邵士敏　柳重堪　编

1997

硕士研究生入学考试

数学　复习指导

航空工业出版社

1997年
硕士研究生入学考试数学复习指导

邵士敏　　柳重堪　编

航空工业出版社
1996

内 容 提 要

该书根据国家教委新修订的研究生入学考试数学考试大纲编写而成。全书分两部分：第一部分为应考提示，概述了考研数学五类考试所要求的基本知识和解题方法；第二部分为模拟试题。后部分中，编者完全按照考研大纲规定的题型、难易程度等对Ⅰ～Ⅴ类数学，每类选编了两套题，共提供了10套模拟试题及解答。

该书对所有硕士研究生考生及有关人员有重要参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

1997年硕士研究生入学考试数学复习指导/邵士敏，柳重堪编.
—北京：航空工业出版社，1996.8
ISBN 7-80134-018-3

Ⅰ.19… Ⅱ.①邵… ②柳… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第11550号

责任编辑　周士林

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里14号　100029)
北京高新特公司盛达激光照排中心照排
北京飞达印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

1996年8月第1版　　1996年8月第1次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：18.5　　字数：462.4千字
印数：1—6000　　定价：19.50元

前　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们根据国家教委制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，编写了这本书。

本书包括“内容提要”与“模拟试题”两部分。“内容提要”叙述了数学大纲的全部内容，目的为了帮助考生复习回忆要考的基本概念，基本定理和解题方法。“模拟试题”部分则对Ⅰ类至Ⅴ类数学，每类选编了两套题，共提供了10套模拟试题及解答。1996年Ⅰ类至Ⅴ类数学试卷、参考答案及评分标准以附录形式给出。

在编写过程中，仔细研究了数学大纲中对各部分内容要求的深度。“内容提要”侧重叙述基本概念，基础知识，典型例题，并使之尽量符合大纲要求的深度。为了使“模拟试题”更符合实战的要求，我们参考了近几年的各类试题。并且在选题时，注意有难有易，既选编一些基本题，也选一些较难的、需要经过思考的题，以提高考生的解题能力，使他们能顺利应考并进一步得到提高。

为了节省篇幅，我们把Ⅰ、Ⅱ类内容提要写在一起，Ⅳ、Ⅴ类内容提要写在一起，书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，不另作说明。

由于时间仓促，难免有疏误之处，望读者提出宝贵意见。

编　者

1996年4月于北京

目　　录

数学 I

适用的招生专业：力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理科学与工程、船舶与海洋工程、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术。

考试内容：高等数学、线性代数、概率论或复变函数，其中概率论与复变函数之间由考生自选一门应试。

高等数学包括：1. 函数、极限、连续；2. 一元函数的微分学；3. 一元函数的积分学；4. 向量代数和空间解析几何；5. 多元函数的微分学；6. 多元函数的积分学；7. 无穷级数；8. 常微分方程。

线性代数包括：1. 行列式；2. 矩阵；3. 向量；4. 线性方程组；5. 矩阵的特征值和特征向量；6. 二次型。

概率论包括：1. 随机事件和概率；2. 随机变量及其概率分布；3. 二维随机变量及其概率分布；4. 随机变量的数字特征；5. 大数定律和中心极限定理。

复变函数包括：1. 复数和复变函数；2. 复变函数的积分；3. 级数与留数；保角映射。

试卷结构：

（一）内容比例：

高等数学约 68%；

线性代数约 20%；

概率论或复变函数约 12%。

（二）题型比例：

填空题与选择题约 30%；

解答题（包括证明题）约 70%。

数学Ⅱ

适用的招生专业：机械工程、材料科学与工程、冶金、土木、水利、测绘、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业、石油、铁道、公路、水运、纺织、轻工、林业工程。

数学Ⅱ考试内容：高等数学、线性代数。

高等数学包括：1. 函数、极限、连续；2. 一元函数的微分学；3. 一元函数的积分学；4. 向量代数和空间解析几何；5. 多元函数的微分学；6. 多元函数的积分学；7. 无穷级数；8. 常微分方程。

