高等学校教学用書

力学

Л. Д. 朗道
Е. М. 栗弗席兹 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

力　　学

Л. Д. 朗　道
Е. М. 栗弗席兹 著
莫斯科大学物理系四年級中国留学生譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国立物理数学書籍出版社(Физматгиз)出版的朗道(Л. Д. Ландау)、栗弗席兹(Е. М. Лифшиц)著"力学"(Механика)1958年版譯出的。原書曾在1940年以朗道、皮亚提哥尔斯基(Л. Пятигорский)的名义出过一版,这次重版之前,由著者改写过,并作为"理論物理教程"(共九卷)的第一卷的單行本重版的。

本書內容論述力学的基本問題——运动方程、守恒定律、剛体运动、正則方程,同时还叙述了碰撞的經典理論及綫性和非綫性系統的弱振动。可供物理、工程物理等系的大学生、研究生及有关方面的科学工作者参考。

本書是莫斯科大学物理系四年級中国留学生作为国庆献礼而集体譯出的,譯稿曾經王懋海、王珊、石長和、金炳年、楊基方等五位同学負責校对。

2P71/06

力　　学

Л. Д. 朗　道　Е. М. 栗弗席兹著

莫斯科大学物理系四年級中国留学生合譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·581　开本 850×1168 1/32　印張 6 14/16

字数 164,000　印数 1—13,000　定价(4)¥0.80

1959年4月第1版　1959年4月上海第1次印刷

序　言

从这本書开始我們打算逐步重版我們的理論物理全部各卷。它的最后計划如下：

1．力学；

2．場論；

3．量子力学(非相对論性理論)；

4．相对論性量子理論；

5．統計物理；

6．流体动力学；

7．彈性理論；

8．連續介質的电动力学；

9．物理运动学。

第一卷的第一版曾于 1940 年由 Л. 朗道和 Л. 別齐哥尔斯基發表出版。虽然本書講述的总計划并沒有改变，但是是經过了重大的修改，并且完全是重新写成的。

我們感謝 И. Е. 强劳申斯基和 Л. П. 彼达也夫斯基在閱讀本書初稿时所給予的帮助。

Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹

莫斯科 1957年7月

目　录

第一章　运动方程

§1. 广义坐标

質点①的概念是力学最基本概念之一。質点应当理解成这样的物体，当描写它的运动时，可以忽略它的大小。当然，这种忽略与問題的具体条件有关。譬如，当研究行星圍繞太阳的运动时，可以把行星看成質点，然而，在观察它們自轉的时候，就当然不能这样看了。

一个質点在空間的位置由它的向徑 $\boldsymbol{r}$ 所决定。向徑的分量与質点的笛卡尔坐标 x, y, z 相合。$\boldsymbol{r}$ 对时間 t 的微商

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

叫做速度，而二次微商 $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ 叫做質点的加速度。像一般所通用的那样，以后我們将常常用字母上方的一点表示对时間的微商，例如 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$。

为了确定由 N 个質点組成的体系在空間的位置，应該給定 N 个向徑，即 $3N$ 个坐标。一般把为了單值地确定一个体系的位置所必需給出的独立量的数目，叫做这体系的**自由度**的数目。在上述的情况下，这个数目等于 $3N$。这些量不一定是質点的笛卡尔坐标，根据問題的条件，有时选择某一种其他的坐标可能会更加方便。足以描写（具有 s 个自由度的）体系位置的任意 s 个量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$，叫做該体系的**广义坐标**，而微商 $\dot{q}_i$ 則是它的**广义速度**。

① 我們以后将經常用"粒子"一詞来代替术語"質点"。

但是，在某种意义上来說，給出广义坐标的数值，还不能决定体系在該时刻的“力学状态”，因为那并不能預言体系在下一个时刻的位置。在給定了坐标数値的情况下，体系可以具有任意速度，而由于速度的不同，体系在下一个时刻（也就是說，經过无穷小的时間間隔 dt 后）的位置也将不一样。

