上册

高等数学

许品芳　欧景昭　编著

兵器工业出版社

高 等 数 学

(上 册)

许品芳 欧景昭 编著

兵 器 工 业 出 版 社

(京)新登字049号

内容介绍

本书是以国家教委批准的《高等数学课程教学基本要求》为依据，用认知心理学理论为指导编写的。

本书分上下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分、中值定理与导数应用、常微分方程，并附有积分表与常用曲线；下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分、向量函数积分、级数，并附有若干曲面所围立体图形。

本书结构紧凑，系统新颖，说理详尽，深入浅出，例题丰富，习题题型完备，便于自学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员自学用书或参考书。

高 等 数 学

（上册）

许品芳　欧景昭　编著

兵器工业出版社出版
（北京市海淀区车道沟10号）
新华书店总店科技发行所发行
各地新华书店经销
兵器工业出版社五三一印刷厂印装

开本：787×1092　1/16　印张：16.125　字数：394.68千字
1992年7月第1版　　1992年7月第1次印刷
印数：1～9000　　定价：8.20元
ISBN　7-80038-425-X/O·22

前　言

1987年，我们以国家教委正式颁布的《高等数学教学基本要求》为依据，结合华东工学院的特点，用模式思维理论为指导编写了一本《高等数学讲义》。经88、89、90三届使用，效果较好。在此基础上，我们充分征求华工应用数学系教师的使用意见，进行删简、修改，特别是重选了全部习题，形成本书。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限、连续、导数与微分、不定积分与定积分、中值定理与导数应用、常微分方程；下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分、向量函数积分与场论三度、级数。

本教材有如下特点：

1. 以模式思维理论为指导　它认为学好一门课归根结蒂是掌握一定数量的模式。所谓模式是指：在什么条件下应采取什么相应行动，从而会得到什么相应结果或应该做什么相应的事。正是模式思维指导着人们去思考、去行动，去把握各个具体事物。

数学模式的基础是数学中的概念。数学模式包括典型习题、解题方法与数学思想三个层次。帮助工科一年级大学生正确理解数学概念，建立数学思维模式是本教材的任务。

2. 讲授系统新颖　本教材打破了以数学内容为系统的习惯，而以学生建立模式的需要进行编排。为了突出极限思想，将数列极限与函数极限分开成节；为了强化极限运算，先介绍连续函数，后介绍极限运算技巧；将中值定理放在定积分之后，增强了学生对变上限积分表示的函数之了解，同时在研究函数时可应用积分思想，从而突出了知识的横向联系与综合性；将微分方程放在上册是为了配合一年级下学期的物理课学习；鉴于向量函数在工程技术中的重要性，突出重积分与第一类线面积分的共性，我们把第二类线面积分与场论初步独立成章。

3. 例题丰富，习题充分，题型较全　要建立数学概念，形成数学模式，掌握数学技巧，首先要借鉴他人经验，其次是本人的反复练习。因此，丰富的例题、充分的习题、题型完备是必不可少的。而有一定数量的、难度较大的习题是为学有余力的学生准备的。

本教材的正文部分由许品芳副教授改编，并请国家级有杰出贡献的中青年专家施容华教授审定；习题部分由欧景昭副教授重选、验算。

由于模式思维理论在国内尚属新事物，我们领会不深，加上系统变化较大，编者水平有限，因此，本教材可能有许多不足或考虑不周，甚至差错之处，欢迎批评指教，我们不胜感谢。

许品芳　欧景昭

1991年7月于华东工学院

目　录

第一章　函数与极限

§1.1　绝对值与区间

§1.1.1　绝对值

在中学数学里我们已经知道，实数的绝对值定义为

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & 当x\geqslant 0；\\ -x, & 当x<0. \end{cases}$$

在数轴上，$|x|$表示点到原点的距离。

绝对值有下列性质：

（1）　$|x|=|-x|\geqslant 0$，当且仅当$x=0$时才有$|x|=0$。

（2）　$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$。

（3）　$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$。

（4）　$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$　　$(y\neq 0)$。

这些性质是我们所熟知的,不再证明了,下面证明一个有用的结论（因为它经常被套用，我们称之为模式。定理、公式、法则自然也是模式。在本教材中模式用方框框出或黑体字标出）。

