离散数学普及丛书

组合与图

[illegible]美琛　邱伟德　编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书是《离散数学普及丛书》的第二册，主要内容包括组合数学、图论以及常用的几种组合算法，并附有习题和参考答案。本书是为自学离散数学基础知识的读者而编写的，主要是介绍基本概念，同时也给出一些应用的实例。本书写得深入浅出，通俗易懂，只要具有高中数理水平的读者就能读懂。

本书的读者对象为：非计算机专业的大学生、中专生、工程技术人员以及高级中学的师生。

离散数学普及丛书

组 合 与 图

胡美琴、邱伟德

人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32 1966年1月第 一 版
印张：9.5 页数：152 1986年1月河北第一次印刷
字数：216 千字 印数：1—7,000 册

统一书号：15045·总3119-有5438

定价：1.65 元

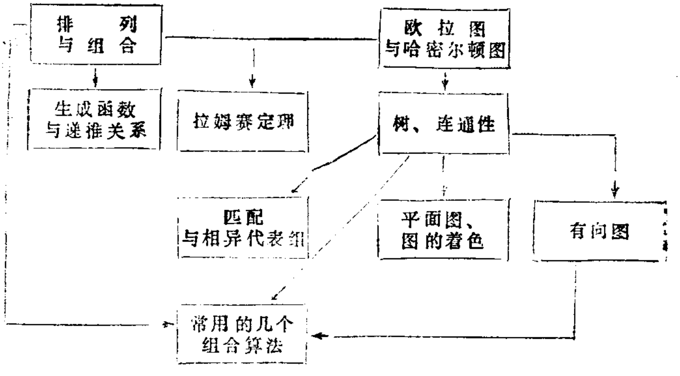
前　　言

本书是《离散数学普及丛书》的第二册。主要内容包括组合数学、图论以及常用的几个组合算法。本书以介绍基本概念为主，同时也介绍了一些应用的例子。在本书中，我们对一些可选读的内容在目录上打了●号，读者可根据自己的情况进行选读，这部分内容即使略去不看，也不影响全书的阅读。

作　者

1981.11

本书各章之间的基本联系如下面的框图所示。



目　　录

第一章　排列与组合

§1　排列、组合

排列与组合是组合学的基本内容之一，我们先讨论加法和乘法规则

加法规则　如果事件X以m种不同方式发生，事件Y以n种不同方式发生，则事件X或Y能以$m+n$种不同方式发生。

例1　有一所学校给一名数学竞赛优胜者发奖。奖品有两类，一类是三本不同的英汉词典，另一类是五本不同的数学参考书。这位优胜者只能挑选一本。那么他挑选奖品的方法共有$3+5=8$种。

例2　从城市A到城市B的长途汽车一天有四个班次，从城市A到城市C的长途汽车一天有两个班次，那么乘长途汽车离开城市A到城市B或C，一天共有$4+2=6$个班次。

使用这条加法规则，事件X与事件Y的发生必须是彼此独立的。例如，在1，2，…，10中找出一个偶数，一共有五种选法：2，4，6，8，10；在其中找一个质数，一共有四种选法：2，3，5，7。然而，要找出一个偶数或者一个质数就不是$5+4=9$种选法，因为2这个数既是偶数又是质数，这两个事件的发生不是彼此独立的。

加法规则可以推广到多个不同事件上去。如果事件X_1以m_1种不同方式发生，事件X_2以m_2种不同方式发生，…，事件

X_n以m_n种不同方式发生，则事件X_1或$X_2\cdots$或X_n以$(m_1+m_2+\cdots+m_n)$种不同方式发生。这些事件的发生彼此是独立的。

乘法规则 如果事件X能以m种不同方式发生，另一个与X的发生无关的事件Y能以n种不同方式发生，则事件X和Y能以$m\cdot n$种不同方式同时发生。

例3 从城市A到城市B有三条公路，从城市B到城市C有四条公路，则从城市A到城市C就有$3\times4=12$条路线可走。如图1.1所示。

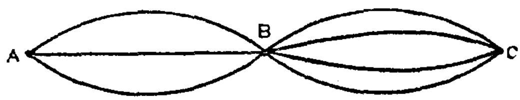


图 1.1

例4 四本书A，B，C，D要放在书架上，书架上有四个位置，问这四本书放在书架上共有多少种方法？

解： 书架上有四个位置，放在第一个位置上的书有4种选择，当第一个位置放了书之后，还余下三本书，故放在第二个位置上的书有3种选择，而在第三个位置放的书只有2种选择，剩下第四本书只能放在第四个位置上。因此，书放在书架上的方法共有$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$(种)。

