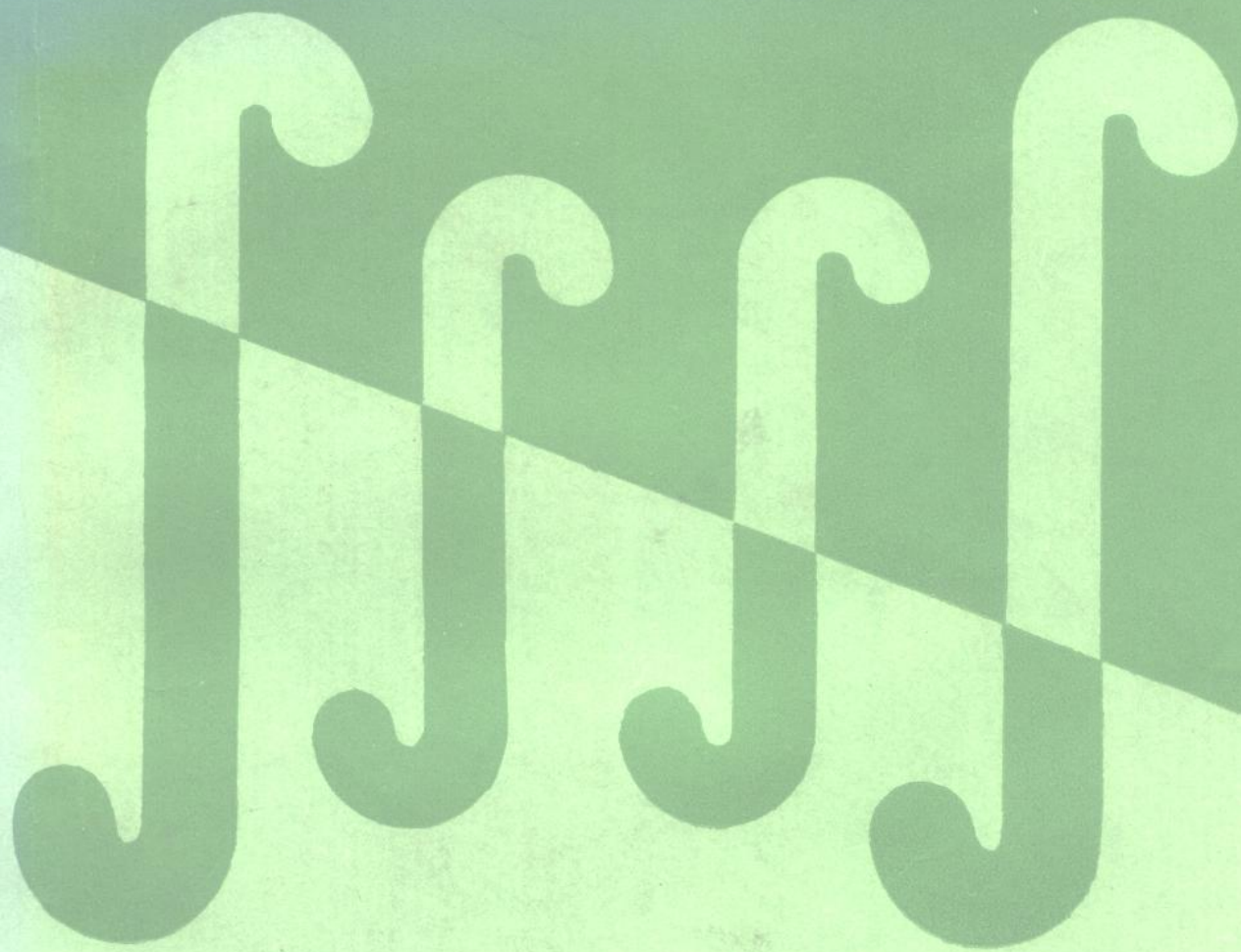


上册

高等数学

许品芳 欧景昭 编著



兵器工业出版社



013
X 8 2
1

358881

高等数学

(上册)

许品芳 欧景昭 编著



兵器工业出版社

(京)新登字049号

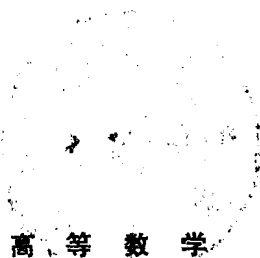
内 容 介 绍

本书是以国家教委批准的《高等数学课程教学基本要求》为依据,用认知心理学理论为指导编写的。

本书分上下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分、中值定理与导数应用、常微分方程,并附有积分表与常用曲线;下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分、向量函数积分、级数,并附有若干曲面所围立体图形。

