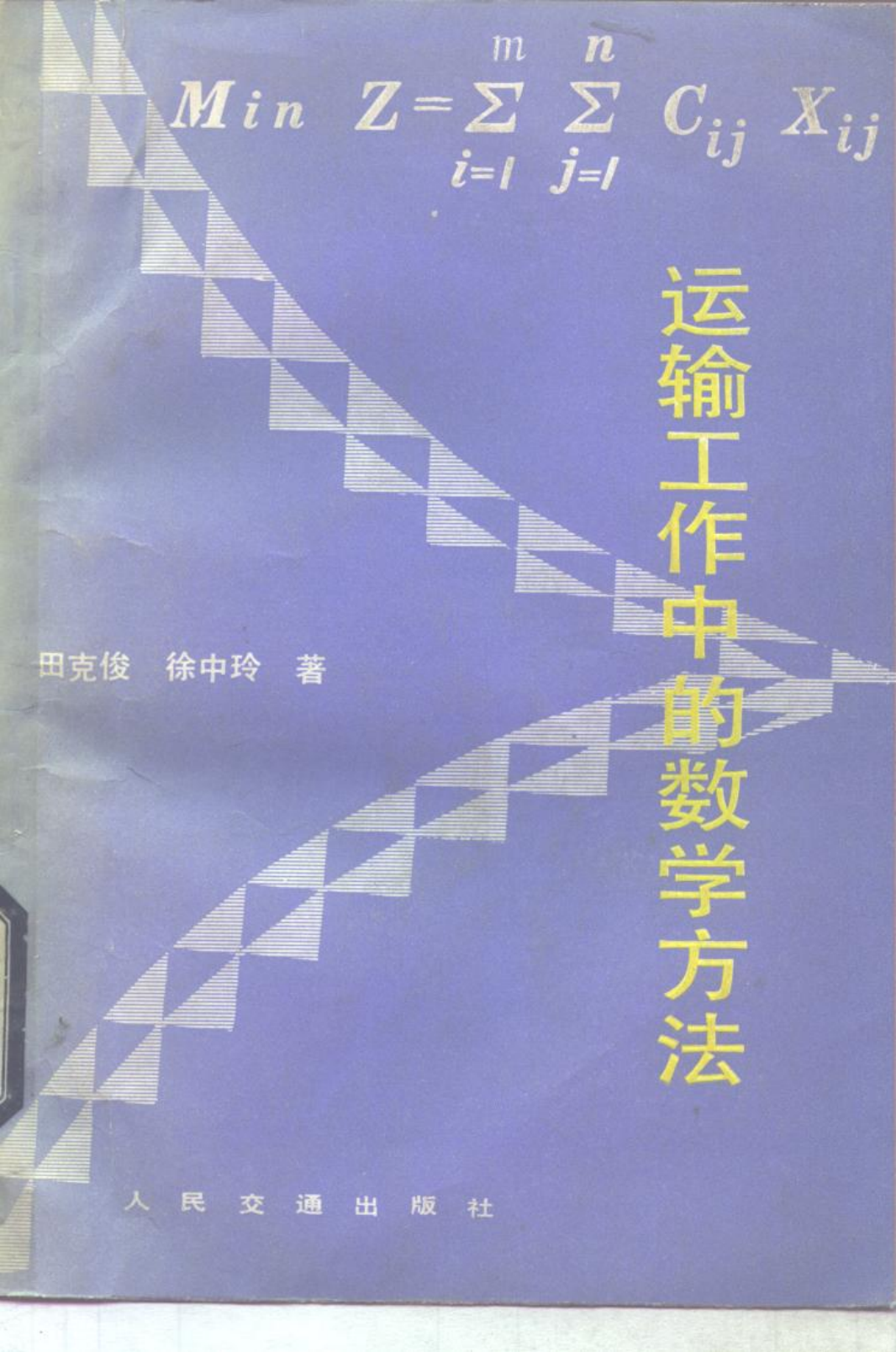



$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

运输工作中的数学方法

田克俊 徐中玲 著

人民交通出版社

Junshu Gongzuo Zhong De Shuxue Fangfa

运输工作中的数学方法

田克俊 徐中玲 著

人民交通出版社

运输工作中的数学方法

田克俊 徐中玲 著

责任编辑 王丽梅

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：6.375 字数：133千

1985年6月 第1版

1985年6月 第1版 第1次印刷

印数：0001—6,900册 定价：1.20元

内 容 提 要

本书以数学理论为依据,以提高经济效益为目的,详细介绍了运输工作中的先进方法及步骤,并列解某些运输及车辆调配等实际问题,给出相应的电子计算机程序。内容通俗易懂,实用性强。