例5 考虑一个集合$\{a,b,c\}$，它的任何一个子集，元素a在其中，或者不在其中，有两种可能，同样，元素b和元素c也各有两种可能，这样，元素a，b，c在子集中是否出现共有$2\cdot2\cdot2=8$种可能，一种可能恰对应一个子集，因此，集合$\{a,b,c\}$一共有八个子集：

ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$。

排列

把 n 个不同物体排在一行上，这样的一行称为物体的一个排列。例如，有三个元素 a，b，c，这三个元素的排列是：abc，acb，bac，bca，cab，cba。一共有六个排列。

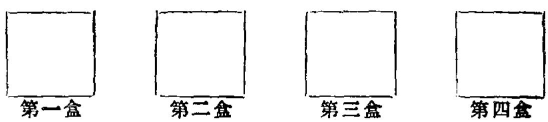
在 n 个不同物体中取出 r 个物体，将这 r 个物体排成一行，称为一个 r-排列。当 $r<n$，称为选排列；当 $r=n$，称为全排列。

例如，$S=\{a, b, c\}$，S 的2-排列全体是

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

一共有六个。

我们用 $p(n, r)$表示 n 个不同物体中全部 r-排列的数目。为了导出 $p(n, r)$公式，取 r 个不同的盒子：



$p(n, r)$为从 n 个不同的物体中选择 r 个物体，并放入这 r 个盒子中，而且每个盒子只放一个物体的方式的数目。n 个物体中任选一个物体放入第一个盒子中每 n 种选择，放了一个物体之后，余下 $n-1$ 个物体，放入第二个盒子中的选择有 $n-1$ 种，……，放入第 r 个盒子中的选择 $n-r+1$ 种，根据乘法规则，一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$种方式，因此

$$p(n, r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

特别地，当$r=n$时，$p(n, n)=n(n-1)\cdots1=n!$。

例 6 一共有多少个每位数字不相同的5位数？

解：一个每位数字不相同的5位数是{0，1，2，3，

4，5，6，7，8，9}的一个5-排列，一共有$p(10,\ 5)$个5-排列，在这些排列中，如果第1位数字是0，该排列不是对应5位数，因而0在第1位的所有5-排列应除去。0在第1位的所有5-排列等于$p(9,\ 4)$，因此，所求5位数一共有

$$p(10,\ 5)-p(9,\ 4)=27216(\text{个})$$

例7 问有多少个5位数，每位数字都不相同，不能取零，而且数字4和5不相邻？

解：我们先求数字0不出现，又每位数字都不相同的5位数的个数，然后求其中数字4和5相邻的5位数个数，两者相减是我们要的答案。前者就是{1，2，3，4，5，6，7，8，9}上全体5-排列个数：

$$P(9,\ 5)=15120$$

4和5相邻有两个情形：45出现在5位数中，54出现在5位数中。先把45看成整体，在5位数中出现在第1，2位；第2，3位；……；第4，5位，共4种方式。余下3位从{1，2，3，6，7，8，9}中取，有$p(7,\ 3)$种方式，因此，一共有$4\cdot p(7,\ 3)=840$种，54出现在5位数中也有840种方式，所以，答案为：

$$\begin{aligned}&P(9,\ 5)-2\cdot 4\cdot P(7,\ 3)\\&=15120-2\cdot 840\\&=13440(\text{个})。\end{aligned}$$

循环排列

上面考虑的排列是不同的物体排在一行上，现在考虑不同的物体排在圆周上，称为循环排列。例如，有五个人围着圆桌就坐，一共有多少种就坐方式？

用A，B，C，D，E表示这五个人，请看图1.2中有两种方式，在这两种方式中每个人的右面与左面坐的人完全一

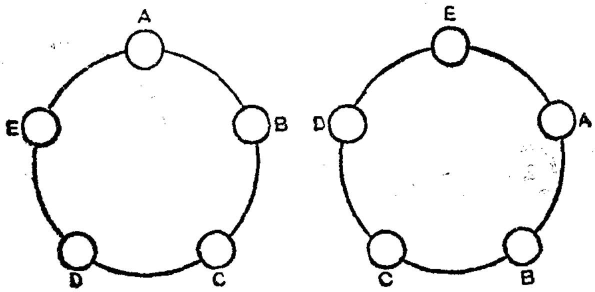


图 1.2

样，即相邻关系未变。这样两种五个人的坐法被认为是相同的。其中一种可经过绕着圆桌旋转而变成另一种。所以，下面的五个排列：

$$ABCDE,\ BCDEA,\ CDEAB,\ DEABC,\ EABCD$$

在循环排列中是同一个。在这种情况下，1个循环排列对应5个排列，所以，循环排列数是排列数的$\frac{1}{5}$。又因5个物体的排列数是5！，所以，五个人围坐圆桌的方式共有$\frac{1}{5}\cdot 5!=4!=24$(种)。