本书结构紧凑,系统新颖,说理详尽,深入浅出,例题丰富,习题题型完备,便于自学,可作为高等工业院校教材,也可作为工程技术人员自学用书或参考书。

04490/27



高等数学

(上册)

许品芳 欧景昭 编著

•

兵器工业出版社出版

(北京市海淀区车道沟10号)

新华书店总店科技发行所发行

各地新华书店经销

兵器工业出版社五一印刷厂印装

•

开本: 787×1092 1/16 印张: 16.125 字数: 394.68千字

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数: 1~9000 定价: 8.20元

ISBN 7-80038-425-X/O·22

前 言

1987年,我们以国家教委正式颁布的《高等数学教学基本要求》为依据,结合华东工学院的特点,用模式思维理论为指导编写了一本《高等数学讲义》。经88、89、90三届使用,效果较好。在此基础上,我们充分征求华工应用数学系教师的使用意见,进行删简、修改,特别是重选了全部习题,形成本书。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限、连续、导数与微分、不定积分与定积分、中值定理与导数应用、常微分方程;下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分、向量函数积分与场论三度、级数。

本教材有如下特点:

1. 以模式思维理论为指导 它认为学好一门课归根结蒂是掌握一定数量的模式。所谓模式是指:在什么条件下应采取什么相应行动,从而会得到什么相应结果或应该做什么相应的事。正是模式思维指导着人们去思考、去行动,去把握各个具体事物。

数学模式的基础是数学中的概念。数学模式包括典型习题、解题方法与数学思想三个层次。帮助工科一年级大学生正确理解数学概念,建立数学思维模式是本教材的任务。

2. 讲授系统新颖 本教材打破了以数学内容为系统的习惯,而以学生建立模式的需要进行编排。为了突出极限思想,将数列极限与函数极限分开成节;为了强化极限运算,先介绍连续函数,后介绍极限运算技巧;将中值定理放在定积分之后,增强了学生对变上限积分表示的函数之了解,同时在研究函数时可应用积分思想,从而突出了知识的横向联系与综合性;将微分方程放在上册是为了配合一年级下学期的物理课学习;鉴于向量函数在工程技术中的重要性,突出重积分与第一类线面积分的共性,我们把第二类线面积分与场论初步独立成章。

3. 例题丰富,习题充分,题型较全 要建立数学概念,形成数学模式,掌握数学技巧,首先要借鉴他人经验,其次是本人的反复练习。因此,丰富的例题、充分的习题、题型完备是必不可少的。而有一定数量的、难度较大的习题是为学有余力的学生准备的。

本教材的正文部分由许品芳副教授改编,并请国家级有杰出贡献的中青年专家施容华教授审定;习题部分由欧景昭副教授重选、验算。

由于模式思维理论在国内尚属新事物,我们领会不深,加上系统变化较大,编者水平有限,因此,本教材可能有许多不足或考虑不周,甚至差错之处,欢迎批评指教,我们不胜感谢。

许品芳 欧景昭

1991年7月于华东工学院

目 录

第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 绝对值与区间.....	(1)
§ 1.1.1 绝对值.....	(1)
§ 1.1.2 区间.....	(2)
习题 1 - 1	(3)
§ 1.2 数列极限.....	(3)
§ 1.2.1 数列.....	(3)
§ 1.2.2 数列的极限.....	(4)
§ 1.2.3 数列极限的性质.....	(7)
§ 1.2.4 数列极限的运算法则.....	(8)
§ 1.2.5 数列极限存在准则.....	(10)
习题 1 - 2	(13)
§ 1.3 函数.....	(16)
§ 1.3.1 函数概念.....	(16)
§ 1.3.2 研究函数时常要考察的几种性质.....	(20)
§ 1.3.3 初等函数.....	(21)
习题 1 - 3	(26)
§ 1.4 函数极限.....	(28)
§ 1.4.1 自变量趋于无限时函数的极限.....	(28)
§ 1.4.2 自变量趋向有限值时函数的极限.....	(30)
§ 1.4.3 函数极限的统一定义和性质.....	(32)
§ 1.4.4 无穷小量与无穷大量.....	(34)
§ 1.4.5 极限运算法则.....	(37)
习题 1 - 4	(40)
§ 1.5 连续函数.....	(43)
§ 1.5.1 函数的连续性.....	(43)
§ 1.5.2 函数的间断点.....	(45)
§ 1.5.3 闭区间上连续函数的性质.....	(46)
§ 1.5.4 初等函数的连续性.....	(47)
习题 1 - 5	(49)
§ 1.6 无穷小比较.....	(51)
§ 1.6.1 两个重要极限.....	(51)
§ 1.6.2 无穷小的比较.....	(55)
习题 1 - 6	(58)
第二章 导数与微分	(61)
§ 2.1 导数概念.....	(61)

