同济大学数学辅导系列丛书

工程数学

解题方法与同步训练

GONGCHENG SHUXUE JIETI FANGFA YU TONGBUXUNLIAN

（下册）

同济大学基础数学教研室　编

同 济 大 学 出 版 社

同济大学数学辅导系列丛书

工程数学解题方法与同步训练

(下册)

同济大学基础数学教研室 编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学解题方法与同步训练．下册/同济大学基础数学教研室编．—上海：同济大学出版社，2000.1

(同济大学数学辅导系列丛书)

ISBN 7-5608-1927-3

Ⅰ．工… Ⅱ．同… Ⅲ．工程数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 61172 号

工程数学解题方法与同步训练(下册)

同济大学基础数学教研室　编

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号　邮编：200092)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：12　字数：340 千字

2000 年 1 月第 1 版　2000 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—8000　　定价：17.00 元

ISBN7-5608-1927-3/O·165

前　言

工程数学解题方法与同步训练分上、下两册，是同济大学数学辅导系列丛书之一，下册内容包括工程数学中的概率统计和数学物理方程两部分．工程数学是高等院校数学基础课程，其中概率统计是硕士研究生入学考试数学试卷必考科目．为了适应广大读者学习和复习的需要，我们编写了这本书．

本书是根据原国家教委审定的高等工业学校"概率统计课程教学基本要求"和"数学物理方程课程教学基本要求"并分别按照同济大学数学教研室编的《概率统计》和《数学物理方程》(同济大学出版社出版)两教材的章节顺序编写．对超出基本要求的内容加了"＊"号，这些内容对某些专业还是很基本和很重要的．

本书编写体例与本系列其他丛书一致．每章由基本要求与主要内容及基本题型与同步练习两部分组成．本书旨在帮助、指导广大读者把握基本概念和掌握基本解题方法，在此基础上融会贯通；同时本书的篇幅和内容须与相应课程的学时数相适应，因此，例题和练习题都是精心选编的，题型基本而典型，广泛而不重复，与两教材紧密衔接，是课堂教学的补充和提高，但又不超出基本要求．同步练习均附有解答，供读者自查．本书强调基本概念和基本解题方法，强调与两教材的配合，内容的编排、章节的次序、定义定理的叙述、符号术语的使用均与两教材一致．编者相信，读者认真阅读本书，会有不小裨益．

本书可供大专院校、电大、职大、夜大等广大学生学习概率统计和数学物理方程时阅读和参考(特别是使用两教材的)，对参加硕士研究生数学入学考试的学生也是一本很有帮助的复习参考书．

全书由徐建平同志策划；概率统计部分由蒋凤瑛、钱伟民同志

编写并由蒋凤瑛同志总撰定稿;数学物理方程部分由陆林生、徐建平、黄临文同志编写并由徐建平同志总撰定稿.他们集多年的教学实践的经验编写了这本书.本书的编写和出版得到了同济大学应用数学系诸多教师和同济大学出版社李炳钊副编审的关心和支持,编者在此表示衷心的感谢.由于编者水平,书中错误之处在所难免,恳切希望同行和广大读者批评指正.

编　者

1999年8月于上海

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

前言

概率统计

第一章　随机事件与概率……………………………………（3）
一、基本要求与主要内容 ……………………………………（3）
二、基本题型与同步练习 ……………………………………（8）
第二章　一维随机变量及其分布 ……………………………（33）
一、基本要求与主要内容……………………………………（33）
二、基本题型与同步练习……………………………………（38）
第三章　多维随机变量及其分布 ……………………………（67）
一、基本要求与主要内容……………………………………（67）
二、基本题型与同步练习……………………………………（73）
第四章　随机变量的数字特征………………………………（117）
一、基本要求与主要内容 …………………………………（117）
二、基本题型与同步练习 …………………………………（121）
第五章　大数定律及中心极限定理…………………………（144）
一、基本要求与主要内容 …………………………………（144）
二、基本题型与同步练习 …………………………………（146）
第六章　数理统计的基本概念………………………………（154）
一、基本要求与主要内容 …………………………………（154）
二、基本题型与同步练习 …………………………………（159）
第七章　参数估计……………………………………………（172）
一、基本要求与主要内容 …………………………………（172）
二、基本题型与同步练习 …………………………………（177）

第八章　假设检验……………………………………（201）
一、基本要求与主要内容 ………………………………（201）
二、基本题型与同步练习 ………………………………（206）
概率统计期终模拟考试(一)…………………………（227）
概率统计期终模拟考试(二)…………………………（233）