定　理

$$\boxed{|x|<h\iff -h<x<h} \qquad (1)$$

$$\boxed{|x|\leqslant h\iff -h\leqslant x\leqslant h} \qquad (2)$$

其中符号“$\iff$”表示“当且仅当”，“等价于”，“充分必要条件为”。

下面只证（1）式（只要再注意到$|x|=h\iff x=h$ 或 $x=-h$ 即得（2）式）。

当 $x\geqslant 0$ 时，$|x|<h\iff 0\leqslant x<h\iff x\geqslant 0$ 且$-h<x<h$；

当 $x<0$ 时，$|x|<h\iff 0<-x<h\iff -h<x<0\iff x<0$ 且$-h<x<h$。

综上可知，（1）式成立。

在数轴上，$|x|<h$ 表示点 x 与原点的距离小于 h，这等价于点 x 必定在点 $-h$ 与 h 之间。

例　求解不等式$|x-a|<\delta$，其中 a 为实数，δ 为正数。

解　由（1）式知$|x-a|<\delta\iff -\delta<x-a<\delta$，所以 $a-\delta<x<a+\delta$。

下面我们讨论数轴上两点间的距离。

平面解析几何告诉我们，数轴上两点 x 和 y 的距离可以用$|x-y|$来表示，它有如下性质：

（1）　$|x-y|\geqslant 0$，等号当且仅当 $x=y$ 时才成立。

（2）　$|x-y|\leqslant|x|+|y|$。

性质（1）表示除非两点重合，距离为零，否则距离恒正。实际上，它是绝对值性质（1）

的变形。性质（2）表示两点间距离不大于它们与原点的距离之和，证明如下。

证：由绝对值性质（2），有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x| \qquad -|y|\leqslant -y\leqslant|y|$$

相加得
$$-(|x|+|y|)\leqslant x-y\leqslant|x|+|y|$$

故得
$$|x-y|\leqslant|x|+|y|.$$

思考题

1. 证明：$|x|>h \Longleftrightarrow x>h$ 或 $x<-h$.
2. 证明：$||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.
3. 讨论：在什么条件下下列各式成立

（1）$|x+y|=|x|+|y|$.　　（2）$|x-y|=|x|-|y|$.

§1.1.2 区间

在今后的学习中，将常常用到下列实数集合。设 a，b 为实数，且 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a, b)；数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为**闭区间**，记作 $[a, b]$；数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 为**左闭区间**，记作 $[a, b)$；数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 为**右闭区间**，记作 $(a, b]$。在以上各种情况中，数 a，b 叫做区间的端点，$|b-a|$ 称为区间的长度。

在数轴上，区间用两端点间的线段表示，如图1.1.1所示。

上述四种区间的长度都是有限数，统称为有限区间，我们还将用到下列无限区间：

$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$;

$(a, +\infty)=\{x|x<a\}$

$(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\}$;

$(-\infty, b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty, +\infty)=\{x|x$ 为实数$\}$.

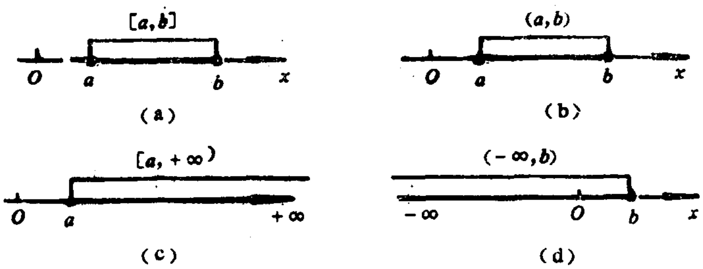

图1.1.1

$[a, +\infty)$ 与 $(-\infty, b)$ 的几何表示如图1.1.1所示。注意：$+\infty$ 与 $-\infty$ 不是数，仅仅是记号，分别读作“正无穷大”与“负无穷大”．显然，无限区间的长度为 $+\infty$。

当我们不必辨明区间是否包括端点，是否有限时，我们就简单地称为区间，用 I 表示。

最后，介绍一个常用概念：邻域。

设 a 为实数，δ 为正数，称满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a, \delta)$。注意到 $|x-a|<\delta$ 等价于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a, \delta)=\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta, a+\delta).$$

即 $U(a, \delta)$ 是以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，故称点 a 为邻域的**中心**，δ 为邻域的**半径**。

集合 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $U^{\circ}(a, \delta)$，即

$$U^{\circ}(a, \delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta).$$

思考题

用区间表示下列集合：

（1）$\{x||x|\leqslant 3\}$　（2）$\{x||x-2|<1\}$　（3）$\{x||x|\geqslant 5\}$

（4）$\{x||x+1|>2\}$　（5）$\{x||x-a|<\varepsilon\}$.

