司砝码和土豆，在另一端放三个 7—盎司砝码。但推理至少使我们确信如果我们能用两种砝码称 1—盎司土豆，则我们可用这两种砝码称任意个盎司数的土豆。

5 和 7 的组合就讲到这里。假设我们转向另一组合，8 和 21。

由于

$$1+3\cdot 21=8\cdot 8$$

所以，即使只有这两种砝码，我们还是能称出1一盎司的土豆的。

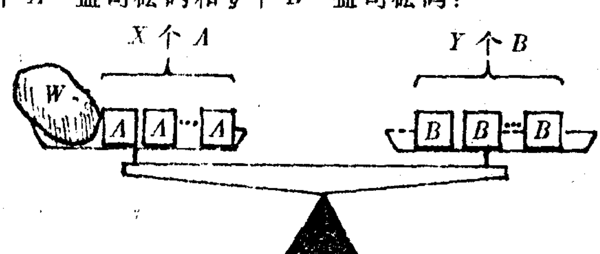
一端的八个8一盎司砝码与另一端的土豆和三个21盎司砝码平衡。

现在读者可能会想，大概任何一对砝码都可称1一盎司的土豆。其实不然。例如，若我们只有6一盎司和8一盎司砝码，那就永远别指望称1一盎司的土豆，或者任何奇盎司数的土豆。(读者可稍停，思索一下为什么是这样)

现在我们可以问一些基本问题了。设我们有无限个两种类型的砝码以供使用。我们怎样确定是否能称出1一盎司土豆呢？例如，我们能用539一盎司和1619一盎司砝码称1一盎司的土豆吗？更一般地，我们可问：用已知无限个两种不同砝码我们能称多重的土豆呢？记住，所有土豆的重量都是整数（0，1，2，3，4，…）。

实际上这些问题涉及的是数而不是土豆。我们逐渐把第二个问题转变成数学语言：分别用A和B表示两砝码的重量。在第一种组合中，我们有$A=5$和$B=7$。土豆的重量记做W盎司。

称量土豆有各种不同的方法。一种方法是把几个A一盎司砝码和土豆放在天平的一端，把几个B一盎司砝码放在天平的另一端。每种放多少取决于W，A，B和我们的算术。比方我们用x个A一盎司砝码和y个B一盎司砝码：



对应的方程是：

$$W + XA = YB$$

这就是一个断定图中天平平衡的方程（我们略去字母间的乘号）。

对 $A=5$ 和 $B=7$，我们看一下对不同的 W，X 和 Y 是什么。例如，当 $W=1$ 时，我们有 $1+4\cdot5=3\cdot7$。这里 $X=4$，$Y=3$。又，$1+11\cdot5=8\cdot7$，所以 $X=11$ 和 $Y=8$ 在 $W=1$ 时也可称出重量。

另一种称重方法是把 B—盎司砝码和土豆放在天平的一端，把 A—盎司砝码放在天平的另一端。对 $A=5$，$B=7$，方程 $1+2\cdot7=3\cdot5$ 描述了这种情况。我们有 $W+XB=YA$，式中 $W=1$，$X=2$，$Y=3$。

第三种方法是把土豆放在天平一端，把称重砝码放在另一端。例如，若 $W=12$，我们有 $12=5+7$；若 $W=27$，我们有 $27=4\cdot5+1\cdot7$。这种方法对应着一个 $W=XA+YB$ 类型的方程。

再没有其它实用的方法了，因为不会在两端放上相等重量的砝码。这是由于把它们撤去不会影响天平的平衡。这样，我们只需要考虑三种类型的方程：

$$W + XA = YB \quad W + XB = YA \quad W = XA + YB$$

所有方程中，X 和 Y 都是自然数，也可能是零。关于土豆的方程现在变成了关于自然数的方程。对哪些自然数 W 我们可找到至少使这些方程

$$W + XA = YB \quad W + XB = YA \quad W = XA + YB$$

之一成立的自然数 X 和 Y 呢？

土豆不见了，而我们得到三个方程以供研究。通过使用负数，-1，-2，-3，-4，-5，…，我们还可进一步化简（把三个方程化为一个）。负数位于数轴左侧。数

$$\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

叫做整数（注意每个自然数都是整数）。