电磁场问题的有限元解法

〔美〕M. V. K. 查利
〔加拿大〕P. P. 席尔凡斯特 主编

史 乃 唐任远 等 译
汤蕴璆 校

科 学 出 版 社

1 9 8 5

内 容 简 介

本书论述了电磁场和有限元法的基本理论，以及有限元法在求解电磁场问题中的应用。全书共十章，由美、英、法、意、加拿大等国十四名专家执笔，基本上反映了1980年以前在电机、变压器及其他电工装置内电磁场数值计算的最新成果。

各章均有其独立性，可供对不同专题具有兴趣的读者阅读；全书经编排，又具有一定的联系和系统性，可供对电磁场的有限元法的整个领域感兴趣的读者参考。

M. V. K. Chari, P. P. Silvester
FINITE ELEMENTS IN ELECTRICAL AND MAGNETIC FIELD PROBLEMS
John Wiley & Sons, Ltd, 1980

电磁场问题的有限元解法

〔美〕M. V. K. 查 利
〔加拿大〕P. P. 席尔凡斯特 主编
史 乃 唐任远 等 译
汤蕴璆 校
责任编辑 范铁夫

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年3月第 一 版　开本：787×1092 1/32
1985年3月第一次印刷　印张：8 3/8
印数：0001—7,000　字数：187,000

统一书号：15031·631
本社书号：3892·15—5

定价：2.00元

译 者 的 话

由 M. V. K. 查利和 P. P. 席尔凡斯特主编的这本专著具有下列特点：

（1）本书由美、英、法、意、加拿大等国的十四名专家执笔，基本上反映了 1980 年以前在电机、变压器及其他电工装置内电磁场数值计算的最新成果，为读者提供了稳态电磁场问题的有限元和积分方程解以及线性时变解的当前想法和研究工作的广阔图景；

（2）各章均具有其独立性，可供对不同专题具有兴趣的读者阅读；全书经编者编排，又具有一定的联系和系统性，可供对电磁场的有限元解法的整个领域感兴趣的读者参考；

（3）各章分别列出了有关领域内的主要参考文献，便于查阅。

参加本书翻译的有，史乃（前言、绪论、第八章至第十章以及索引）、唐任远（第五章至第七章）、吴海容（第一章）、姚有光（第二章）和丁康（第三、四章）。

全书由汤蕴璆教授审校、定稿。

由于我们水平有限，书中可能还有错误，请读者指正。

译者

1982年12月

参加编写的作者

M. V. K. Chari 博士　通用电气公司（美国）

Z. J. Csendes 博士　通用电气公司（美国）

A. L. Frisiani 教授　电工研究所（意大

R. H. Gallagher 教授　亚里桑那大学工　院（美国）

P. J. Lawrenson 教授　里兹大学电机工程系（英国）

B. H. McDonald 博士　加拿大原子能有限公司（加拿大）

T. J. E. Miller 博士　通用电气公司（美国）

G. Molinari 博士　吉诺大学电机工程系（意大利）

J. C. Sabonnadière 博士　国立工业大学（法国）

P. P. Silvester 博士　麦吉尔大学电机工程系（加拿大）

C. W. Trowbridge 博士　卢瑟福实验室（英国）

A. Viviani 博士　吉诺大学电机工程系（意大利）

A. Wexler 教授　曼尼托白大学电机工程系（加拿大）

O. C. Zienkiewicz 教授　斯温西大学土木工程系（英国）

前　言

从电学和磁学理论发展的早期开始，精确求解电机工程中的初值和边值问题，就已成为一个主要目标。直到六十年代为止，研究工作主要面向在边值问题的简化模型和与其有关的微分方程的基础上，求得闭式解析解和模拟解。

随着数字计算机的出现，象有限差分法、有限元法和积分方程法这样的数值解法得到了推广。然而，这些方法的发展和应用，过去是散见的，并且一般是针对具体问题的。虽然，自从第一篇论文发表以来已经过了近十五年，然而仍有许多问题没有得到答案，更多的问题则尚有待发现。