线性代数包括：1. 行列式；2. 矩阵；3. 向量；4. 线性方程组；5. 矩阵的特征值和特征向量；6. 二次型。

试卷内容比例为：高等数学约 75%，线性代数约 25%。

题型比例为：填空题与选择题约 30%，解答题（包括证明题）约 70%。

数学Ⅰ、数学Ⅱ内容提要

高等数学

一. 函数、极限、连续

1. 函数概念

函数的定义　设在某一过程中，有两个变量 x 与 y，x 的变域是 D。如果按照一定的规律，对于 x 在变域 D 中的每一个数值，都有唯一确定的 y 值与之对应，我们就称 y 是 x 的一个(单值)函数，记作 $y=f(x)$。

称 x 为自变量，y 为函数或因变量，并称自变量的变域 D 为函数的定义域，称因变量的变域为函数的值域。

函数的图形　设给定一个函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在其定义域 D 内变化时，对应的 $f(x)$ 也随之变化。如果在平面上取定直角坐标系 xoy，于是在坐标平面上，动点 $(x,f(x))(x\in D)$① 运动的轨迹称为函数 $y=f(x)$ 的图形。通常函数的图形是一条平面曲线(图 1.1)。

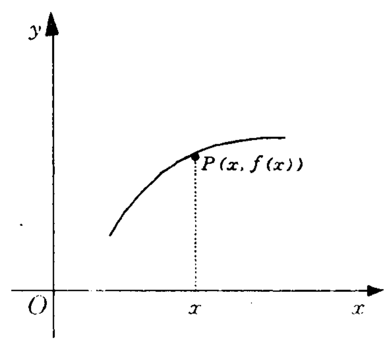

图 1.1

2. 函数的性质

(1) 函数的单调性

定义　若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，就有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\qquad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内为一单调增加(或减少)函数。

若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为一严格单调增加(或减少)函数。

(2) 函数的有界性

设 E 为某一区间，若存在一正数 M，使得对一切 $x\in E$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 E 内有界，否则称 $f(x)$ 在 E 内是无界的。

(3) 函数的奇偶性

设 E 为某对称区间②。若对任意的 $x,-x\in E$，都有

$$f(-x)=-f(x)\qquad (\text{或 } f(-x)=f(x))$$

则称函数 $f(x)$ 在 E 上是奇函数(或偶函数)。

(4) 函数的周期性

---

① 符号∈，表示属于。如 $x\in D$，读作 x 属于 D

② 对称区间指 $(-l,l)$ 或 $[-l,l]$

设函数 $f(x)$ 在 E 上有定义，若存在正数 T（以后记作 $\exists T>0$），对任意的 $x\in E$，都有 $x+T\in E$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是周期函数，T 为其周期。

3. 复合函数、反函数、初等函数

(1) 复合函数

设 $y=f(u)$，$u\in U$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$，且 $\varphi(D)\subset U$①，则

$$y=f[\varphi(x)],\ x\in D$$

称为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数。u 称中间变量。

(2) 反函数

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对任意的 $y\in f(D)$，对应到由方程 $y=f(x)$ 唯一确定的 x，这样确定的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数。通常我们把 $y=f(x)$ 反函数记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $x=\varphi(y)$。

(3) 初等函数

以下六类函数称为基本初等函数：常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数。

由这些函数经过有限次四则运算以及有限次的函数复合步骤而得到的函数称为初等函数。

1、2、3 节要求掌握函数概念，复合函数、反函数概念，并且熟习六类基本初等函数的性质及图形。

4. 数列极限的概念

定义　设 x_n 为一数列，若对任意给定的正数 ε，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 x_n 的极限是 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a\quad(\text{当 } n\to\infty)$$

5. 函数极限的概念

(1) 函数在某一点的极限

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义（不包括 x_0 点），若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A\quad(\text{当 } x\to x_0)$$