§ 2.1.1	问题的提出	(61)
§ 2.1.2	导数定义	(62)
	习题 2 - 1	(66)
§ 2.2	求导法则	(68)
§ 2.2.1	函数的和差积商的求导法则	(68)
§ 2.2.2	反函数的求导法则	(70)
§ 2.2.3	复合函数的求导法则	(70)
§ 2.2.4	初等函数求导方法小结	(72)
	习题 2 - 2	(74)
§ 2.3	最值问题	(77)
§ 2.3.1	闭区间上连续函数的最值	(77)
§ 2.3.2	开区间内连续函数的最值	(78)
	习题 2 - 3	(80)
§ 2.4	微分及其应用	(81)
§ 2.4.1	微分概念	(81)
§ 2.4.2	微分运算	(83)
§ 2.4.3	微分在近似计算中的应用	(84)
* § 2.4.4	微分在误差估计中的应用	(85)
	习题 2 - 4	(87)
§ 2.5	求导法则补充	(88)
§ 2.5.1	隐函数求导法则	(88)
§ 2.5.2	参数方程所确定的函数的求导法则	(90)
§ 2.5.3	相关变化率	(91)
	习题 2 - 5	(92)
§ 2.6	高阶导数	(93)
§ 2.6.1	高阶导数	(93)
§ 2.6.2	莱布尼兹公式	(95)
§ 2.6.3	隐函数的高阶导数	(96)
§ 2.6.4	参数方程所确定函数的高阶导数	(96)
	习题 2 - 6	(97)
第三章	不定积分与定积分	(100)
§ 3.1	原函数与不定积分	(100)
§ 3.1.1	原函数与不定积分概念	(100)
§ 3.1.2	不定积分基本公式	(101)
	习题 3 - 1	(105)
§ 3.2	积分法则	(107)
§ 3.2.1	第一类换元积分法则	(107)
§ 3.2.2	第二类换元积分法则	(111)
§ 3.2.3	分部积分法则	(113)

§ 3.2.4 不能用初等函数表示的不定积分	(116)
习题 3-2	(116)
§ 3.3 三种特殊类型函数的不定积分	(120)
§ 3.3.1 有理函数的不定积分	(120)
§ 3.3.2 三角函数有理式的不定积分	(123)
§ 3.3.3 简单无理函数的不定积分	(125)
习题 3-3	(126)
§ 3.4 定积分概念	(129)
§ 3.4.1 实例	(129)
§ 3.4.2 定积分定义	(131)
§ 3.4.3 定积分性质	(134)
§ 3.4.4 微积分基本定理	(137)
习题 3-4	(140)
§ 3.5 定积分的计算	(142)
§ 3.5.1 定积分的换元积分法则	(142)
§ 3.5.2 定积分的分部积分法则	(144)
§ 3.5.3 定积分的近似计算	(146)
习题 3-5	(149)
§ 3.6 广义积分	(151)
§ 3.6.1 无穷区间上的广义积分	(151)
§ 3.6.2 无界函数的广义积分	(153)
习题 3-6	(154)
§ 3.7 定积分应用	(156)
§ 3.7.1 定积分的元素法	(156)
§ 3.7.2 平面图形的面积	(157)
§ 3.7.3 体积	(160)
§ 3.7.4 平面曲线的弧长	(162)
§ 3.7.5 定积分的物理应用	(164)
习题 3-7	(166)
第四章 中值定理及导数应用	(168)
§ 4.1 微分中值定理与函数增减性判别	(168)
§ 4.1.1 罗尔定理	(168)
§ 4.1.2 拉格朗日定理	(169)
§ 4.1.3 函数的增减性判别	(171)
§ 4.1.4 柯西定理	(172)
§ 4.1.5 例题	(173)
习题 4-1	(174)
§ 4.2 洛必大法则	(176)

§ 4.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	(177)
§ 4.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(179)
§ 4.2.3	其他类型未定式	(181)
	习题 4-2	(183)
§ 4.3	泰勒公式	(185)
§ 4.3.1	泰勒公式	(185)
§ 4.3.2	几个常用的麦克劳林公式	(187)
§ 4.3.3	泰勒公式的应用举例	(189)
	习题 4-3	(191)
§ 4.4	关于函数图形的讨论	(193)
§ 4.4.1	函数的极值	(193)
§ 4.4.2	函数的凹凸性与拐点	(195)
§ 4.4.3	渐近线	(197)
§ 4.4.4	函数作图	(199)
	习题 4-4	(200)
§ 4.5	曲率	(202)
§ 4.5.1	曲率概念	(202)
§ 4.5.2	曲率圆	(204)
* § 4.5.3	渐屈线与渐伸线	(206)
	习题 4-5	(207)
§ 4.6	方程近似解	(208)
	习题 4-6	(210)
第五章	微分方程	(211)
§ 5.1	微分方程的一般概念	(211)
§ 5.1.1	什么是微分方程	(211)
§ 5.1.2	微分方程的解	(211)
	习题 5-1	(213)
§ 5.2	一阶方程	(214)
§ 5.2.1	变量可分离方程与分离变量法	(214)
§ 5.2.2	齐次方程与换元法	(216)
§ 5.2.3	一阶线性方程与常数变易法	(219)
	习题 5-2	(223)
§ 5.3	高阶方程	(225)
§ 5.3.1	可降阶的几类高阶方程	(225)
§ 5.3.2	高阶线性方程的一般理论	(228)
	习题 5-3	(233)
§ 5.4	常系数线性微分方程	(234)