数学物理方程

第一章　求解数理方程定解问题的预备知识……………（243）
一、基本要求与主要内容 ………………………………（243）
二、基本题型与同步练习 ………………………………（253）
第二章　波动方程及其定解问题…………………………（276）
一、基本要求与主要内容 ………………………………（276）
二、基本题型与同步练习 ………………………………（278）
第三章　热传导方程及其定解问题………………………（303）
一、基本要求与主要内容 ………………………………（303）
二、基本题型与同步练习 ………………………………（305）
第四章　位势方程及其边值问题…………………………（337）
一、基本要求与主要内容 ………………………………（337）
二、基本题型与同步练习 ………………………………（342）
数学物理方程期终模拟考试(一)………………………（364）
数学物理方程期终模拟考试(二)………………………（371）

概率统计

第一章　随机事件与概率

一、基本要求与主要内容

(一) 基本要求

1. 理解随机事件的概念，了解随机试验、样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.

2. 了解概率的各种定义，掌握概率的基本性质并能运用这些性质进行概率计算.

3. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式，并能运用这些公式进行概率计算.

4. 理解事件的独立性概念，掌握运用事件独立性进行概率计算.

5. 掌握贝努里概型及其计算，能够将实际问题归结为贝努里概型，然后用二项概率计算有关事件的概率.

本章重点：随机事件的概率计算.

(二) 主要内容

1. 随机试验与样本空间

具有下列三个特性的试验称为随机试验：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但事先知道每次试验所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

试验的所有可能结果所组成的集合为样本空间，用 Ω 表示，

其中的每一个结果用 e 表示，e 称为样本空间中的样本点，记作 $\Omega=\{e\}$.

2. 随机事件

在随机试验中，把一次试验中可能发生也可能不发生、而在大量重复试验中却呈现某种规律性的事情称为随机事件(简称事件). 通常把必然事件(记作 Ω)与不可能事件(记作 ϕ)看作特殊的随机事件.

3. 事件的关系及运算

(1) **包含**：若事件 A 发生，一定导致事件 B 发生，那么，称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2) **相等**：若两事件 A 与 B 相互包含，即 $A\supset B$，且 $B\supset A$，那么，称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(3) **和事件**："事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"这一事件称为 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$；"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(4) **积事件**："事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件称为 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$(简记为 AB)；"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(5) **互不相容**：若事件 A 和 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，那么称事件 A 与 B 互不相容(或互斥)，若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不能同时发生，即 $A_iA_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$，那么，称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

(6) **对立事件**：若事件 A 和 B 互不相容、且它们中必有一事件发生，即 $AB=\phi$ 且 $A\cup B=\Omega$，那么，称 A 与 B 是对立的. 事件 A 的对立事件(或逆事件)记作 $\bar{A}$.

(7) **差事件**：若事件 A 发生且事件 B 不发生，那么，称这个事

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

件为事件 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$（或 $A\bar{B}$）.

(8) **交换律**：对任意两个事件 A 和 B 有

$$A\cup B=B\cup A, AB=BA.$$

(9) **结合律**：对任意事件 A,B,C 有

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(10) **分配律**：对任意事件 A,B,C 有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

(11) **德摩根（De Morgan）法则**：对任意事件 A 和 B 有

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

4. 频率与概率的定义

(1) 频率的定义

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次，则比值 n_A/n 称为随机事件 A 的频率，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

(2) 概率的统计定义

在进行大量重复试验中，随机事件 A 的频率具有稳定性，即当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 常在一个稳定的值 $p(0<p<1)$ 附近摆动，规定事件 A 发生的频率的稳定值 p 为概率，即 $P(A)=p$.

(3) 古典概率的定义

具有下列两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型：

（ⅰ）试验的样本空间 Ω 是个有限集，不妨记作 $\Omega=\{e_1,\cdots,e_n\}$；

（ⅱ）在每次试验中，每个 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性相同，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

在古典概型中，我们规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}=\frac{n_A}{n}.$$

(4) 几何概率的定义

如果随机试验的样本空间是一个区域(可以是直线上的区间、平面或空间中的区域)，且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度(或面积、体积)}}{\text{样本空间的长度(或面积、体积)}}.$$

(5) 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω，随机事件 A 是 Ω 的子集，$P(A)$ 是实值函数，若满足下列三条公理：

公理 1(非负性) 对于任一随机事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

公理 2(规范性) 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

公理 3(可加性) 对于互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

5. 概率的性质

由概率的三条公理可导出下面概率的一些重要性质：

(1) $P(\phi)=0$.

(2) (有限可加性)设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 对于任意一个事件 A：

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

(4) 若事件 A,B 满足 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(A)\leqslant P(B).$$

(5) 对于任意一个事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

(6)（加法公式）对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对于任意 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

6. 条件概率与乘法公式

设 A 与 B 是两个事件. 在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$. 当 $P(B)>0$，规定

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在同一条件下，条件概率具有概率的一切性质.