在吉诺大学的计算机辅助设计国际中心和《工程数值计算国际杂志》的共同支持下，1976年6月1～4日在意大利 Sta. Margherita 举行了一次电场和磁场问题数值方法的国际会议。会上征集的论文加上补充的三章，就形成了本书的基础。

本书为读者提供了稳态范围内电磁场问题的有限元和积分方程解以及线性时变解的当前想法和研究工作的广阔图景。

各章按三个基本类别编排，即引言和基本概念的发展，应用和先进技巧，特殊方法。下面稍为详细地作些介绍。

绪论一章综述了电机工程中发生的一些实际问题，这些问题可以表述为初值和边值问题。概括地说明了求解有关偏

微分方程的各种方法（解析法，模拟法和数值法），其范围从古典的分离变量法及其变形（罗斯和罗果夫斯基将其应用到变压器和电感线圈），保角变换法，导电纸测绘法，直到基于计算机计算的数值方法，例如有限差分和有限元法．简要地讨论了各种方法的优、缺点．

第一章阐述了有限元法的概念，讨论了它与其他已经确立的各种方法（例如有限差分法和边界积分法）相比较时的优、缺点．概括地介绍了由变分原理、加权积分表达式、拉格朗日乘子和罚函数、虚功原理以及其他方法所得到的各种有限元近似．叙述了用于二维和三维电场和磁场分析中的有限元近似的一般原理．还介绍了如何用有限元法和标量位来分析变压器内的磁场．

从本质上讲，电磁场是一个张量，它可以用不同的方法来描述．第二章中讨论了用有限元法分析时，场表示法的选择准则．首先，任何能用有限元基函数的线性组合来描述的场，应当是物理上可实现的．其次，描述方程应当导致一个泛函或射影解答，其中包含无源表面或材料交界面处所引起的自然边界条件．遗憾的是，至今还没有找到一个使人十分满意的单一的电磁场描述法．因此，巧妙地选择场的表示方法（对于每一类新的问题都不相同），是十分重要的，这样做可以达到简化和便于计算的目的．本章还综述了一些常用的场的表示法．

有限元法包括将整个场域剖分为许多子域或有限单元，并用一定数量的参数去逼近每个单元内的场．通常选用多项式展开式．在第三章中，综述了选择单元形状函数的各种方法，指出了选择的准则．还讨论了与有限元近似相关的多项式函数的性质．描述了能够构成具有曲线边界或扭歪边界单元的等参映射的概念．

第四章阐述了有限元分析中所要求的软件工程的各个方面。在一个典型的程序包中，数学软件仅占一小部分，大部分代码是用于问题定义和数据处理，程序流程次序的控制和误差检验，以及把解答进行后处理，使之成为适合于工程目的的形式。软件工程通过面向问题的方式与用户联系，以尽力保证程序包能达到预期的数学目的。在与经济使用计算机硬件系统相协调的情况下，软件工程力争保持合理的程序转用性和灵活性。这一章里还综述了硬件和软件设计当前的发展趋势，并建议未来的软件包应当设计成具有高度的模块性和标准化的文件结构。

第五章介绍了求解电机和电工装置内二维和三维电磁场的有限元法。讨论了用于线性和非线性问题的各种方法。所涉及的范围包括电机横截面和端区内的磁场，变压器，导电介质内的扩散问题和涡流分析，以及静电方面的应用。

过去常常认为只有害处的涡流，如今已经用于工业生产，例如感应加热，磁力推进，磁悬浮等。第六章中综述了在各种实际场合下，精确预计涡流的各种解析方法，包括用于有限区域的级数解（特征值问题）和用于无限扩展结构的级数解（傅里叶分析）。还讨论了利用正交函数法来分析三维问题。对于非线性问题，建议采用伽僚金射影法。结论是，对于一般的涡流问题，除了对每一个问题进行仔细分析之外，不存在单一的通用方法。

