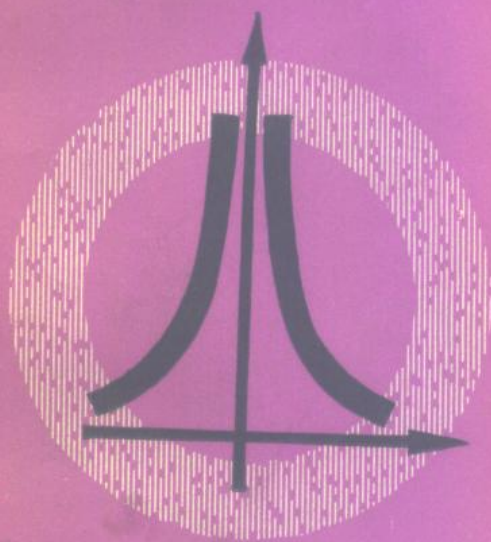


高等学校教学参考书

高等数学学习指导 (下)

上海铁道学院 夏肇源 编



中国铁道出版社

高等学校教学参考书

高等数学学习指导 (下)

上海铁道学院 夏肇源 编
朱学炎 审

中国铁道出版社

1990年·北京

内 容 提 要

本书是为高等工科院校专修科学生编写的一本学习《高等数学》参考书，它可与西南交通大学孙乃豪老师主编的《高等数学》配套使用，亦可单独使用。

全书分上、下两册，本书为下册，是根据专修科教材《高等数学》（下）编写的，主要介绍无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、矩阵与线性方程组等学习时所需要掌握的基本概念、定义、定理、基本公式等基础知识及解题时的一般规律。为了帮助学生学习，书中选编了一定数量的例题和习题。

编写时除考虑专修科学生的特殊情况外，还考虑本科生和自学者的学习需要。

高等学校教学参考书

高等数学学习指导（下）

上海铁道学院 夏肇源 编

中国铁道出版社出版

（北京市东单三条14号）

责任编辑 李云国 封面设计 刘景山

中国铁道出版社发行 各地新华书店经销

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092mm $\frac{1}{32}$ 印张：7.28 字数：176 千

1991年1月 第1版 第1次印刷

印数：1—3000册

ISBN7-113-00899-2/O·32 定价：1.55元

目 录

第六章 无穷级数	163
一、内容提要	163
二、例题分析	172
三、习题六	193
第七章 向量代数与空间解析几何	197
一、内容提要	197
二、例题分析	212
三、习题七	223
第八章 多元函数微分学	232
一、内容提要	232
二、例题分析	243
三、习题八	260
第九章 多元函数积分学	264
一、内容提要	264
二、例题分析	284
三、习题九	315
第十章 矩阵与线性方程组	323
一、内容提要	323
二、例题分析	345
三、习题十	385
习题答案	392

第六章 无 穷 级 数

一、内 容 提 要

无穷级数是高等数学的重要组成部分，它是非初等函数的一类有用的表示法，无论在理论研究方面还是在应用方面，无穷级数都有重大的意义。

(一) 级数的概念

1. 级数的定义

设给定一个数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

称为无穷级数，简称级数。其中 u_n 称为级数①的一般项。

级数①的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

称为级数①的第 n 部分和。

2. 级数敛散性的定义

如果级数①的部分和数列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

的极限存在，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则称级数①收敛，称极限值 S 为级数①的和，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在，则称级数①发散。

讨论级数的敛散性是级数中的重要课题。因此,读者首先必须清楚地掌握级数敛散性的定义。

3. 级数的性质

(1) 若级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都收敛,则级数 $\sum(u_n \pm v_n)$ 也收敛,且 $\sum(u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n$ 。

(2) 若级数 $\sum u_n$ 收敛,则级数 $\sum k u_n$ ($k \neq 0$)也收敛,且 $\sum k u_n = k \sum u_n$ 。

