世界数学名题欣赏

哥德巴赫猜想

辽宁教育出版社

哥德巴赫猜想 辽……版社

世界数学名题欣赏丛书

哥德巴赫猜想

陈景润　邵品琮　编著

辽宁教育出版社
1987年・沈阳

哥德巴赫猜想

陈景润　邵品琮　编著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　朝阳新华印刷厂印刷

字数：100,000　开本：787×1092 1/32　印张：6 3/4　插页：4
印数：1—4,254
1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　谭　坚　责任校对：言　覃
封面设计：安今生　插　图：安　迪

统一书号：7371·508　定价：1.45元
ISBN 7-5382-0199-8

内容简介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。哥德巴赫猜想是1742年德国数学家哥德巴赫提出的一个数论问题，由于它叙述简明、论证艰深，所以被誉为“数学皇冠上的明珠”。本书在讲解数论基础知识的基础上，详尽地介绍了哥德巴赫猜想的研究历史和成果，内容丰富，观点精当。本书作者曾在哥德巴赫猜想研究中取得卓越成就，书中介绍了他们的数学思想，并展望了猜想的研究方向。

Summary

This book is one of A Series of World Famous Mathematics Appreciation. Goldbach conjecture is a problem of number thery posed by French mathematician Goldbach in 1742. It is reputed as "the pearl in maths crown" for its brief narration and profound proof. This book introduces in detail the history of research in Goldbach conjecture and achievements on the basis of essential knowledge of number theory. The book has substantial content with precise and appropriate views. The author has made remarkable achievements in Goldbach conjecture research. The book introduces their mathematic thoughts and looks forward to the orientation of the conjecture research.

序

自从1742年德国人哥德巴赫(Goldbach)提出了任一不小于6的偶数均可表为两奇素数(prime)和的猜想以来，已经历经了两个半世纪的探索，虽然至今为止，尚未被人证实猜想的正确性，也没有人予以否定，但是围绕这个猜想所作的研究，却积累了相当多的资料与成果，特别是本世纪中近50年来，进展迅速，成绩显著，对于哥德巴赫猜想的研究，达到了非常精深的境界。对于进一步最终研讨哥德巴赫猜想有着极为重要的前沿作用与密切相关的参考价值。

本书作者根据在数学研究工作中的一些经验教训，包括在哥德巴赫猜想的前沿阵地上研究工作的体会，感到在进攻如哥德巴赫猜想这一类世界数学难题的过程中，一是应当了解此类问题的内容与难度，二是应当积累必要的理论基础，三是应当学习已有成果的丰富经验。正因为如此，作者诚恳希望有志青年务必遵照以上三条，力争

在一个扎实的基础上奋勇前进！

哥德巴赫猜想是数论中的一个世界难题。而数论主要是研究自然数的整除性的学问。为此，我们编写了前五章。其中第一、第二两章谈记数方法的由来及自然数与素数的关系，而第三、第四及第五共三章就是讲的整除性。

诚如一开始所说，所谓哥德巴赫猜想是指将偶数表为两奇素数和的问题，那么，素数在自然数中的分布大致如何呢？这是首先应当了解的基本知识，这正是本书第六章的内容。接着我们就在第七章中，详细而通俗地介绍了关于哥德巴赫猜想的研究状态，其中包括了本书作者之一的研究成果的一般介绍。

许多数论问题包括哥德巴赫问题在内，均与数论中的恒等式变化和不定方程的求解等密切相关。在介绍哥德巴赫猜想这一主题成果时，也应当顺便涉及恒等式与不定方程的内容，为此，我们又特地增写了第八、第九两章，并且在第九章末又着重介绍了我们的已故导师华罗庚教授在运用不定方程与恒等式关系来理解哥德巴赫猜想上，一个新的有趣的尝试。

当代数学家们在运用解析数论方法来处理哥德巴赫猜想的研究中，成果的不断更新挺进，往

往与筛法的不断改进有关。本书作者之一（陈景润）对哥德巴赫猜想的最新改进就全仗筛法的运用。因此，我们又特地增添了哥德巴赫猜想与筛法这一章，作为本书最后第十章的内容。