实驗証明，同时給定所有的坐标与速度就能完全确定体系的状态，并且在原則上可以預言它以后的运动。从数学的观点来看，这就是說，給定在某一时刻的坐标和速度也就單値地确定了在該时刻的加速度 $\ddot{q}$①。

把加速度和坐标、速度联系起来的关系式叫做**运动方程**。对函数 $q(t)$ 来說，这是一个二阶微分方程，这些方程的积分在原則上可以确定力学体系的运动軌道。

§2. 最小作用量原理

力学体系的运动規律的最一般的形式可以由所謂**最小作用量原理**（或者**哈密頓原理**）給出。根据这一原理，每一力学体系由一定的函数

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t)$$

［或簡写为 $L(q, \dot{q}, t)$］来描述其特性，而体系的运动满足下面的条件。

假定在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的时刻，体系占有两个确定的位置，这两个位置分别由两組坐标值 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 决定。这时，体系在两个位置之間按照使积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (2,1)$$

① 为了使符号簡便起見，我們将經常把 q 理解为所有坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 的集合（同样，把 $\dot{q}$ 看作所有速度的集合）。

有最小可能值①的方式运动。函数 L 叫做该体系的拉格朗日函数，而积分(2,1)则叫做作用量。

拉格朗日函数仅仅包含 q 和 $\dot{q}$，而不包含更高級的微商 $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, …，这一情况說明了力学状态完全由給定的坐标与速度所决定。这正是在前面已經提到过的事实。

現在我們来推导确定积分(2,1)最小值的微分方程。为了简化公式的書写，我們先假定体系只有一个自由度，这样一来，应該决定的只有一个函数 $q(t)$ 了。

假定 $q=q(t)$ 正巧是使 S 有極小值的函数。这就是說，以形如

$$q(t)+\delta q(t) \tag{2,2}$$

的函数代換 $q(t)$ 时，S 就增大，其中，δq 是在从 t_1 到 t_2 整个时間間隔内都很小的函数[它叫做函数 $q(t)$ 的变分]。既然当 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时，所有用以比較的函数(2,2)应該有相同的值 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$，因而应該有

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0。 \tag{2,3}$$

以 $q+\delta q$ 代 q 所引起的 S 的变化由差

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)\,dt-\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt$$

决定。这个差按 δq 和 $\delta\dot{q}$（在被积分式子内）指数的展开式是从一級項开始的。这些項的总和等于零是 S 为極小值②的必要条件。这总和叫做积分的第一变分（通常簡称为变分）。因此，最小作用量原理可以写成

① 但是，应該指出，这样表述的最小作用量原理对于全部运动軌道整体来說并不是任何时候都是正确的，而只是对于軌道每一个足够小的部分才是正确的。对于全部軌道，积分(2,1)可能只有極值而不一定有極小值。但是这一情况在推导运动方程时并无多大关系，因为它仅仅应用了極值条件。

② 一般来說，是为極值。

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\,\dot{q},\,t)\,dt=0, \tag{2,4}$$

或者进行变分后，

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}\right)dt=0。$$

对第二项实行分部积分，并注意到 $\delta\dot{q}=\dfrac{d}{dt}\,\delta q$，我們得到

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt=0。\tag{2,5}$$

但由于条件(2,3)，式中第一項消失，所以，当 δq 取任意值的时候，剩下的积分应該等于零。这只有在被积分的式子恒等于零的情况下才是可能的。因此，我們得到方程

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0。$$

当具有几个自由度时，在最小作用量原理中应該独立地变分 s 个不同的函数 $q_i(t)$。显然，这时我們将得到 s 个方程

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\,2,\,\cdots,\,s)。\tag{2,6}$$

这就是要找的微分方程，在力学里它們叫做**拉格朗日方程**[①]。假定所給定的力学体系的拉格朗日函数已經知道，則方程(2,6)确定加速度、速度和坐标間的关系，也就是說，它是体系的运动方程。