习　题 1-1

1. 解下列不等式组:

（1） $3<|x-5|<4$；　　（2） $|2x-1|\geqslant 5$；

（3） $|x|<|x+1|$；　　（4） $|x^2+x-1|>1$；

（5） $\left|\dfrac{1}{10^x-1}\right|>1000$；

（6） $|ax-x_0|\leqslant\delta$　（$a>0$，$\delta>0$，x_0 为常数）；

（7） $|by-y_0|>M$　（$b>0$，$M>0$，y_0为常数）；

（8） $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$.

2. 求下列方程的实根:

（1） $|x|=-x$；　　（2） $|2x+3|=x^2$；

（3） $|(x+2)+(x-9)|=|x+2|+|x-9|$.

3. 用区间分别表示邻域$U(3,\ 0.01)$，$U(-\pi,\ \frac{1}{2})$，$U(a,\ \delta)$及$U^0(3,\ 0.01)$，$U^0(a,\ \delta)$，并作出它们的图形。

答案

1. （1）$8<x<9$或$1<x<2$；　（3） $x>-\frac{1}{2}$；　（5） $x<\lg 1001-3$或$x>\lg 999-3$；　（7） $y>\frac{1}{b}(y_0+M)$或$y<\frac{1}{b}(y_0-M)$.

2. （1）$x\leqslant 0$；　（3）$x\geqslant 9$或$x\leqslant -2$.

§1.2　数列极限

§1.2.1　数列

按自然数1，2，3，…编号依次排列的一串数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \tag{1}$$

称为**无穷数列**，简称**数列**. 其中的每个数称为数列的**项**，x_n称为**通项**（在本书中，除特别声明外，字母n均表示自然数），当$n=1,2,3,\cdots$时，x_n依次表示数列（1）的所有项. 因此，数列（1）常简写成$\{x_n\}$，或简单地说“数列x_n”. 例如

（i）　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots.$

（ii）　$1,\ 4,\ 9,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots.$

（iii）　$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n},\ \cdots.$

（iv）　$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{2+(-1)^n}{n},\ \cdots.$

（v） $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$.

（vi） $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \cdots, \sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}, \cdots$.

（n重根式）

都是数列。

数列对应着数轴上一个点列，也可看成是一个动点在数轴上依次取点 x_1，x_2，x_3，$\cdots x_n$，$\cdots$（如图1.2.1所示）。

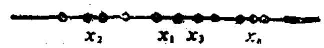

图1.2.1

要认识一个数列，关键在于把握住当序号 n 越来越大时，数列的项 x_n 的变化规律。譬如：

数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的项始终比 0 大。但是，当 n 不断增大时，$\frac{1}{n}$越来越小，可以达到**要多小有多小**的程度，或者讲，"项$\frac{1}{n}$无限地趋近于 0"。

数列$\{n^2\}$的项越来越大，没有界限（也就是说，可以大于任何预先指定的常数）。

数列$\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\right\}$的项符号交替，时正时负。但其绝对值随着 n 的增大可以要多小有多小，从而数列的项仍然是"无限地趋近于 0"。

数列$\left\{\frac{2+(-1)^n}{n}\right\}$的项时增时减，交替变化，但始终大于 0，从总体上看，随着 n 的增大，数列的项仍可以要多小有多小，即"无限地趋近 0"。

数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的项越来越大，但始终比 1 小。容易看出，数列的项"无限地趋近 1"，因为随着 n 的增大，项$\frac{n}{n+1}$与数 1 之相差$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|$（通常称为数$\frac{n}{n+1}$与 1 的距离）可以要多小有多小。

最后，数列$\sqrt{3}$，$\sqrt{3+\sqrt{3}}$，$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$，$\cdots$的项都大于 0，且越来越大。至于是否无限趋近某个常数，较难直接地观察出。