(2) 单侧极限

① $\varphi(D)\subset U$，指 $\varphi(D)$ 包含于变域 U

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某右(左)邻域[①]内有定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$(或 $x_0-\delta<x<x_0$)时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右(左)极限为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \qquad (\text{或} \lim_{x\to x_0-0} f(x)=A)$$

亦可记作

$$f(x_0+0)=A \qquad (\text{或} f(x_0-0)=A)$$

(3) $x\to\infty$ 时函数的极限

定义　若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A \quad (\text{当 } x\to\infty)$$

类似地，可给出 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时函数极限的定义。

6. 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，

则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) 若 $B\neq0$ 有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

7. 极限存在的准则

准则 1　若在点 x_0 的某邻域内(除去点 x_0)有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=A,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=A$$

关于数列的情形，准则 1 也有类似的结果。

准则 2　如果数列 $\{x_n\}$ 单调增加(或减少)有上界 M(或有下界 m)，则数列 $\{x_n\}$ 必有极限。

8. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

9. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小

如果在某极限过程中，函数(或数列)的极限是 0，则称在此极限过程中，函数(或数列)是

---

① η 为某一正数，开区间 $(x_0,x_0+\eta)$ 称 x_0 的右邻域；$(x_0-\eta,x_0)$ 称 x_0 的左邻域

无穷小。

(2) 无穷大

若对于任意给定的正数 M,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)|>M$$

则称 $x\to x_0$ 时,$f(x)$是无穷大,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\text{ 或 } f(x)\to\infty\ (\text{当 } x\to x_0)$$

类似地,我们有正、负无穷大的概念。此外,还有其他极限过程中无穷大的概念。

(3) 无穷小阶的比较

定义 1　如果变量 α、β 在同一极限过程($x\to a$, $x\to\infty$或 $n\to\infty$,或其他极限过程)中,都是无穷小,且

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\quad(k\text{ 为常数})$$

则

① 当 $k\neq0$ 时,称在此极限过程中,α 与 β 是同阶无穷小;特别是 $k=1$ 时,称在此极限过程中,α 与 β 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$。

② 当 $k=0$ 时,称在此极限过程中,α 是比 β 高阶的无穷小,记作 $\alpha=0(\beta)$。

定义 2　在某极限过程中,把无穷小 α 作为基本无穷小,而 β 与 $\alpha^k(k>0)$是同阶无穷小,即

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq0,$$

则称 β 是(关于 α 的)k 阶无穷小。

4—9 节要求掌握数列极限、函数极限的概念,掌握无穷小及其阶的比较,还要求会利用极限的四则运算法则、极限存在的准则、两个重要极限去计算数列极限及函数极限。

10. 函数连续性的概念

设函数 $f(x)$在 x_0 点的某邻域内(包括 x_0 点)有定义,若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称 $f(x)$在 x_0 点连续,否则称 $f(x)$在该点不连续。

用"ε—δ"语言可叙述如下:

若对于任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$在 x_0 点连续。

设 $f(x)$在 x_0 点及其右邻域(或左邻域)内有定义,若

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\ (\text{或} \lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0))$$

则称 $f(x)$在 x_0 点右(或左)连续。

若 $f(x)$在(a,b)内每一点都连续,且在 a 点右连续,在 b 点左连续,则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

11. 间断点的分类

若函数 $f(x)$在 x_0 点不连续,则称该点为函数的间断点。

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 点左、右极限存在，且 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$；或者 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$；或者 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义，都称 x_0 点为 $f(x)$ 的第一类间断点。后两种情形也称 x_0 点为可去间断点。

(2) $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限至少有一个不存在，则称 x_0 点为 $f(x)$ 的第二类间断点。

12. 函数连续性的运算

(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

也在 x_0 点连续(对于 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的情形，设 $g(x_0)\neq 0$)。

(2) 若 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 点连续，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点也连续。

13. 初等函数的连续性

初等函数在其定义域内都是连续的。

14. 闭区间上连续函数的性质

(1) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 β，必存在 $c(a<c<b)$，使得 $f(c)=\beta$。