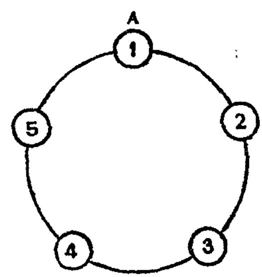


图 1.3

对于这个问题有第二种解法：

因为围着圆桌坐的五个人，一同按顺时针或逆时针旋转，都认为是同一种坐法。我们在五个人中先选定一个人，称他为A，让他坐在一个固定的位置上，该位置为1，沿着顺时针方向，其余位置为2，3，4，5，如图1.3所示。这样，A先坐下去后，还留下四个空位置，如图1.4所示其余四个人坐在位置2，3，4，5上，共有4！种方式。必须指出，循环排列只考虑物体间的相邻关系。

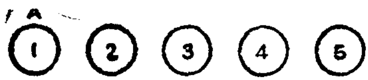


图 1.4

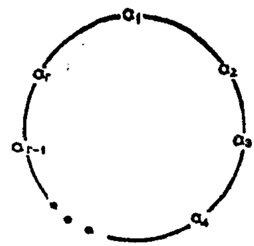


图 1.5

一个r-循环排列是从n个不同物体中选取r个物体，排在圆周上的排列。如图1.5所示。

它可对应着r个r-排列：

$a_1a_2\cdots a_r$，$a_2a_3\cdots a_ra_1$，$a_3a_4\cdots\cdots a_1a_2$，$\cdots\cdots a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}$

因为一共存在$P(n, r)$个r-排列，因此，r-循环排列数目是

$$\frac{p(n,r)}{r}$$

例 8 10只带不同标号的黑色球和5只带不同标号的白色球排成一行，要使两只白色球排在一起的排法共有多少种？如果按同样的排法把这些球排成一个圆周又将是多少种？

解：我们先把10只黑色球排成一行，两种黑色球间有一个空位，这样共有9个空位，如果用●表示黑色球，如图1.6所示。

图 1.6

在第一只黑色球前留一个空位，最后一只黑色球后面也留一个空位，一共有11个空位。5只白色球可放在11个空位上，就有P

$(11, 5)$种放法。这样放，任意两只白色球不排在一起。又10只黑色球放在10个位置上，有$10!$种放法，根据乘法规则，一共有$10! \cdot p(11, 5)$种排法。

现在要把15只球排成一个圆周，先把10只黑色球排成一个圆周，如图1.7所示。

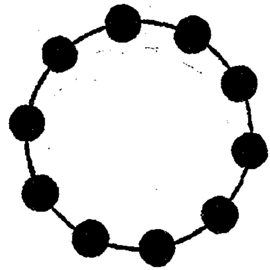


图 1.7

两只黑色球之间留有一个空位，5只白色球放在这10个空位上，以使没有两只白色球相邻，5只白色球共有$p(10,5)$种放法。又10只黑色球围成一圈，共有$\frac{10!}{10}=9!$种放法，同样，由乘法规则，一共有$9! \cdot p(10, 5)$种排法。

组合

从n个不同物体中选取r个物体，就称为一个r-组合。两次选取r个物体，只要取出的r个物体是相同的，认为是同一个组合，从n个不同的物体中选取r个物体的组合数记为$\binom{n}{r}$或$C(n, r)$。

例9 有4个物体A，B，C，D。从其中选取三个物体，有几种方式？

解：可以有四个组合方式，即

A,B,C　　A,B,D　　A,C,D　　B,C,D

每个组合都是集合$\{A, B, C, D\}$的一个含有三个元素的子集。

现在介绍$C(n, r)$的计算公式。由$C(n, r)$定义，如果$r>n$，从n个不同物体中要选取更多物体是不可能的，因而这时$C(n, r)=0$。现在假设$r \leqslant n$，我们从n个不同物体中选取r个物体，这样共有$C(n, r)$个r-组合，r个物体

可以组成$r!$个r-排列。即一个r-组合对应$r!$个r-排列，$C(n,r)$个r-组合对应$r!C(n,r)$个r-排列。不难理解这就是从，n个物体中选取r个物体组成r-排列的数目，即$P(n,r)$。因此，

$$r!C(n,r)=P(n,r),$$

有

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)}$$

由上面等式还可得出$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C(n,r)$。其实，从$n$个不同物体中选出$r$个物体，就有$n-r$个物体没有选出，因此，选出$r$个物体的方式数等于选出$n-r$个物体的方式数，即

$$C(n,r)=C(n,n-r)。$$

下面的公式称为帕斯卡（PASCAL）公式：

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$$

对这个公式的证明如下所述。从n个物体中取定一个物体，记为A。这样，从n个物体中选取r个物体，就有两种情形：

1．r个物体中包含A；

2．r个物体中不包含A。

在情形1，A已在r个物体中，因此从n个物体中选取r个物体成为在$n-1$个物体中选取$r-1$个物体，这样有$C(n-1,r-1)$个方式。在情形2，A不在r个物体中，因此实际是在$n-1$个物体中选取r个物体，这样有$C(n-1,r)$个方式。根据加法规则，从n个不同物体中选出r个物体的方