本书供从事运输工作的同志使用,亦可供大、专院校师生参考。

序 言

在中国工业部门大量普及使用数学方法，可以追溯到1958年。运输问题的数学方法是首先普及的方法之一。这一方法属于线性规划的范畴。这个问题可以叙述为：

有一种物资，例如小麦，需要调运。有 m 个产地， n 个销地。假定产量总和与销量总和相等。每一产地至每一销地的运价也是已知的。问怎样确定产销关系可以使运费最小？

这—问题是四十年代末及五十年代初，由 Hitchcock 与 Kantorowitch 分别提出，有代数迭代法，即表上作业法（Dantzig 单纯形方法）加以解决。我国粮食部门的工作人员，从多年的工作经验出发，亦独立地解决了这个问题，并给出了一个求得最优分配方案的方法——图上作业法。1958年，我国数学家曾在运输部门中广泛普及这两个方法。特别在北京、山东等地形成了群众运动。但由于计算方法较繁及运输中有不少复杂因素需考虑。例如虽然是同一产品，但品种各异。又如汽车运输，必需考虑各路段的运输流量，不能仅仅考虑路程等等。所以不久之后，这一普及工作，还只能局限于较小范围。

当时，我国著名数学家华罗庚教授和他的学生越民义、万哲先与王元等都曾参与这项普及工作。参与工作的其他数学家还有许国志、桂湘云、朱永津与管梅谷等。万哲先与王元撰写了小册子《物资调运工作中的数学方法》（科学出版社，1959年）。越民义、万哲先、王元与朱永津等还编写过

《线性规划的理论及应用》（高等教育出版社，1959年），叙述了上面说的两个方法。

以后这项普及工作，在小范围内更踏实地进行着。中国科学院应用数学研究所的田克俊与徐中玲同志，长期深入地在北京市汽车运输部门蹲点，普及使用这些方法及其他更新的数学方法，取得了大量经验与成果。他们将各种有用的方法及他们的经验写成书，是十分可喜的。本书的内容比上述两本书有了很大扩充，而且写得更通俗易懂，便于从事实际工作的同志学会使用，特别附有计算机的使用程序。这些方法的数学证明较繁难，在本书中略去，以免分散精力，或将精力用于数学的逻辑推演，从而能更集中着眼于实际应用，这是非常重要的。对这方面有兴趣的读者，还可以参看其他有关书籍与文献。

我深信本书的出版，对于在我国运输部门中更好地普及数学方法是很有好处的。

王 元

目 录

前言	1
第一章 图上作业法	3
§1 运输问题的图上作业法	3
一、道路不成圈的情况	3
二、道路成圈的情况	8
(一)道路仅有一个圈的情况	10
(二)道路有多个圈且有分枝的情况	14
§2 图上作业法的标准圈问题	19
一、求初始方案的破圈法	20
二、标准圈问题	22
§3 最短路问题	27
第二章 表上作业法	38
§1 运输问题的数学模型	38
§2 表上作业法	43
一、求初始调运方案的方法	43
(一)最小费用法	43
(二)最小差数法	53
二、求最优调运方案的方法	67
(一)闭回路法	67
(二)位势法	82
§3 供需量不平衡的运输问题	88
§4 转运问题	92

§5 运输问题的近似解法	96
第三章 标号法和改进的分配法	106
§1 标号法	106
§2 标号法的计算机程序	125
§3 改进的分配法	133
第四章 多种物资的运输问题	140
§1 用图上作业法进行多种物资运输的 汽车调度工作	140
§2 用电子计算机进行多种物资运输的 汽车调度工作	153
§3 实例	188
参考文献	195