综上可知，数列可以分为两类：一类数列的项无限地趋近某个常数；而另一类则不然。前者数列称为有极限，正是我们首先关心的。那么什么叫做"无限趋近"呢？

§1.2.2 数列的极限

为了严格地用数学语言来刻划"无限趋近"，我们先考察数列$\frac{2+(-1)^n}{n}$是如何无限趋近常数 0 的。在数轴上，点 $x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$与原点 o 的距离为

$$|x_n-a|=\left|\frac{2+(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{2+(-1)^n}{n}<\frac{3}{n},$$

它与序号 n 有关。从总体上看，$|x_n-0|$可以任意地小，只要 n 足够地大，譬如：

给定 $\varepsilon=0.1$，则当 $n>30$时便恒有$|x_n-0|<0.1$；

给定 $\varepsilon=0.001$，则当 $n>3000$ 时便恒有 $|x_n-0|<0.001$；

给定 $\varepsilon=0.00001$，则当 $n>300000$ 时便恒有 $|x_n-0|<0.00001$；

……………………………………………………………………………………

由例可知，x_n 向 a 趋近有一个逐渐靠拢的过程，即开始时可能不近，后来渐渐地变得近了。当然，在变近的过程中也不一定是一往直前地趋近，也可以有进有退，出现"反复"，"彷徨"的。但是，从总体上看还是渐渐地变近了。需要注意的是，从不近变到近，其间有个"转折点"，即对每个给定的小正数 ε（它被当作区分近与不近之临时标准），过程中总有那么一个"时刻"，**在此以前，可以不近，从此以后，必须都近。**譬如，当取定 $\varepsilon=0.1$ 时，30就是这样一个时刻，数列从第 31 项起，恒满足不等式 $|x_n-0|<0.1$；又当取定 $\varepsilon=0.001$ 时，3000就是相应的时刻，当 $n>3000$ 时，便恒有 $|x_n-0|<0.001$；……

一般地讲，当我们考察一个变化过程（物理变化，化学反应，……）时，记初始值为 x_1，以后各个时刻的观察值依次记作 x_n（$n=2, 3, \cdots$），从而得到一个数列 x_n。而 a 为某个常数。如果对**某一个**很小的正数 ε 和某一个自然数 n，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，是否可以认为在这个变化过程中，数列 x_n 无限趋近 a 呢？显然不能。因为对某一个 n 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，不足以说明整个过程的情况；那么，如果对于**某一个** ε，存在时刻N，从那以后，即当$n>N$ 时都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，是否可以认为 x_n 无限趋近 a 呢？我们说还是不能，因为对于**某一个** ε 而言，即使它很小很小，还不能保证 $|x-a|$ 可以**任意地小，即要多小有多小。**为了确保 $|x_n-a|$ 可以任意小，必须"对于**任何正数** ε（不论它如何小），总有相应的时刻N，使得 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$"，这才能说明这个变化过程中数列 x_n 是无限地趋近于 a 了。由此，我们给出数列极限的严格定义如下：

定义 设有数列 x_n 与常数 a，若对任何预先给定的正数 ε，总存在某个相应的自然数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称常数 a 是数列 x_n 当 n 趋于无穷时的极限，或者讲，数列 x_n **收敛**于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad \text{或} \quad x_n\to a\ (n\to+\infty);$$

如果数列没有极限，则称数列是**发散**的。

注意到 n 是正整数，所以 n 趋于的无穷必定是正无穷，所以 $n\to+\infty$ 常简记为 $n\to\infty$。

为了应用简便，通常把极限定义中的条件简述为"$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$"。其中符号"$\forall$"表示"每一个"或"任给的"；符号"$\exists$"表示"至少有一个"或"存在"。于是，数列极限的定义可以写成如下模式

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n=a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \text{使 } n>N \text{ 时恒有 } |x_n-a|<\varepsilon}$$

在应用这个模式时要注意：（1）当已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 时，是指对 $\forall\varepsilon>0$，一定存在相应的 N。故一般地讲，N 依赖于 ε；（2）当要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 时，是指对 $\forall\varepsilon>0$，要找相应的 N。需要指出，在定义中 ε 给定后，相应的 N 并不唯一，只要找到一个，则一切比它大的整数都可充当定义中的N；（3）定义中的 ε 可以用 $c\varepsilon$（其中 c 为**正常数**）代替。这是因为 ε 具有任意性，ε 代表着任何一个正数（通常取 ε 很小），而 $c\varepsilon$ 同样可代表任何一个正数，所以两者有等效的作用。