(3) 对级数 $\sum u_n$ 增添或去掉有限项,不改变其敛散性。

(4) 若级数 $\sum u_n$ 收敛, $\sum v_n$ 发散,则级数 $\sum(u_n + v_n)$ 发散。

(5) 若级数 $\sum u_n$ 收敛,则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

4. 几个常用级数的敛散性

(1) 等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \begin{cases} \text{当 } |r| < 1 \text{ 时, 收敛;} \\ \text{当 } |r| \geq 1 \text{ 时, 发散。} \end{cases}$$

(2) 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ 发散。}$$

(3) p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{当 } p > 1 \text{ 时, 收敛;} \\ \text{当 } 0 < p < 1 \text{ 时, 发散;} \end{cases}$$

当 $p = 1$ 时,为调和级数。

(二) 数项级数敛散性的判别法

1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (其中 $u_n \geq 0$, $n=1, 2, \dots$) 敛散性

的判别法

(1) 比较判别法: 设 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 是两个正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ ($n = 1, 2, \dots$),

① 如果 $\sum v_n$ 收敛, 那么 $\sum u_n$ 也收敛;

② 如果 $\sum u_n$ 发散, 那么 $\sum v_n$ 也发散。

(2) 比值判别法: 设 $\sum u_n$ 是正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

则当 $l < 1$ 时, $\sum u_n$ 收敛; 当 $l > 1$ 时, $\sum u_n$ 发散; 当 $l = 1$ 时, $\sum u_n$ 可能收敛也可能发散, 也就是比值判别法失效。

2. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ (其中 $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$)

… 收敛的判别法

莱布尼茨定理 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$,

$n = 1, 2, \dots$) 满足条件

(1) $u_{n+1} < u_n$ ($n = 1, 2, \dots$),

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$ 。

3. 绝对收敛与条件收敛

如果每项取绝对值后的级数 $\sum |u_n|$ 收敛, 则级数 $\sum u_n$ 也收敛。这时, 称 $\sum u_n$ 为绝对收敛; 如果绝对值级数 $\sum |u_n|$ 发散, 而级数 $\sum u_n$ 收敛, 则称 $\sum u_n$ 为条件收敛。

绝对收敛的级数具有一些良好的性质, 这里只介绍其中的一个重要性质: 绝对收敛的级数的各项可以任意重排而不改变它的绝对收敛性, 也不改变其和。

(三) 幂级数

1. 幂级数的概念

(1) 定义 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数。其中 a_n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) 为常数。

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

(2) 定理 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ ($\neq 0$) 收敛,

则它在区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛。

推论 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 发散, 则它在区间

$|x| > |x_0|$ 内发散。

(3) 收敛半径、收敛区间与收敛域

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛点与发散点的分界点与原点之间

的距离 R 称为该幂级数的收敛半径。区间 $(-R, R)$ 称为该幂级数的收敛区间。

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛点的全体称为该幂级数的收敛

域。

2. 求收敛半径 R 的方法

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n \neq 0$)，如果极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 存在 (或为 ∞)，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|。$$

3. 幂级数的运算性质

设两个幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \quad x \in (-R, R)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x), \quad x \in (-R', R')$$

则

(1) 在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 的较小的区间内，有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \\ &= f(x) \pm g(x)。 \end{aligned}$$

(2) 在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 的较小的区间内，有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ &\quad + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots \\ &= f(x) \cdot g(x)。 \end{aligned}$$

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $f(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的。

(4) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $f(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是可导的, 且在 $(-R, R)$ 内有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

(5) 对于收敛区间 $(-R, R)$ 内的任何 x , 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, x]$ 上可积, 且

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n x^n dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

4. 函数 $f(x)$ 展开为幂级数

(1) 函数 $f(x)$ 的泰勒级数展开式与麦克劳林级数展开式

如果函数 $f(x)$ 在含 x_0 的区间 (a, b) 内可无限次求导, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间), 则有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots.$$

此式称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数展开式, 而等号右端的幂级数称为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的泰勒级数。

当 $x_0=0$ 时, 函数 $f(x)$ 的泰勒级数展开式为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

此式也称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数展开式, 而等号右端的幂级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数。

(2) 几个常用函数的麦克劳林级数展开式

$$\textcircled{1} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\textcircled{2} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\textcircled{3} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \\ x &\in (-1, 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad (1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \\ x &\in (-1, 1). \end{aligned}$$