从数学观点来看，方程(2,6)組成 s 个未知函数 $q_i(t)$ 的 s 个二阶方程的方程組。这个方程組的普遍解包含 $2s$ 个任意常数。为了决定这些常数，从而完全确定力学体系的运动，还必須知道描写体系在某一給定时刻的状态的初始条件，例如知道所有坐标与速度的初値。

假定力学体系由 A 和 B 两部分組成，并且每一部分都是封閉

① 在研究关于决定形如(2,1)的积分的極値的形式問題的变分計算中，这些方程叫做欧勒方程。

的，因而分别有拉格朗日函数 L_A 和 L_B。这时在極限情形下，当两部分离开得很远，以至它們之間的相互作用可以忽略不計时，整个体系的拉格朗日函数趋向極限

$$\lim L = L_A + L_B \text{。} \tag{2,7}$$

拉格朗日函数的可加性本身表明了这样一个事实，卽沒有相互作用的諸部分中的任一部分的运动方程不可能包含屬于体系另外部分的量。

显然，将力学体系的拉格朗日函数乘上一个任意常数这种作法本身并不反映在运动方程上。从这里好像可以得出很重要的不确定性，不同的孤立力学体系的拉格朗日函数可以乘上任意不同的常数。可加性消除了这种不确定性，因它只允許对所有体系的拉格朗日函数同时乘上同一个常数，而这不过是归結为选擇这一物理量量度單位的任意。在 § 4 中我們还要回到这一問題上来。

还必須作以下的一般性的提示。我們来研究两个函数 $L'(q, \dot{q}, t)$ 和 $L(q, \dot{q}, t)$，两者相差任意一个坐标与时間的函数 $f(q, t)$ 对时間的全微商：

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \text{。} \tag{2,8}$$

利用这二个函数所計算出来的积分(2,1)由关系式

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q, t)\,dt =$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

联系，也就是說，积分 S' 和 S 相差一附加項，这附加項当变分作用量时，是要消失的。因此，条件 $\delta S' = 0$ 与条件 $\delta S = 0$ 一致，从而运动方程的形式并不改变。

可見，确定拉格朗日函数的准确度是到可以加上时間和坐标的任意函数的全微商。

§3. 伽利略相对性原理

为了研究力学現象必須选擇这个或那个計算系統。一般来說，在不同計算系統里运动規律有着不同形式。假如选取一个任意的計算系統，則可能使甚至很簡單的現象的規律在这系統里看起来是很复杂的。自然就产生了寻找这样一种計算系統的課題，在这种計算系統里力学規律要显得特別簡單。

对于任意一个計算系統来講，空間并不是均匀的和各向同性的。这就是說，即使某一物体并不与其他物体相互作用，但它在空間的不同位置和它的不同指向在力学意义上并非等效的。在一般情况下，这也适用于非均匀的时間。即是說，不同的时刻也不等效。由于空間与时間的这些性質在描写力学現象时所引起的麻煩是显而易見的。例如，自由的（不受外界作用的）物体不可能静止，即使在某一时刻物体的速度等于零，但在下一时刻物体就会在某一方向开始运动。

然而，总可以找到这样的計算系統，相对于它来說，空間是均匀的和各向同性的，而时間也是均匀的。这种系統叫做**慣性系統**。特別应該注意的是：慣性系統里，在某一时刻静止的自由物体将永远静止。

关于在慣性計算系統內自由运动着的質点的拉格朗日函数的形式，現在我們可以立刻作出一些結論。空間和时間的均匀性表明，拉格朗日函数既不能显含点的向徑 $\boldsymbol{r}$，也不能显含时間 t，也就是說 L 只能是速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数。由于空間的各向同性，拉格朗日函数也不可能与向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向有关。因此它仅仅是該向量絕对值的函数，即速度平方 $\boldsymbol{v}^2=v^2$ 的函数：

$$L=L(v^2)。\tag{3,1}$$

由于拉格朗日函数与 $\boldsymbol{r}$ 无关，我們得到

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0,$$

因此拉格朗日方程有如下形式[①]：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0,$$

由此，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=$常数。但由于$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$只是速度平方的函数，从此得出

$$\boldsymbol{v}=\text{常数}。\tag{3,2}$$

这样一来，我們就得到結論：在慣性計算系統內，一切自由运动都以大小和方向皆不改变的速度进行着。这一結論构成了所謂**慣性定律**的內容。

如果，除了我們已有的慣性計算系統以外，我們还引入另一系統，它相对于前一系統作匀速直綫运动，則相对于这一新系統的自由运动的規律与相对于前一系統的自由运动的規律完全是一样的，卽自由运动仍将等速度地进行。