数列极限的几何意义是：在数轴上作 a 的 ε 邻域（注意 ε 可以任意小），则数列 x_n 的对

应点列，除有限多个点外（至多N个），全部落在此邻域的内部，如图1.2.2所示。特别注意到ε可以充分小，所以可以想象，收敛数列x_n从某项开始以后所有项的对应点是紧紧地凝聚在点a近旁。

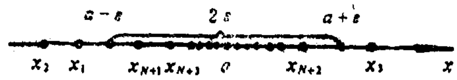

图1.2.2

数列极限的定义并没有给我们提供直接求极限的方法（在下面将专门讲如何求极限），它仅仅提供了一种手段，来判别某个常数是否是某个数列的极限。下面举例说明之。

例1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$，其中$k$为正常数。

分析：要证0是$\dfrac{1}{n^k}$的极限，只要对任给的$\varepsilon>0$，找到相应的N，使得$n>N$时恒有$\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$。显然，应先给定$\varepsilon$，再由不等式$\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$中解出$n$。由此找到所需的$N$。

证：任给$\varepsilon>0$，要$\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n^k}<\varepsilon$，这等价于$n^k>\dfrac{1}{\varepsilon}$，或$n>\dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}$。所以，任取一个自然数$N>\dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}$，则当$n>N$时，恒有$\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$。

例2 设$x_n\equiv c$（c为常数），求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$。

证：任给$\varepsilon>0$，因为对一切自然数n恒有$|x_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$成立，所以结论成立。

例3 证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中$|q|<1$。

分析：若$q=0$，由例2知结论成立。∴只须考虑$0<|q|<1$的情况。

证：任给$\varepsilon>0$，若$q=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$；若$0<|q|<1$，取定一个自然数$N>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$，则当$n>N$时，便有$n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$，从而$n\lg|q|<\lg\varepsilon$，即$|q|^n<\varepsilon$，从而有$|q^n-0|<\varepsilon$恒成立，故$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

这三个例题中的极限，在今后的极限运算中将常常用到，因此要记住它们。

有时我们得采用点技巧才能进行论证。最常用的技巧是**放大法**，举例如下：

例4 设$x_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

证：$\forall\varepsilon>0$，记$\varepsilon_1=\sqrt{a}\,\varepsilon$，$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\therefore\exists N$使得当$n>N$时恒有$|x_n-a|<\varepsilon_1$。从而有

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}<\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}}=\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

在此证明中，第一个不等号即是将分母缩小而得出的。

思考题

1．下列几种说法与数列极限定义是否等价，并说明理由；

（1） 对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当 $n\geqslant N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

（2） 存在自然数N，对任给的 $\varepsilon>0$，使得当 $n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

（3） 对任给的 $\varepsilon>0$，存在实数 A，使得当 $n\geqslant A$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

（4） 对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n>N_\varepsilon^2$时，恒有$|x_n-a|<k\varepsilon$，其中 k 为与 ε 无关的正常数。

2. 用数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$.

§1.2.3 数列极限的性质

1° 有界性

定义 有数列 x_n，若存在正数M，使得对一切自然数 n，恒有$|x_n|\leqslant M$成立，则称数列 x_n **有界**。否则，称为**无界**。

在数轴上看，数列有界表示存在原点O的M_1邻域$U(0, M_1)$，使得数列的一切项的对应点皆在$U(O, M_1)$内。

定理1 每个收敛的数列必定有界.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由定义，取 $\varepsilon=1$ 时存在N，使得 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<1$，即有 $a-1<x_n<a+1$. 现在记 $M=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots|x_N|, |a-1|, |a+1|\}$，则对一切自然数 n，皆有$|x_n|\leqslant M$，故$\{x_n\}$有界。

注意：有界性只是数列收敛的必要条件，而非充分条件。譬如，数列$x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，即0，1，0，1，0，1，…有界，但它是发散的（证明见4°）。当然，定理的逆否命题总是正确的，即**无界数列必定发散**。