其中 α 为任意实数。

(四) 傅立叶级数

1. 定义

设 $f(x)$ 是以 $T=2l$ 为周期的周期函数, 则函数项级数(三角级数)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

称为函数 $f(x)$ 的傅立叶级数。其中,

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \end{aligned} \right\} (n=1, 2, \cdots).$$

有下列两种特殊情况:

(1) 设 $f(x)$ 是以 $T=2l$ 为周期的奇函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为正弦级数;

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 $T=2l$ 为周期的偶函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为余弦级数:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

其中:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

2. 收敛定理

定理 设 $f(x)$ 是以 $T=2l$ 为周期的周期函数, 在 $[-l, l]$ 上逐段单调, 且只有有限个第一类间断点, 则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛, 且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 傅立叶级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

其中 $f(x-0)$ 与 $f(x+0)$ 分别是 $f(x)$ 在点 x 的左与右极限。

3. 函数 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式

(1) 以 $T=2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

$$x \in D.$$

其中:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$(n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$(n=1, 2, \dots),$$

D 由收敛定理所确定。

(2) 定义在区间 $[0, l]$ 上的非周期函数 $f(x)$ 利用奇延拓法得正弦级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in D.$$

其中: $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$ ($n=1, 2, \dots$)。利用偶延拓法得余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in D.$$

其中: $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$), D 由收敛定理所确定。

二、例题分析

【例1】利用级数收敛的定义或级数的性质,判定下列级数的敛散性:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots,$$

$$(2) \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \cdots + \ln \frac{n}{n+1} + \cdots,$$

$$(3) \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{2}{3^2} - \frac{3^2}{4^2} \right) + \left(\frac{2}{3^3} - \frac{3^3}{4^3} \right) + \cdots,$$

$$(4) \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

【解】(1) 级数的一般项为

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

因此, 级数的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

根据级数收敛的定义, 所以, 原级数收敛。

这里, 在求级数部分和时, 将每一项都拆成两项之差, 然后利用相加过程中正负项相抵消, 从而求出 S_n 来。这种方法具有普遍意义。

$$\begin{aligned}
 (2) \because S_n &= \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \cdots + \ln \frac{n}{n+1} \\
 &= \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} \right) = \ln \frac{1}{n+1},
 \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n+1} = -\infty$, 所以, 原级数发散。

(3) 级数

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

与

$$\frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{3^3}{4^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$$

都是公比 $r < 1$ 的等比级数, 所以都是收敛的。而原级数

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{2}{3^2} - \frac{3^2}{4^2} \right) + \left(\frac{2}{3^3} - \frac{3^3}{4^3} \right) + \cdots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{3^n}{4^n} \right),
 \end{aligned}$$

根据级数的性质 (1), 原级数也收敛。

(4) 原级数是收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 的前面增添

了有限的 100 项 $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ 所构成的, 根据级数的性质 (3),

不改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 的收敛性, 所以, 原级数是收敛的。

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ 是由发散的调和级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与收敛的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 逐项相加所得的, 根据

级数的性质 (4), 该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ 是发散的。

利用级数敛散性的定义和级数的性质判定级数的敛散性, 都是最基本的方法。但是, 尤其按定义来判定, 在求 S_n 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 时, 往往不很方便, 甚至是困难的。

【例2】判定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{7^n - 5^n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n^2},$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2},$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n}, \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

【解】(1) 正项级数敛散性的判别法我们只介绍比较与比值两种判别法, 对这个正项级数来说, 比值法看来用不上去, 所以考虑用比较法。因为

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{6^n}{7^n - 5^n} = \frac{6^n}{7^n \left(1 - \frac{5^n}{7^n} \right)} \leq \frac{6^n}{7^n \left(1 - \frac{5}{7} \right)} \\ &= \frac{6^n}{7^n \left(\frac{2}{7} \right)} = \frac{7}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n \text{ 是收敛的等} \end{aligned}$$

比级数 ($\because r = \frac{6}{7} < 1$), 比较判别法事实上告诉我们,

“大”的收敛, “小”的也收敛; “小”的发散, “大”的