乘法公式：对于任意两个事件 A 与 B，当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

7. 随机事件的相互独立性

如果事件 A 与 B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

那么，称事件 A 与 B 相互独立.

关于事件 A,B 的独立性有下列两条性质：

(1) 如果 $P(B)>0$，那么，事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$；如果 $P(A)>0$，那么，事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

这条性质的直观意义是“事件 A 与 B 发生与否互不影响”.

(2) 下列四个命题是等价的：

(ⅰ) 事件 A 与 B 相互独立；

(ⅱ) 事件 A 与 $\bar{B}$ 相互独立；

(ⅲ) 事件 $\bar{A}$ 与 B 相互独立；

(ⅳ) 事件 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

对于任意 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，相互独立性定义如下：若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 满足

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}),$$

其中，$k=2,\cdots,n$，$i_1,\cdots,i_k$ 是 $1,\cdots,n$ 中任意 k 个不同的数，则称事件 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立. 这里实际上包含了 2^n-n-1 个等式.

8. 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式：如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

贝叶斯公式：如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则当 $P(B)>0$ 时：

$$P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}, k=1,2,\cdots,n.$$

9. 贝努里概型与二项概率

设在每次试验中，随机事件 A 发生的概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 次重复独立试验中，事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n,$$

称这组概率为二项概率.

二、基本题型与同步练习

(一) 古典概型、几何概型及概率的性质

例 1 总经理的五位秘书中有两位精通英语，今偶遇其中的三位秘书，求下列事件的概率：

(1) 事件 A:“其中恰有一位精通英语”;

(2) 事件 B:“其中恰有两位精通英语”;

(3) 事件 C:“其中有人精通英语”.

解 (1) 在五位秘书中任取三位的可能取法数为

$$n = C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{3!} = 10.$$

三个人中恰有一位精通英语是指其中有一位精通英语且另两位不精通英语,因此所有可能的取法数为

$$n_A = C_2^1\cdot C_3^2 = 2\times3 = 6.$$

由古典概率得

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{10};$$

(2) 三个人中恰有两位精通英语是指两位精通英语且另一位不精通英语,所有可能的取法数为

$$n_B = C_2^2\cdot C_3^1 = 1\times3 = 3.$$

由古典概率得

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{3}{10};$$

(3) 三个人中有人精通英语不外乎“恰有一人精通英语”和“恰有两人精通英语”这两种情形,因此有 $C = A\cup B$,且事件 A,B 不相容,所以

$$\begin{aligned}P(C) = P(A\cup B) &= P(A)+P(B)\\ &= \frac{6}{10}+\frac{3}{10} = \frac{9}{10}.\end{aligned}$$

例 2 一个口袋里装有 10 只球,分别编上号码 1,…,10,随机地从这个口袋里取三只球,试求:

(1) 最小号码是 5 的概率;

(2) 最大号码是 5 的概率.

解 随机选取三个球共有 $C_{10}^3 = \frac{10\times9\times8}{3!} = 120$ 种选法,即样本点总数 n 为 120.

(1) 记事件 A 为“最小号码为 5”,则其余两号码必大于 5,它

们选自 6 号 ~ 10 号中的五个球，共有 $C_5^2=\frac{5\times4}{2!}=10$ 种选法，即 A 包含的样本点数 $n_A=10$，故

$$P(A)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12};$$

(2) 记事件 B 为"最大号码是 5"，则其余两个号码必小于 5，它们选自于 1 ~ 4 号球，共有 $C_4^2=\frac{4\times3}{2!}=6$ 种选法，即 $n_B=6$，故

$$P(B)=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}.$$

例 3 已知 N 件产品中有 M 件是不合格品，今从中随机地抽取 n 件，试求：

(1) n 件中恰有 k 件不合格的概率；

(2) n 件中至少有一件不合格的概率.

这里 $k\leqslant M$，且 $n-k\leqslant N-M$.

解 (1) 从 N 件产品中随机抽取 n 件，共有 C_N^n 种抽法，记 A 为"n 件中恰有 k 件不合格品"的事件，则 A 包含的样本点数为 $C_{N-M}^{n-k}\cdot C_M^k$，因此

$$P(A)=\frac{C_{N-M}^{n-k}\cdot C_M^k}{C_N^n};$$

(2) 样本点总数仍为 C_N^n，记 B 为"n 件产品全为合格品"的事件，则 $\bar{B}$ 为"n 件产品中至少有一件不合格品"的事件，故所求的概率为

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}.$$

例 4 设有 n 个球，每个球都等可能地被放入到 N 个格子中的任一格子中去($n\leqslant N$)，求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 个格子，其中各有一个球放入；

(2) 恰好有 n 个格子，其中各有一个球放入.

解 (1) 记 A 为"指定的 n 个格子中各有一个球放入"，若不

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com