§ 5.4.1 常系数齐线性方程的解法·····	(234)
§ 5.4.2 常系数非齐线性方程的解法·····	(236)
§ 5.4.3 欧拉方程·····	(238)
习题 5 - 4 ·····	(238)
附录·····	(241)
一、简明积分表·····	(241)
二、几种常用的曲线·····	(247)

第一章 函数与极限

§ 1.1 绝对值与区间

§ 1.1.1 绝对值

在中学数学里我们已经知道, 实数的绝对值定义为

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0; \\ -x, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

在数轴上, $|x|$ 表示点到原点的距离.

绝对值有下列性质:

$$(1) \quad |x| = |-x| \geq 0, \text{ 当且仅当 } x=0 \text{ 时才有 } |x|=0.$$

$$(2) \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

$$(3) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

$$(4) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

这些性质是我们所熟知的, 不再证明了, 下面证明一个有用的结论 (因为它经常被套用, 我们称之为模式. 定理、公式、法则自然也是模式. 在本教材中模式用方框框出或黑体字标出).

定 理

$$|x| < h \iff -h < x < h \quad (1)$$

$$|x| \leq h \iff -h \leq x \leq h \quad (2)$$

其中符号 “ $\iff$ ” 表示 “当且仅当”, “等价于”, “充分必要条件为”.

下面只证 (1) 式 (只要再注意到 $|x| = h \iff x = h$ 或 $x = -h$ 即得 (2) 式).

当 $x \geq 0$ 时, $|x| < h \iff 0 \leq x < h \iff x \geq 0$ 且 $-h < x < h$;

当 $x < 0$ 时, $|x| < h \iff 0 < -x < h \iff -h < x < 0 \iff x < 0$ 且 $-h < x < h$.

综上所述, (1) 式成立.

在数轴上, $|x| < h$ 表示点 x 与原点的距离小于 h , 这等价于点 x 必定在点 $-h$ 与 h 之间.

例 求解不等式 $|x-a| < \delta$, 其中 a 为实数, δ 为正数.

解 由 (1) 式知 $|x-a| < \delta \iff -\delta < x-a < \delta$, 所以 $a-\delta < x < a+\delta$.

下面我们讨论数轴上两点间的距离.

平面解析几何告诉我们, 数轴上两点 x 和 y 的距离可以用 $|x-y|$ 来表示, 它有如下性质:

$$(1) \quad |x-y| \geq 0, \text{ 等号当且仅当 } x=y \text{ 时才成立.}$$

$$(2) \quad |x-y| \leq |x| + |y|.$$

性质 (1) 表示除非两点重合, 距离为零, 否则距离恒正. 实际上, 它是绝对值性质 (1)

的变形。性质(2)表示两点间距离不大于它们与原点的距离之和,证明如下。

证:由绝对值性质(2),有

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad -|y| \leq -y \leq |y|$$

相加得

$$-(|x|+|y|) \leq x-y \leq |x|+|y|$$

故得

$$|x-y| \leq |x|+|y|.$$

思考题

1. 证明: $|x| > h \Leftrightarrow x > h$ 或 $x < -h$.

2. 证明: $||x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|$.

3. 讨论: 在什么条件下下列各式成立

$$(1) |x+y| = |x|+|y|.$$

$$(2) |x-y| = |x|-|y|.$$

§1.1.2 区间

在今后的学习中,将常常用到下列实数集合。设 a, b 为实数,且 $a < b$,称数集 $\{x|a < x < b\}$ 为**开区间**,记作 (a, b) ;数集 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 为**闭区间**,记作 $[a, b]$;数集 $\{x|a \leq x < b\}$ 为**左闭区间**,记作 $[a, b)$;数集 $\{x|a < x \leq b\}$ 为**右闭区间**,记作 $(a, b]$ 。在以上各种情况中,数 a, b 叫做区间的端点, $|b-a|$ 称为区间的长度。

在数轴上,区间用两端点间的线段表示,如图1.1.1所示。

上述四种区间的长度都是

有限数,统称为有限区间,我

们还将用到下列无限区间:

$$[a, +\infty) = \{x|x \geq a\};$$

$$(a, +\infty) = \{x|x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x|x \leq b\};$$

$$(-\infty, b) = \{x|x < b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x|x \text{ 为实数}\}.$$

数}.