前 言

在运输工作中，如果能注意运用数学方法来帮助解决各种问题，那末就会使运输部门大大地提高经济效益，节省能源并增加收入。当要将某种货物从某些发货地点运往某些收货地点时，总是希望总的运输费用最节省，或尽量减少运输过程中的空驶现象。在一般情况下，每个发货地点的物资供应量是已知的，每个收货地点的物资需要量也是已知的。例如，一些产品或原材料可能需要从工厂或仓库运到某些地点。我们希望得到一些解决这类问题的数学方法，使得我们按照这些方法去执行运输任务时，所付出的代价最小，即希望运输费用最少或行驶里程利用率最高。这就是我们研究运输问题的主要目的。

目前在世界上有很多国家和地区，都采用了各种各样的数学方法来指导运输工作，不少地方和部门还利用电子计算机来进行运输管理工作，因而较大地提高了运输能力，节约了大量资金，取得了十分明显的经济效果。我国交通运输部门在五十年代和六十年代初，也曾采用过某些数学方法来进行物资调运，并取得过很好的效果，但后来没有能继续坚持应用和发展。

运输工作直接关系到整个国家的各项生产和工作，是国家现代化不可缺少的一个重要环节。为了给运输部门的同志们提供一点方便，我们在工作和实践的过程中，编写了这本《运输工作中的数学方法》，以作为大家工作中的工具和参

考。在本书的一些章节后面，我们编附了可供实用的BASIC语言算法程序，供使用电子计算机的读者参考，所有程序均在ALPHA微处理机上实算通过。

特别要指出的是，我们的整个工作，都是在我们的老师华罗庚教授和他的助手王元教授的关怀、指导和鼓励下进行的。华罗庚教授特别提醒我们：“运输问题的关键就是要消灭对流和迂回，运输问题的一切理论和实践都是围绕着这一点发展和进行的”。这个深刻而精辟的论断，一直是我们考虑运输问题的座右铭。王元教授自始至终指导我们编写此书，并提出了不少很好的意见，他还热心地为本书写了序言。

在我们编写本书的过程中，中国科学院越民义教授、韩继业副研究员、徐伟宣和李之傑同志曾给我们不少有益的指教。我们还得到北京市交通局有关部门的大力支持。对此一并表示我们深切的谢意！

由于水平所限，此书中必定会有不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。谢谢！

编 者

1984年11月 北京

第一章 图上作业法

§1 运输问题的图上作业法

运输问题的图上作业法，是一种行之有效的方法。这种方法对于物资的合理调运、提高运输过程中的里程利用率、减少空驶、增加运量、充分利用现有运输设备等，是一个有效的工具。这种方法使用图解的形式，直观易懂，计算简单，效果显著。因而应用相当广泛。

为了方便起见，我们在前三章中仅仅假设被调运的是一种货物。下面分两种情况来说明这种方法。

一、道路不成圈的情况

这是最简单的情况，“道路不成圈”是指所有发货点和收货点之间的一切道路都不构成任何圈，即运输路线的交通图中没有回路，是“树”状的。此时要将某种货物由各发货地点运往各个收货地点，只要能做到“消灭对流”便能得到最好的调运方案。由于这种方案使货物运行的总吨公里数达到最小，是最节省运费的调运方案，因而称为最优调运方案。

在这种情况下，我们根据“先端点，供需归邻站”的原则来进行图上作业，就能达到消灭对流的目的，从而得到一个最优调运方案。这里所指的对流是指同种货物在同一条道路上相对流动的现象，而端点则指树状运输路线中处于各顶端位置的收货点或发货点。

在道路不成圈的情况下，运输问题图上作业法的步骤如下：

步骤1：列一个供需平衡表，在表上填入全部发货点和收货点，以及各发货点的供应量，各收货点的需要量。

步骤2：画一张包括全部发货点及收货点的实际交通示意图，并在图上标出各点的供应量或需要量，以及每两点之间的距离。

步骤3：按“先端点，供需归邻站”的原则，首先尽量满足各端点的供或需。

步骤4：将未满足供需的部分看作一个新的交通图，再进行步骤3，直至全部达到供需平衡。

步骤5：将交通图上已达供需平衡的最终结果填入供需平衡表中，便得最优调运方案。

我们通过以下的例子来说明上述方法的应用。

例1 假设有一批某种货物，要由3个发货点(S_1, S_2, S_3)运往4个收货点(D_1, D_2, D_3, D_4)。3个发货点的供应量分别是40吨，60吨，100吨。4个收货点的需要量分别是20吨，50吨，80吨，50吨。各点之间的距离在交通图上。如何制订一个调运方案，使得完成调运任务的总吨公里数最小。