最后，本书作者非常感谢青年数学家张明尧博士在协助本书编写过程中所给予的全力帮助！

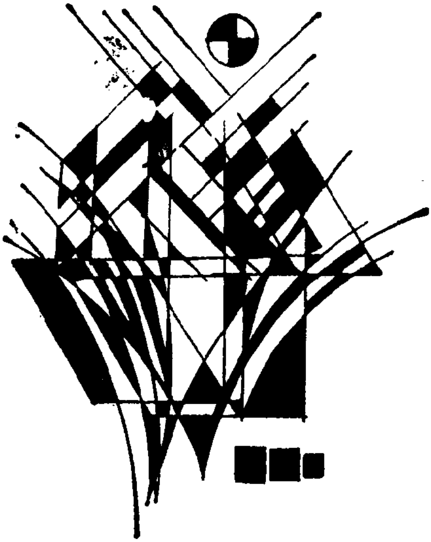
陈景润　邵品琮

1987年元旦，于北京中国科学院数学研究所

目　录

Contents

一 记数的历史



刚刚学会说话的小孩，总在练习“一、二、三、四、…”地数(shǔ)数（shǔ）.那么，当初人类是怎样认识数(shǔ)数(shǔ)的呢？原来，最早人们的生产力很低，对数（shǔ）与形的认识与应用也很差，例如渔猎时期，人们打了一只野兔便在系带上打一个结把，绳子上的结多了，也就表明了打的野生动物就多了．起先人们只会数(shǔ)一、二，而三个或三个以上时就数(shǔ)不清了，均称之为“多”吧．这种现象直到现代尚有一些不发达地方还有类似迹象．例如澳大利亚波利尼亚群岛——南太平洋岛屿，法国殖民地，包括土阿莫土群岛、社会群岛等，以及托列斯海峡群岛——在澳洲与新几内亚之间，那里的一些不发达民族的语言里就只有头几个自然数的名称．如只有1和2，3就叫2－1，4叫2－2，5叫

2—2—1，6叫2—2—2，6以上就叫“多”，说成“许多”或“无数”之类的话了。《周易·系辞》中说：“上古结绳而治，后世圣人，易之以书契”.这里“书契”是指在骨头上或竹、木、石片上刻字。《周易·系辞》里的这一句话的意思是说：开始结绳记数（shù），后来才改为用刻画符号在骨头或竹石片上来代替绳，于是产生了文字。所以，人们开始会“记数（shù）”是很早的，它产生在文字出现之前.随着生产力水平的逐渐提高发展，人们对语言文字及记数方式均有了相应的发展与提高。其中历史上对记数（shù）方法的演变与比较过程可举例如下：

（1）汉字：

一　二　三　四　五

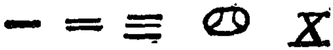
（2）甲骨文（殷）：

一　二　三　亖　X

（3）鼎文（周秦金文——镌刻在金属钟鼎器皿上的文字，也叫鼎文）：

一　二　三　亖（X）

（4）《说文解字》（许慎作）里：



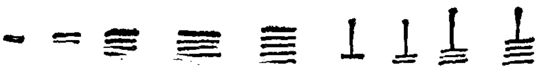
其中头三个字古今没有变化，它是古算筹或手指的象形。“四”开始有了变化，有如下写法：

这可以在郭沫若先生的《甲骨文字研究》中见到，后面几个表示是口里呼气读“四”（sì）的样子。

（5）我国古代用算筹记法。大概不会晚于公元前3世纪，甚至可推到战国初期（公元前5世纪）：

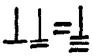
纵式：

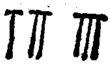
横式：



1　2　3　4　5　6　7　8　9

而且会用十进位记数法了，如

 表示6728。

 它表示6708，会用空档表零了。

（6）中美洲尤卡坦（Yucatan）半岛（墨西哥东部）的印第安人马雅（Maya）部族，会用20进位制来记数，他们用的记数方法是：

1　　　5　　　零（0）

石子　　小棒　　半闭的眼睛（大概是贝壳）

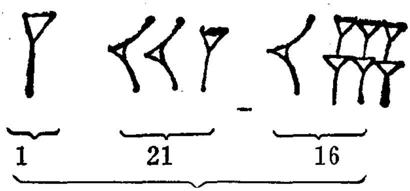
这表示13

这表示有两层构成的数，头一层在下面是17，第二层高一档在上面是8，因为是20进位法，故这个数字是：$8 \times 20 + 17 = 177$。

（7）巴比伦人会用60进位制，他们的记数

法是：

表示： 1　　　　　10



表示：相当于十进位的4876

这是一个由三位数组成的数。

第三位为16，

第二位为21，

第一位为 1 。

由于是60进位制，故该数为：

$$1\times60^2+21\times60+16=4876.$$

（8）古埃及人很早就会用10进位记数法了，但不会用位值制，例如32与23可用同样的字母在不同位置上安放能表示不同值，这一点他们不懂。他们的记数法是：