但是，实驗証明，不仅自由运动的規律在这些系統里是一样的，并且在力学的所有其他方面也是完全等效的。因此，存在着不是一个，而是无穷多个相互間相对作着匀速直綫运动的慣性計算系統。在所有这些系統內，空間与时間的性質是一样的，全部力学規律也是一样的。这一論断构成了力学最重要的原理之一——所謂**伽利略相对性原理**的內容。

上面所講到的一切都十分明显地証明了慣性計算系統性質的特别。由于这些性質的关系，在研究力学現象时，照例应該采用这些系統。以后，在沒有特别作相反的声明时，我們将仅仅研究慣性計算系統。

所有无限多个这种系統的力学完全等效性同时表明，并不存

① 无向量对向量的微商所指的是这样的向量，它的分量等于无向量对于向量的相应分量的微商。

在任何一个比其他系統更优越的“絕对”計算系統。

設有两个不同的計算系統 K 和 K'，其中 K' 相对于 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动，同一質点在系統 K 和 K' 里的坐标 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 相互之間由关系式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}t \qquad (3,3)$$

联系着。在这里我們認为时間进程在二个計算系統里是一样的，卽

$$t=t'。 \qquad (3,4)$$

关于时間絕对性的假定是經典力学概念的基础①。

公式 (3,3)，(3,4) 叫做伽利略変換。伽利略相对性原理可以定义为要求力学运动方程相对于这一变換不变。

§4. 自由質点的拉格朗日函数

在确定拉格朗日函数的形式以前，我們首先看一下最簡單的情况——質点相对于慣性計算系統的自由运动。我們在上面已經看到，在这种情况下的拉格朗日函数只可能与速度向量的平方有关。我們利用伽利略相对性原理来考察此函数关系的形式。如果慣性計算系統 K 以无限小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对慣性系統 K' 运动，則 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\varepsilon}$。因为运动方程在所有計算系統里应該有同样的形式，所以經过这样的变換，拉格朗日函数 $L(v^2)$ 应該变为函数 L'，如果后者不同于 $L(v^2)$，最多也只能相差一个坐标与时間的函数的全微商（見 §2 末）。

于是，我們有

$$L'=L(v'^2)=L(v^2+2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2)。$$

将这一表达式按 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 指数展开成級数，并忽略高級无穷小，我們得到

① 这个假定在相对論力学里是不对的。

$$L(v'^2)=L(v^2)+\frac{\partial L}{\partial v^2}\,2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varepsilon}。$$

等式右方的第二項只有在它綫性地依賴于速度 $\boldsymbol{v}$ 的情况下才是时間的全微商。因此 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 与速度无关，也就是說，在所研究的情况下，拉格朗日函数与速度平方成正比：

$$L=av^2。$$

当进行速度的无限小的变换时，上述形式的拉格朗日函数滿足伽利略相对性原理，从此可以直接得出結論：在計算系統 K 以有限速度 $\boldsymbol{V}$ 相对于 K' 运动的情况下，拉格朗日函数不变。实际上，

$$L'=av'^2=a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{V})^2=av^2+2a\boldsymbol{v}\boldsymbol{V}+aV^2$$

或者

$$L'=L+\frac{d}{dt}(2a\boldsymbol{r}\boldsymbol{V}+aV^2t)。$$

(这 $\boldsymbol{V}$ 是常数，与 t 无关)