步骤1：首先列出供需平衡表（表1-1）：

表1-1

发点 \ 收点	D_1	D_2	D_3	D_4	供应量
S_1					40
S_2					60
S_3					100
需要量	20	50	80	50	200

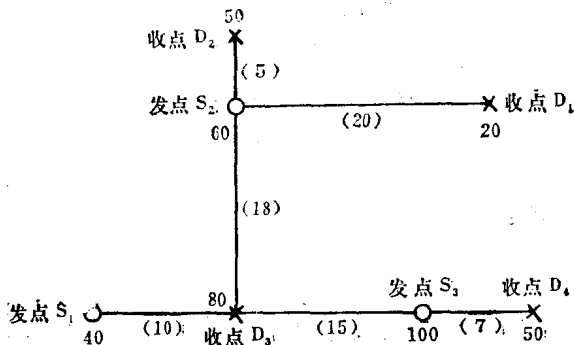


图 1-1

步骤2: 然后画出实际交通示意图, 在图上用圆圈“○”表示发货点, 用叉“×”表示收货点, 并在各点旁边写上供应量或需要量。在相邻两点之间的交通线下方或右旁写上它们的距离, 并用圆括弧括上。其结果如图 1-1 所示。

步骤3: 按照“先端点, 供需归邻站”的原则, 从交通图上的各端点开始制作调运方案。由图中看出, 有 4 个端点, 即发点 S_1 , 收点 D_1 , 收点 D_2 , 收点 D_4 。首先要尽量满足这 4 个端点的供需量, 其调运过程如下:

发点 S_1 的 40 吨货调给它的邻站 (最邻近它的点) 收点 D_3 。收点 D_3 的需要量是 80 吨, 在收到 40 吨货后, 还有 40 吨的需要量。

收点 D_1 需要 20 吨货, 由它的邻站发点 S_2 调去。发点 S_2 的供应量是 60 吨, 调走 20 吨后, 还剩 40 吨。

收点 D_2 需要 50 吨货, 由它的邻站发点 S_2 调去, 但发点 S_2 只剩 40 吨, 全部调给 D_2 后仍差 10 吨。因此收点 D_2 还有 10 吨的需要量。

收点 D_4 需要 50 吨货, 全部由它的邻站发点 S_3 调给, 因

此发点 S_3 还剩下50吨的供应量。

以上全部考虑了所有端点的供需量，除收点 D_2 没有被满足之外，其余端点的供需量都满足了。图 1-2 表示上面的结果。图中箭头流向表示物资调运方向，将其画在路线前进方向的右侧，并在箭杆旁写上调运的货物数量，这样的图称为流向图。

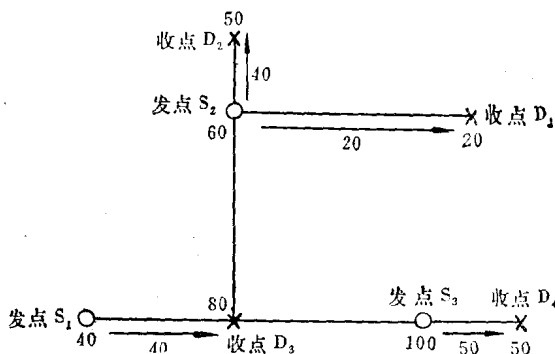


图 1-2

步骤4: 把其余未满足供需的点所组成的交通图，看作一个新的交通图。在这个图上再用“先端点，供需归邻站”的原则，继续进行步骤3的工作，直到所有的点全部满足供需平衡。就此例而言，剩下的工作为：

发点 S_3 余下的50吨货全部调给收点 D_3 ，它只需要40吨，余下的10吨货运往发点 S_2 再调给收点 D_2 。至此全部供需达到平衡，图上作业到此结束。最后的结果如图1-3所示。