$[a, +\infty)$ 与 $(-\infty, b)$ 的几何表示如图1.1.1所示。注意: $+\infty$ 与 $-\infty$ 不是数,仅仅是记号,分别读作“正无穷大”与“负无穷大”。显然,无限区间的长度为 $+\infty$ 。

当我们不必辨明区间是否包括端点,是否有限时,我们就简单地称为区间,用 I 表示。

最后,介绍一个常用概念:邻域。

设 a 为实数, δ 为正数,称满足不等式 $|x-a| < \delta$ 的实数 x 的集合为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$ 。注意到 $|x-a| < \delta$ 等价于 $a-\delta < x < a+\delta$, 所以

$$U(a, \delta) = \{x||x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

即 $U(a, \delta)$ 是以 a 为中心,长度为 2δ 的开区间,故称点 a 为邻域的**中心**, δ 为邻域的**半径**。

集合 $\{x|0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $U^\circ(a, \delta)$, 即

$$U^\circ(a, \delta) = \{x|0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

思考题

用区间表示下列集合:

$$(1) \{x||x| \leq 3\}$$

$$(2) \{x||x-2| < 1\}$$

$$(3) \{x||x| \geq 5\}$$

$$(4) \{x||x+1| > 2\}$$

$$(5) \{x||x-a| < \varepsilon\}.$$

习 题 1-1

1. 解下列不等式组:

$$(1) \quad 3 < |x-5| < 4;$$

$$(2) \quad |2x-1| \geq 5;$$

$$(3) \quad |x| < |x+1|;$$

$$(4) \quad |x^2+x-1| > 1;$$

$$(5) \quad \left| \frac{1}{10^x-1} \right| > 1000;$$

$$(6) \quad |ax-x_0| \leq \delta \quad (a>0, \delta>0, x_0 \text{ 为常数});$$

$$(7) \quad |by-y_0| > M \quad (b>0, M>0, y_0 \text{ 为常数});$$

$$(8) \quad \left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}.$$

2. 求下列方程的实根:

$$(1) \quad |x| = -x;$$

$$(2) \quad |2x+3| = x^2;$$

$$(3) \quad |(x+2)+(x-9)| = |x+2| + |x-9|.$$

3. 用区间分别表示邻域 $U(3, 0.01)$, $U(-\pi, \frac{1}{2})$, $U(a, \delta)$ 及 $U^0(3, 0.01)$, U^0

(a, δ) , 并作出它们的图形.

答案

$$1. \quad (1) \quad 8 < x < 9 \text{ 或 } 1 < x < 2; \quad (3) \quad x > -\frac{1}{2}; \quad (5) \quad x < \lg 1001 - 3 \text{ 或}$$

$$x > \lg 999 - 3; \quad (7) \quad y > \frac{1}{b}(y_0 + M) \text{ 或 } y < \frac{1}{b}(y_0 - M).$$

$$2. \quad (1) \quad x \leq 0; \quad (3) \quad x \geq 9 \text{ 或 } x \leq -2.$$

§ 1.2 数列极限

§ 1.2.1 数列

按自然数 1, 2, 3, ... 编号依次排列的一串数

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

称为**无穷数列**, 简称**数列**. 其中的每个数称为数列的**项**, x_n 称为**通项** (在本书中, 除特别声明外, 字母 n 均表示自然数), 当 $n=1, 2, 3, \dots$ 时, x_n 依次表示数列 (1) 的所有项. 因此, 数列 (1) 常简写成 $\{x_n\}$, 或简单地说 “数列 x_n ”. 例如

$$(i) \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}, \quad \dots$$

$$(ii) \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad \dots, \quad n^2, \quad \dots$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}, \quad \dots$$

$$(iv) \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \dots, \quad \frac{2+(-1)^n}{n}, \quad \dots$$

$$(v) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$(vi) \quad \sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \dots, \sqrt{3+\sqrt{3+\dots+\sqrt{3}}}, \dots$$

(n 重根式)

都是数列。

数列对应着数轴上一个点列，也可看成是一个动点在数轴上依次取点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ (如图1.2.1所示)。

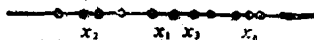


图1.2.1

要认识一个数列，关键在于把握住当序号 n 越来越大时，数列的项 x_n 的变化规律。譬如：

数列 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 的项始终比 0 大。但是，当 n 不断增大时， $\frac{1}{n}$ 越来越小，可以达到要多小