第二項是全微商，因此可以丟掉。

常数 a 一般用 $m/2$ 来表示，所以自由运动着的質点的拉格朗日函数最后写成

$$L=\frac{mv^2}{2}。\tag{4,1}$$

量 m 叫做質点的質量。由于拉格朗日函数的可加性，对于沒有相互作用的質点所組成的体系，我們有①

$$L=\sum_a\frac{m_av_a^2}{2}。\tag{4,2}$$

应該强調指出，只有考虑到这一性質时，所給的質量定义才有实在的意义。在 §2 中曾經指出，无論什么时候都可以对拉格朗日函数乘以任意常数，这样作并不在运动方程上反映出来。对于函数(4,2)这样乘就相当于質量量度單位的改变。但是，当單位改

① 我們將以拉丁字母表最前面的几个字母作为給質点編号的指数，而給坐标編号的指数用字母 $i, k, l, \cdots$。

变时，不同粒子的質量間的比例关系并不改变，也正因为如此，粒子的質量才具有实在的物理意义。

很容易看出，質量不可能是負的。事实上，根据最小作用量原理，对于質点从空間的点 1 到点 2 的眞实运动，积分

$$S=\int_1^2 \frac{mv^2}{2}dt$$

具有極小值。假設質点首先沿着軌道很快离开点 1，然后很快地靠近点 2，如果說質量是負的，則对于这样的軌道，作用量积分可取絕对值任意大的負值，也就是說不可能有極小值①。

値得指出，

$$v^2=\left(\frac{dl}{dt}\right)^2=\frac{dl^2}{dt^2}。\qquad (4,3)$$

因此，为了写出拉格朗日函数，在相应的坐标系里找到弧元長度的平方就足够了。

例如，在笛卡尔坐标中 $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$，因此

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)。\qquad (4,4)$$

在圓柱坐标中 $dl^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$，由此

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)。\qquad (4,5)$$

在球形坐标中 $dl^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$，而

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)。\qquad (4,6)$$

§5. 質点系的拉格朗日函数

現在我們来研究不与任何外界物体作用，而只互相作用的質点体系。这样的体系叫做**封閉系**。研究發現，給沒有相互作用的

① 在第3頁注解①中所作的說明并不妨害这一結論。因为当 $m<0$ 时，不論对于軌道怎样小的区間积分都不可能有極小值。

質点系的拉格朗日函数(4,2)加进一定的(与相互作用的性質有关的)坐标的函数①可以描写質点間的相互作用。若用 U 来表示这一坐标函数，我們可写出

$$L=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}-U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{5,1}$$

($\boldsymbol{r}_a$ 是第 a 个質点的向徑)。这就是封閉系的拉格朗日函数的一般形式。

函数 U 叫做質点系的位能，而

$$T=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

叫做动能。这些名称的意义将在 §6 中解釋。

位能仅仅与所有各質点在同一时刻的分布有关这一事实表明，它們中一个質点位置的改变立刻就反映在所有其他質点上，所以可以說，相互作用瞬时"傳播"。在經典力学里相互作用的这种性質是不可避免的，这点与經典力学的基本前提——时間的絕对性和伽利略原理有着密切的联系。如果說相互作用的傳播不是瞬时的，也就是說以有限速度傳播的話，則这个速度在不同的(相互相对运动着的)計算系統里是不同的，因为时間的絕对性自然而然地就意味着可以把通常的速度相加法則运用于一切現象。然而，这样一来，有相互作用的物体的运动規律在不同的(慣性)系統里就将不一样了，而这是違反相对性原理的。

在 §3 里我們只講了时間的均勻性。拉格朗日函数(5,1)的形式表明，时間不仅是均勻的，而且是各向同性的，也就是說，它的性質在两个方向上都是一样的。事实上，以 $-t$ 代換 t 并不改变拉格朗日函数，因此运动方程式也不改变。換句話說，假如在系統里有某种运动是可能的，則相反的运动，卽以相反程序經过同样这

① 这一論点屬于本書所叙述的經典(非相对論性)力学范圍。