在图1-2和图1-3中，我们没有把每两点之间的距离写上，这是为了清楚和简单的缘故。在最后计算吨公里时，仍用图1-1中的公里数作为根据。

步骤5: 将图1-3中已达供需平衡的最终结果填入供需平

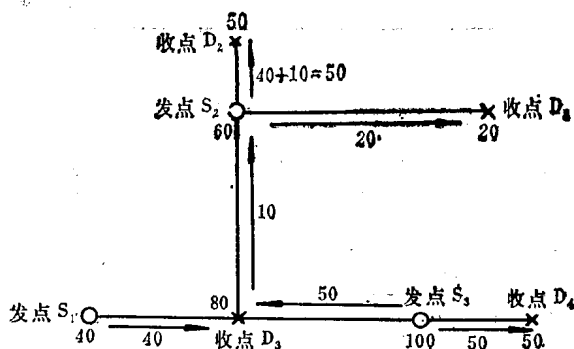


图 1-3

表1-2

收点 发点	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	供应量
S ₁			40		40
S ₂	20	40			60
S ₃		10	40	50	100
需要量	20	50	80	50	200

衡表 1-2 中。

这便是我们得到的最优调运方案。因为图上没有对流，在道路不成圈的情况下，这就是最好的调运方案了。这个方案的总吨公里数为：

$$40 \times 10 + 20 \times 20 + 40 \times 5 + 10 \times (15 + 18 + 5) + 40 \times 15 + 50 \times 7 = 2330$$

根据流向图（图1-3），我们也可换一种方式将结果填入供需平衡表中，得到表1-3。在这个表中的调运方案和表1-2中的方案不一样，但由于仍符合流向图中的流向，因此

表1-3

发点 \ 收点	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	供应量
S ₁			40		40
S ₂	10	50			60
S ₃	10		40	50	100
需要量	20	50	80	50	200

也是一个最优调运方案。

这个方案的总吨公里数为：

$$40 \times 10 + 10 \times 20 + 50 \times 5 + 10 \times (15 + 18 + 20) + 40 \times 15 + 50 \times 7 = 2330$$

其结果与表 1-2 的方案所得结果相同。

根据流向图（图1-3），我们还可以再换一种方式填表，其新的调运方案将仍然有同样的总吨公里数2330。这说明对于没有对流的流向图，在道路不成圈的情况下，可以有不同的调运方案，其结果总的吨公里数都相同，也说明这些方案都是最优的。

因此，在道路不成圈的情况下，我们只要在图上作业时做到了消灭重车对流，就能得到最优的调运方案。消灭对流的方法，就是根据“先端点，供需归邻站”的原则进行调运。

二、道路成圈的情况

这种情况是指在发货点 S_i ($i=1, 2, \dots, m$) 和收货点 D_j ($j=1, 2, \dots, n$) 之间的各路线中，有些路线构成了“圈”（回路），即运输路线的交通图中出现了环状路线。此时要将某种货物由各发货点运往各收货点，就要根

据“消灭对流和迂回”的原则进行图上作业。当我们最后得到的货物流向图达到了没有对流、没有迂回的要求时，就能得到最优调运方案。

此处所指的迂回，是当某发货点到某收货点有两条以上的路可走时，若选择了较远的那条路线运货，即为迂回。因此一般情况下都选最短的路线。为了便于记忆，我们将“消灭对流和迂回”的原则写成下面这样一句话：

流向画右旁，对流不应当；

里圈和外圈，不过半圈长。

只要按照这句话来进行物资调运，就一定能获得最优调运方案，即有下面的定理作为理论基础。

定理：最优调运方案的充分必要条件是它的流向图里没有对流，且图中每个圈路程的内圈流向之长和外圈流向之长均不超过其半圈之长。

此定理中所指“内圈流向之长”是指整个内圈流向之和的总长。外圈流向之长亦如此。定理的证明部分，可阅读参考文献〔1〕。

根据此定理，在道路成圈的情况下，运输问题图上作业法的步骤如下：

步骤1：列出供需平衡表，画出实际交通示意图；

步骤2：在交通图上任意安排一个没有对流的初始调运方案。

步骤3：检查初始方案，如果该方案已满足“每个圈的内圈流向之长和外圈流向之长均不超过其半圈之长”（即“里圈和外圈，不过半圈长”），则该方案已达最优，进行步骤5，否则进行步骤4。

步骤4：调整流向之长超过半圈长的里圈或外圈，首先