有多小的程度，或者讲，“项 $\frac{1}{n}$ 无限地趋近于 0”。

数列 $\{n^2\}$ 的项越来越大，没有界限（也就是说，可以大于任何预先指定的常数）。

数列 $\left\{ (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \right\}$ 的项符号交替，时正时负。但其绝对值随着 n 的增大可以要多小有多小，从而数列的项仍然是“无限地趋近于 0”。

数列 $\left\{ \frac{2+(-1)^n}{n} \right\}$ 的项时增时减，交替变化，但始终大于 0，从总体上看，随着 n 的增大，数列的项仍可以要多小有多小，即“无限地趋近 0”。

数列 $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ 的项越来越大，但始终比 1 小。容易看出，数列的项“无限地趋近 1”，因为随着 n 的增大，项 $\frac{n}{n+1}$ 与数 1 之相差 $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right|$ （通常称为数 $\frac{n}{n+1}$ 与 1 的距离）可以要多小有多小。

最后，数列 $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots$ 的项都大于 0，且越来越大。至于是否无限趋近某个常数，较难直接地观察出。

综上所述，数列可以分为两类：一类数列的项无限地趋近某个常数；而另一类则不然。前者数列称为有极限，正是我们首先关心的。那么什么叫做“无限趋近”呢？

§1.2.2 数列的极限

为了严格地用数学语言来刻画“无限趋近”，我们先考察数列 $\frac{2+(-1)^n}{n}$ 是如何无限趋近常数 0 的。在数轴上，点 $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ 与原点 o 的距离为

$$|x_n - 0| = \left| \frac{2+(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{2+(-1)^n}{n} < \frac{3}{n},$$

它与序号 n 有关。从总体上看， $|x_n - 0|$ 可以任意地小，只要 n 足够地大，譬如：

给定 $\varepsilon=0.1$ ，则当 $n>30$ 时便恒有 $|x_n - 0| < 0.1$ ；

给定 $\varepsilon=0.001$, 则当 $n>3000$ 时便恒有 $|x_n-0|<0.001$;

给定 $\varepsilon=0.00001$, 则当 $n>300000$ 时便恒有 $|x_n-0|<0.00001$;

由例可知, x_n 向 a 趋近有一个逐渐靠拢的过程, 即开始时可能不近, 后来渐渐地变得近了. 当然, 在变近的过程中也不一定是一往直前地趋近, 也可以有进有退, 出现“反复”, “彷徨”的. 但是, 从总体上看还是渐渐地变近了. 需要注意的是, 从不近变到近, 其间有个“转折点”, 即对每个给定的小正数 ε (它被当作区分近与不近之临时标准), 过程中总有那么一个“时刻”, **在此以前, 可以不近, 从此以后, 必须都近**. 譬如, 当取定 $\varepsilon=0.1$ 时, 30 就是这样一个时刻, 数列从第 31 项起, 恒满足不等式 $|x_n-0|<0.1$; 又当取定 $\varepsilon=0.001$ 时, 3000 就是相应的时刻, 当 $n>3000$ 时, 便恒有 $|x_n-0|<0.001$; ……

一般地讲, 当我们考察一个变化过程 (物理变化, 化学反应, ……) 时, 记初始值为 x_1 , 以后各个时刻的观察值依次记作 $x_n (n=2, 3, \dots)$, 从而得到一个数列 x_n . 而 a 为某个常数. 如果对某一个很小的正数 ε 和某一个自然数 n , 有 $|x_n-a|<\varepsilon$, 是否可以认为在这个变化过程中, 数列 x_n 无限趋近 a 呢? 显然不能. 因为对某一个 n 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 不足以说明整个过程的情况; 那么, 如果对于某一个 ε , 存在时刻 N , 从那以后, 即当 $n>N$ 时都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 是否可以认为 x_n 无限趋近 a 呢? 我们说还是不能, 因为对于某一个 ε 而言, 即使它很小很小, 还不能保证 $|x-a|$ 可以任意地小, 即要多小有多小. 为了确保 $|x_n-a|$ 可以任意小, 必须“对于任何正数 ε (不论它如何小), 总有相应的时刻 N , 使得 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ ”, 这才能说明这个变化过程中数列 x_n 是无限地趋近于 a 了. 由此, 我们给出数列极限的严格定义如下:

定义 设有数列 x_n 与常数 a , 若对任何预先给定的正数 ε , 总存在某个相应的自然数 N , 使得当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则称常数 a 是数列 x_n 当 n 趋于无穷时的极限, 或者讲, 数列 x_n 收敛于 a , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a (n \rightarrow +\infty);$$

如果数列没有极限, 则称数列是发散的.