2° 唯一性

定理2 每个收敛数列只有一个极限.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$. 则由定义，$\forall\varepsilon>0$，分别$\exists$自然数$N_1$与$N_2$，使得当$n>N_1$时恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，当 $n>N_2$时恒有$|x_n-b|<\varepsilon$. 现取$N=\max\{N_1, N_2\}$，则当$n>N$时就有

$$|a-b|=|(x_n-b)-(x_n-a)|\leqslant|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

注意到 ε 可以任意小，所以上式仅当 $a=b$ 时才能成立，故收敛数列的极限是唯一的。

在上述证明过程中，先分别找到 N_1与N_2，再取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，使得 $n>N$时有 $n>N_1$与 $n>N_2$同时成立。这也是极限论证中常用的一种技巧。

定理2也可用反证法证明，只要适当选取ε即可，我们把它留作思考题。

3° 不等式性质

定理3 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $c<a<b$，则存在某个自然数N，使得 $n>N$时恒有 $c<x_n<b$.

证：取 $\varepsilon=\min\{a-c, b-a\}$，从而有 $c\leqslant a-\varepsilon<a+\varepsilon\leqslant b$，$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\therefore$对上述 ε，存在N，使得 $n>N$时恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，故有 $c<x_n<b$.

推论1 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$（或$<0$）则存在自然数$N$，使得当 $n>N$时恒有 $x_n>0$（或<0）.

推论1称为极限的**保号性**，它表明：当收敛数列的极限非零时，则至多有有限多项例外，数列的各项与极限同号！推论1的证明只须在定理3中记 $c=0$（或 $b=0$）即可。

推论 2 **若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$，则存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时恒有 $x_n<y_n$.**

推论 2 的证明留作练习.

推论 3 **若当 $n>N_0$（N_0 为某个自然数）时，恒有 $x_n>y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则有 $a\geqslant b$.**

证：用反证法。假设 $a<b$，由推论 2 得 $x_n<y_n(n>N)$，与题设矛盾，$\therefore a\geqslant b$.

在此要注意，尽管 $x_n>y_n$ 是严格的不等式，仍有可能得到 $a=b$。譬如 $x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=-\frac{1}{n}$ 即为如此。当然不等式 $x_n>y_n$ 换成 $x_n\geqslant y_n$，结论仍成立。

4° 收敛数列的子列收敛性

定义 若在数列 x_1，x_2，x_3，…，x_n，… 中保持原来的先后顺序任意选取无穷多项（如 x_1，x_4，x_5，x_9，…，x_{100}，…，），这样得到的数列称为原数列 x_n 的**子列**.

为了与原数列相区别，记子列第一项为 x_{n_1}，第二项为 x_{n_2}，…，第 k 项为 x_{n_k}，从而数列 $\{x_n\}$ 的子列可表示为 $\{x_{n_k}\}$，即 x_{n_1}，x_{n_2}，x_{n_3}，…，x_{n_k}，…. 要注意的是，x_{n_k} 是子列的第 k 项（通项），而是原数列的第 n_k 项。一般地有 $k\leqslant n_k$，而且 $n_k<n_h$ 当且仅当 $k<h$.

因为子列 $\{x_{n_k}\}$ 中序号是 k，于是 n_k，所以 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a 意味着：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 H，使得当 $k>H$ 时，恒有 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$.

定理 4 **若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\{x_n\}$ 的任何子列都收敛，且极限皆为 a.**

证：$\forall\varepsilon>0$，$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\therefore\exists N$ 使得 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 设 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的任一子列，取 $H=N$，则当 $k>H$ 时恒有 $n_k>n_H=n_N\geqslant N$，从而有 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

定理 4 将有助于判别数列发散，利用定理 4 的逆否命题，若数列 x_n 有一个子列发散，或两个子列收敛于不同的极限，则数列 x_n 发散，例如数列 $x_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$，其偶数项组成子列 $x_{2k}\equiv1$，极限为 1；奇数项组成子列 $x_{2k-1}\equiv0$，极限为 0. 因此，数列 x_n 发散.

思考题

1. 试用反证法证明定理 2.
2. 证明推论 2.
3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，证明存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $x_n>\frac{a}{2}$.

§1.2.4 数列极限的运算法则

定理 **若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则**

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=a\cdot b$；

（3）$b\neq0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$.

我们只证明法则（2），而把法则（1）的证明留作练习，把法则（3）的证明留在 §1.4.5 中