式数目为$C(n-1, r-1)+C(n-1, r)$，因此，$C(n, r)=C(n-1, r)+C(n-1, r-1)$。

例10 在一个平面上给出30个顶点，且没有3个顶点在一条直线上，问在该平面上通过这些顶点可以确定多少条不相同的直线和可以构成多少个位置不相同的三角形？

解：因为没有3个顶点在一条直线上，且任意两个顶点可确定一条直线，因此，平面上确定了位置不相同的直线数目是$C(30, 2)=\frac{30!}{2!\,28!}=435$。又因为任意三个顶点可以构成一个三角形，因此，平面上可以构成的三角形的数目是$C(30, 3)=\frac{30!}{3!\,27!}=4060$。

例11 现在要把3只相同的球放到编上1，2，3，……，9的九个盒子中去，每个盒子只能放一只球，一共有多少种放法呢？

解：从这九个不同的盒子中选取3个盒子，把球放入这3个盒子中。九个不同的盒子中选取3个盒子的方式共有

$$C(9, 3)=\frac{9!}{3!\,6!}=84。$$

一般，把r只相同的球放到n个不同盒子相当于从n个不同物体中选取r个物体，因此，方式数目都是$C(n, r)$。

例12 图1.8是某个城市中一个住宅区，图中直线代表路．一个人要从A走到B，问有多少条不同的路线？

解：一个人从A走到B，可以向东走，也可以向北走，用E表示向东走过一排房子，用N表示向北走过一排房子，例如，他从A出发，先向东走过两排房子，再向北走过四排房子，再向东走过四排房子，向北走过三排房子。向东走过一排房子就到了B。如图1.8中的粗线所示。也可以用下面的序列

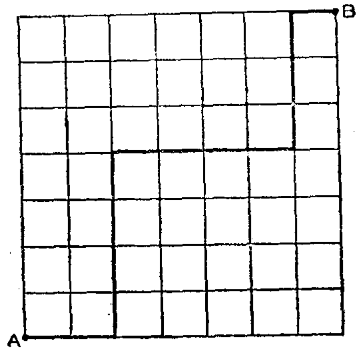


图 1.8

来表示

$$EENNNNEEEEENNNE$$

每一条路线对应于14个字母的一序列，其中有七个字母是E，另七个字母是N。问题就归到有多少个这样不同的序列。这些序列数与下面14个盒子

□□□□□□□□□□□□□□

中放入七个E的方式数相同。因此，共有

$$C(14,7)=\frac{14!}{7!7!}=3432。$$

例13　问510510能被多少个不同奇数整除？

解：因为$510510=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17$，其中除2是偶数外，都是奇素数，所以要整除510510的奇数只能是除2之外的奇素数之积。而且在一个积中一个奇数至多出现一次。奇素数之积分下面几种情况讨论：

只包含一个奇素数，一共有$C(6,1)=6$个；

包含两个奇素数，　一共有$C(6,2)=15$个；

包含三个奇素数，　一共有$C(6,3)=20$个；

包含四个奇素数，　一共有$C(6, 4)=15$个；

包含五个奇素数，　一共有$C(6, 5)=6$个；

包含六个奇素数，一共有$C(6, 6)=1$个，所以一共有

$$6+15+20+15+6+1=63\text{个}。$$

上面讨论了从不同的物体中选取物体进行排列或组合，在每一种排列或组合中，每个物体至多出现一次的情况。现在考虑在排列或组合中，一个物体允许重复出现的情况。

重复排列

从n个不同的物体中，允许重复地选取r个物体，把这r个物体排成一行，称为n个不同物体允许重复r-排列。简称重复排列。

例如，有三个物体，称为a，b，c，每次取两个物体，而且允许物体重复的排列是：

aa，ab，ac，ba，bb，bc，ca，cb，cc

一共有九种，如果在排列中不允许物体重复，一共才六种：

ab，ac，ba，bc，ca，cb

一般地：在n个不同物体中，可重复地选取r个物体的排列数是n^r。因为排列的第一个物体可从n个物体中任取一个，又允许物体重复选取，所以排列的第二个物体仍然可以从n个物体中任取一个，……，排列的第r个物体也可以n个物体中任取一个，根据乘法规则，可求得重复排列的数目是n^r。

例14　由1，2，3，4，5，6这六个数字能组成多少个大于34500的五位数？

解：一个五位数，数字可以重复出现，因而，这是一个重复排列问题。

大于34500的五位数可以分成下面几种情况：

(1)万位上数字是4、5或6，其余四位上的数字可以六