注意到 n 是正整数, 所以 n 趋于的无穷必定是正无穷, 所以 $n \rightarrow +\infty$ 常简记为 $n \rightarrow \infty$.

为了应用简便, 通常把极限定义中的条件简述为“ $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使 $n > N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ ”. 其中符号“ $\forall$ ”表示“每一个”或“任给的”; 符号“ $\exists$ ”表示“至少有一个”或“存在”. 于是, 数列极限的定义可以写成如下模式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使 } n > N \text{ 时恒有 } |x_n - a| < \varepsilon$$

在应用这个模式时要注意: (1) 当已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, 是指对 $\forall \varepsilon > 0$, 一定存在相应的 N . 故一般地讲, N 依赖于 ε ; (2) 当要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, 是指对 $\forall \varepsilon > 0$, 要找相应的 N . 需要指出, 在定义中 ε 给定后, 相应的 N 并不唯一, 只要找到一个, 则一切比它大的整数都可充当定义中的 N ; (3) 定义中的 ε 可以用 $c\varepsilon$ (其中 c 为正常数) 代替. 这是因为 ε 具有任意性, ε 代表着任何一个正数 (通常取 ε 很小), 而 $c\varepsilon$ 同样可代表任何一个正数, 所以两者有等效的作用.

数列极限的几何意义是: 在数轴上作 a 的 ε 邻域 (注意 ε 可以任意小), 则数列 x_n 的对

应点列, 除有限多个点外 (至多 N 个), 全部落在此邻域的内部, 如图 1.2.2 所示. 特别注意到 ε 可以充分小, 所以可以想象, 收敛数列 x_n 从某项开始以后所有项的对应点是紧紧地凝聚在点 a 近旁.

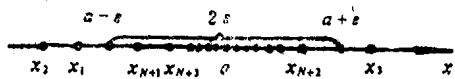


图 1.2.2

数列极限的定义并没有给我们提供直接求极限的方法 (在下面将专门讲如何求极限), 它仅仅提供了一种手段, 来判别某个常数是否是某个数列的极限. 下面举例说明之.

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$, 其中 k 为正常数.

分析: 要证 0 是 $\frac{1}{n^k}$ 的极限, 只要对任给的 $\varepsilon > 0$, 找到相应的 N , 使得 $n > N$ 时恒有

$\left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \varepsilon$. 显然, 应先给定 ε , 再由不等式 $\left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \varepsilon$ 中解出 n . 由此找到所需的 N .

证: 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $\left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n^k} < \varepsilon$, 这等价于 $n^k > \frac{1}{\varepsilon}$, 或 $n > \frac{1}{\varepsilon^{1/k}}$. 所

以, 任取一个自然数 $N > \frac{1}{\varepsilon^{1/k}}$, 则当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

例 2 设 $x_n \equiv c$ (c 为常数), 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

证: 任给 $\varepsilon > 0$, 因为对一切自然数 n 恒有 $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ 成立, 所以结论成立.

例 3 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

分析: 若 $q = 0$, 由例 2 知结论成立. $\therefore$ 只须考虑 $0 < |q| < 1$ 的情况.

证: 任给 $\varepsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$; 若 $0 < |q| < 1$, 取定一个自然数 $N >$

$\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$, 则当 $n > N$ 时, 便有 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$, 从而 $n \lg |q| < \lg \varepsilon$, 即 $|q|^n < \varepsilon$, 从而有 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 恒成立, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

这三个例题中的极限, 在今后的极限运算中将常常用到, 因此要记住它们.

有时我们得采用点技巧才能进行论证. 最常用的技巧是**放大法**, 举例如下:

例 4 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证: $\forall \varepsilon > 0$, 记 $\varepsilon_1 = \sqrt{a} \varepsilon$, $\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\therefore \exists N$ 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$. 从而

有

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

在此证明中, 第一个不等号即是分母缩小而得出的.

思考题

1. 下列几种说法与数列极限定义是否等价, 并说明理由;

- (1) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.
- (2) 存在自然数 N , 对任给的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.
- (3) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在实数 A , 使得当 $n \geq A$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.
- (4) 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < k\varepsilon$, 其中 k 为与 ε 无关的正常数.

2. 用数列极限定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$.

§ 1.2.3 数列极限的性质

1° 有界性

定义 有数列 x_n , 若存在正数 M , 使得对一切自然数 n , 恒有 $|x_n| \leq M$ 成立, 则称数列 x_n 有界. 否则, 称为无界.

在数轴上看, 数列有界表示存在原点 O 的 M_1 邻域 $U(0, M_1)$, 使得数列的一切项的对应点皆在 $U(O, M_1)$ 内.

定理 1 每个收敛的数列必定有界.