特殊情况：若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，必存在 $c(a<c<b)$，使得 $f(c)=0$

(2) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

②在 $[a,b]$ 上必存在 x_1,x_2 使得

$$f(x_1)=\max_{x\in[a,b]}f(x)=M,\ f(x_2)=\min_{x\in[a,b]}f(x)=m$$

10—14 节要求掌握函数连续性的基本概念，熟习函数间断点的分类，并且了解闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)，会利用它们去做一些证明题。

二. 一元函数的微分学

1. 导数定义

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，x_0 为 (a,b) 内一点，Δx 为自变量的改变量，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数的改变量，若当 $\Delta x\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，或 $y'|_{x=x_0}$.

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均可导，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导。

2. 导数的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么它在该点的导数，等于函数所表示的曲线在相应点 $M(x_0,y_0)(y_0=f(x_0))$ 处的切线斜率(见图 1.2)：

$$f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha\ (\alpha\neq\frac{\pi}{2})$$

$y=f(x)$ 在点 x_0 处的切线 MT 和法线 MN 的方程分别是：

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)$$

及

$$Y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0)$$

其中(X,Y)为切线或法线上的动点坐标。

3. 导数的力学意义

设质点P沿一直线作变速运动，用s表示从某一选定的时刻开始到时刻t为止质点所走过的路程，s是t的函数：$s=s(t)$。运动质点在t_0时的瞬时速度$v(t_0)$是路程函数$s(t)$在t_0处对于时间t的导数，即

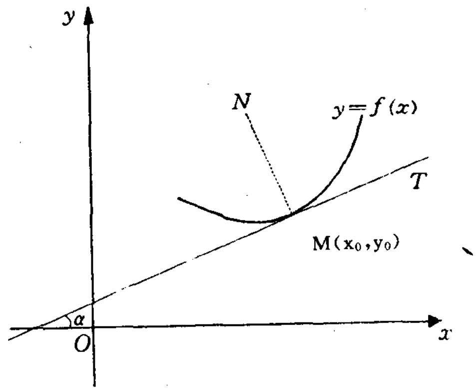

图 1.2

$$v(t_0) = s'(t)\big|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

4. 基本初等函数的导数公式

(1) $(c)'=0$

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$实数)

(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(6) $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(7) $(e^x)'=e^x$

(8) $(a^x)'=a^x\ln a$

(9) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(10) $(\log_a^x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(14) $(\mathrm{arcctg}x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

5. 导数的运算

(1) 四则运算法则

若$u(x)$,$v(x)$的导数都存在，则

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$；

② $(uv)'=u'v+uv'$

③ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

(2) 复合函数的导数

设$u=\varphi(x)$在点x处可导，$y=f(u)$在点$u=\varphi(x)$处可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处可导，且

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

即

$$y'_x = y'_u u'_x$$

(3) 反函数的导数

设函数$y=f(x)$在(a,b)内的导数存在且不为零，则它有连续的反函数$x=\varphi(y)$，且可导，其导数为：

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

(4) 隐函数的导数

若 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的(可导)函数,则其导数 $y'(x)$ 可以由方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$$

求得.

(5) 若函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\Psi(t),\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 给出,其中 $\varphi(t),\Psi(t)$ 在 (α,β) 内可导,且 $\varphi'(t)\neq0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

6. 高阶导数

定义 函数 $y=f(x)$ 的导数的导数,即 $(y')'$,称为函数 $f(x)$ 的二阶导数,记为 $y''=f''(x)$。

一般地,函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数,记为 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$。

定理(高阶导数的运算法则)设 $u(x),v(x)$ 在 x 点均有 n 阶导数,则

(1) $[u+v]^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$

(2) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

其中

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1—6 节要求掌握导数概念,复合函数、隐函数、由参数方程表示的函数求导方法等。能熟练的计算初等函数的导数。会求某些函数的高阶导数,如 $e^x,\sin x,\ln(1+x)$ 等。