证: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 由定义, 取 $\varepsilon = 1$ 时存在 N , 使得 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < 1$, 即有 $a - 1 < x_n < a + 1$. 现在记 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a - 1|, |a + 1|\}$, 则对一切自然数 n , 皆有 $|x_n| \leq M$, 故 $\{x_n\}$ 有界.

注意: 有界性只是数列收敛的必要条件, 而非充分条件. 譬如, 数列 $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$, 即 $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ 有界, 但它是发散的 (证明见 4°). 当然, 定理的逆否命题总是正确的, 即 **无界数列必定发散**.

2° 唯一性

定理 2 每个收敛数列只有一个极限.

证: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. 则由定义, $\forall \varepsilon > 0$, 分别 $\exists$ 自然数 N_1 与 N_2 , 使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$. 现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

注意到 ε 可以任意小, 所以上式仅当 $a = b$ 时才能成立, 故收敛数列的极限是唯一的.

在上述证明过程中, 先分别找到 N_1 与 N_2 , 再取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 使得 $n > N$ 时有 $n > N_1$ 与 $n > N_2$ 同时成立. 这也是极限论证中常用的一种技巧.

定理 2 也可用反证法证明, 只要适当选取 ε 即可, 我们把它留作思考题.

3° 不等式性质

定理 3 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $c < a < b$, 则存在某个自然数 N , 使得 $n > N$ 时恒有 $c < x_n < b$.

证: 取 $\varepsilon = \min\{a - c, b - a\}$, 从而有 $c \leq a - \varepsilon < a + \varepsilon \leq b$, $\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\therefore$ 对上述 ε , 存在 N , 使得 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, 故有 $c < x_n < b$.

推论 1 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ (或 < 0) 则存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时恒有 $x_n > 0$ (或 < 0).

推论 1 称为极限的**保号性**, 它表明: 当收敛数列的极限非零时, 则至多有有限多项例外, 数列的各项与极限同号! 推论 1 的证明只须在定理 3 中记 $c = 0$ (或 $b = 0$) 即可.

推论 2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 $a < b$, 则存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时恒有 $x_n < y_n$.

推论 2 的证明留作练习.

推论 3 若当 $n > N_0$ (N_0 为某个自然数) 时, 恒有 $x_n > y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则有 $a \geq b$.

证: 用反证法. 假设 $a < b$, 由推论 2 得 $x_n < y_n$ ($n > N$), 与题设矛盾, $\therefore a \geq b$.

在此要注意, 尽管 $x_n > y_n$ 是严格的不等式, 仍有可能得到 $a = b$. 譬如 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$ 即为如此. 当然不等式 $x_n > y_n$ 换成 $x_n \geq y_n$, 结论仍成立.

4° 收敛数列的子列收敛性

定义 若在数列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 中保持原来的先后顺序任意选取无穷多项 (如 $x_1, x_4, x_5, x_9, \dots, x_{100}, \dots$), 这样得到的数列称为原数列 x_n 的**子列**.

为了与原数列相区别, 记子列第一项为 x_{n_1} , 第二项为 x_{n_2} , $\dots$, 第 k 项为 x_{n_k} , 从而数列 $\{x_n\}$ 的子列可表示为 $\{x_{n_k}\}$, 即 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$. 要注意的是, x_{n_k} 是子列的第 k 项 (通项), 而是原数列的第 n_k 项. 一般地有 $k \leq n_k$, 而且 $n_k < n_h$ 当且仅当 $k < h$.

因为子列 $\{x_{n_k}\}$ 中序号是 k , 于是 n_k , 所以 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a 意味着: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 自然数 H , 使得当 $k > H$ 时, 恒有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$.

定理 4 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\{x_n\}$ 的任何子列都收敛, 且极限皆为 a .

证: $\forall \varepsilon > 0$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\therefore \exists N$ 使得 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 设 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的任一子列, 取 $H = N$, 则当 $k > H$ 时恒有 $n_k > n_H = n_N \geq N$, 从而有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

定理 4 将有助于判别数列发散, 利用定理 4 的逆否命题, 若数列 x_n 有一个子列发散, 或两个子列收敛于不同的极限, 则数列 x_n 发散, 例如数列 $x_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$, 其偶数项组成子列 $x_{2k} \equiv 1$, 极限为 1; 奇数项组成子列 $x_{2k-1} \equiv 0$, 极限为 0. 因此, 数列 x_n 发散.

思考题

1. 试用反证法证明定理 2.
2. 证明推论 2.
3. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 证明存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $x_n > \frac{a}{2}$.

§ 1.2.4 数列极限的运算法则

定理 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$;
- (3) $b \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

我们只证明法则 (2), 而把法则 (1) 的证明留作练习, 把法则 (3) 的证明留在 § 1.4.5 中