7. 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义,x 为 (a,b) 内一点,Δx 为自变量的改变量,$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 为函数的改变量。若存在常数 A(与 Δx 无关),使得

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\qquad(当\ \Delta x\to0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x 处可微,并称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分,记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充要条件是:函数 $f(x)$ 在点 x 处可导,且 $A=f'(x)$. 于是

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

8. 微分的几何意义

如图 1.3 所示,设 $\widehat{MM_1}$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的一段弧,$\overline{MT}$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的切线. 且 $\overline{MN}=\Delta x=\mathrm{d}x$,于是有

$$\overline{TN}=\overline{MN}\mathrm{tg}\alpha=f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$$

因此,可以说 Δy 是曲线纵坐标的改变量,而 $\mathrm{d}y$ 是切线纵坐标的相应改变量.

9. 微分的四则运算

设函数 $u(x),v(x)$ 在点 x 处可微,则

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$;

(3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udu}{v^2}\quad(v\neq 0)$.

10. 一阶微分形式不变性

设 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可微，$y=f(u)$ 在点 $u(u=\varphi(x))$ 处可微，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可微，且仍有形式

$$dy=f'(u)du$$

其中 du 是函数，$u=\varphi(x)$ 的微分.

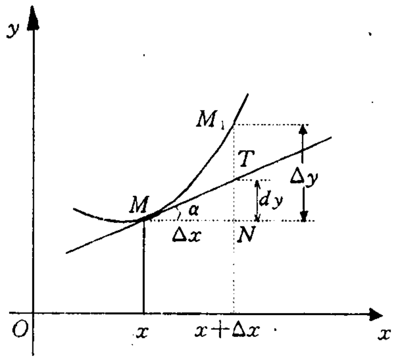

图 1.3

11. 微分在近似计算中的应用

(1) 小改变量公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，当 $|\Delta x|$ 充分小时(可用记号 $|\Delta x|\ll 1$ 表示)，有

$$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$$

或

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

取 $x_0=0$，当 $|x|\ll 1$ 时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

利用上式易证以下近似公式：

① $e^x\approx 1+x$；

② $\ln(1+x)\approx x$；

③ $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$；

④ $\sin x\approx x$；

⑤ $\mathrm{tg}x\approx x$.

$(x\ll 1)$

(2) 绝对误差与相对误差

设某量的准确值为 A，近似值为 a，我们称 $|A-a|$ 为 a 的绝对误差，称 $\left|\frac{A-a}{a}\right|$ 为 a 的相对误差，如果已知 $|A-a|\leqslant\delta$，则称 δ 为 a 的最大绝对误差，称 $\frac{\delta}{|a|}$ 为 a 的最大相对误差。(见图 1.4)

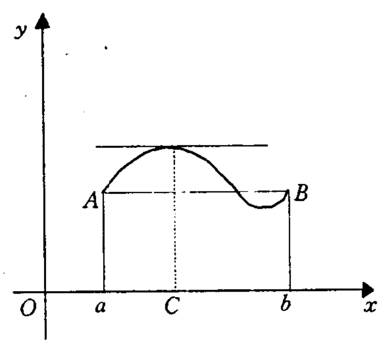

图 1.4

若 x 可以直接度量，在计算 $y=f(x)$ 的近似值时，如果已知 $|\Delta x|\leqslant\delta$，我们有

$$|\Delta y|\approx|f'(x)||\Delta x|\leqslant|f'(x)|\delta$$

$$\left|\frac{\Delta y}{f(x)}\right|\approx\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right||\Delta x|\leqslant\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta$$

$|f'(x)|\delta$，$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta$ 分别表示近似值 $f(x)$ 的最大绝对误差和最大相对误差。

7—11 节要求掌握微分概念，可导与可微的关系，了解一阶微分形式不变性. 并会用微分进行近似计算

12. 微分中值定理

(1) 罗尔(Rolle)定理　若函数 $f(x)$ 满足：① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，② 在开区间 (a,b) 内可微；③ $f(a)=f(b)$，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 c，使得　　$f'(c)=0$。