第七章概述了高阶多项式有限元法在电磁场计算中的应用。对于各种方法的发展，进行了简短的回顾，指出其构造动机，简述了其代数学方面的发展。描述了具体方法在计算实施方面所碰到的问题，还提供了用于电磁场的已经发表的高阶多项式有限元方面的参考文献。

第八章指出如何将快速傅里叶变换有效地用来求解暂态

扩散电磁场。重点放在用这种方法去求解实际的工程问题。此法之所以有效，是因为可以把场问题的空间和时间解答分开来处理。此法只需要算出一个单一的频率响应函数，然后对每一个时间函数均可重复用快速傅里叶变换求出其解答，从而得到最大的计算上的经济效果。

实践中碰到的许多问题，既不能用积分方程，又不能用微分方程单独、清楚地表述出来。对于这种情况，第九章提出了一个可能的解法：部分问题用积分形式、部分则用微分形式来处理。为使两部分解答匹配，在两组方程上加以相互约束，通常最好用变分法来求解。

第十章介绍了各种积分方程法。对于恒定磁场问题，详细地考察了三种表述：（a）导磁材料内磁场分布的直接解法；（b）基于标量位的方法；（c）利用由格林定理导出的积分方程，即所谓边界积分法（BIM）。对情况（a），给出了二维和三维非线性问题的结果，并与实测值进行了比较。用于计算机时，情况（b）、（c）这两种方法比情况（a）更为经济；对此给出了简单例子的初步结果。这一章还讨论了求解涡流问题的方法，介绍了基于向量位表述所得的计算结果。

在过去十年中，有限元技术已经对电磁场分析产生了巨大的影响，毫无疑问，今后仍将会这样。尽管早期的多数工作是研究标量、二维恒定场，但是本书各章清楚地指出了解决更为广泛的问题的途径。毫无疑问，今后十年内将会出现许多新的方法和新的问题。随着可以利用的计算资源迅速扩大所提供的机会，以及对其威力进一步了解所产生的动力，可以肯定，有限元法使用范围扩大的趋势将会继续下去。

借此机会，编者谨向那些在有限元领域内从事非常有益且范围宽广的研究的作者们表示谢意。编者还要向约翰·威

利父子有限公司的编辑人员表示感谢，他们提供了广泛的建议和协助。

M. V. K. 查利

P. P. 席尔凡斯特

1979年3月25日于

斯凯奈克塔多和蒙特利尔

目　　录

前言 …… iv
绪论（A. L. Frisiani, G. Molinari, A. Viviani）…… 1
第一章　有限元法——基本概念及对三维恒定磁场问题的应用（O. C. Zienkiewicz）…… 11
第二章　电场和磁场的基本方程（P. P. Silvester）…… 33
第三章　形状函数（R. H. Gallagher）…… 51
第四章　有限元的软件工程（P. P. Silvester）…… 72
第五章　电机和电工装置内电磁场问题的有限元解法（M. V. K. Chari）…… 93
第六章　涡流问题的数值分析（J. C. Sabonnadiére）…… 116
第七章　电磁场计算中的高阶多项式有限元法（Z. J. Csendes）…… 136
第八章　用离散傅里叶变换求扩散方程的暂态解（P. L. Lawrenson, T. J. E. Miller）…… 156
第九章　相互约束的电磁场偏微分和积分方程表述（B. H. McDonald, A. Wexler）…… 176
第十章　应用积分方程法求恒定磁场和涡流问题的数值解（C. W. Trowbridge）…… 210
参考文献 …… 235
中英名词索引 …… 248

绪　论

几乎在每一种工程应用中都会碰到数学物理的边值问题。例如，在结构分析、热传导、流体流动、电磁场等各个不同方面都会遇到；在所有的实际设计问题中，这些问题的确受到极大的注目。

在设计过程中，即使在最粗略的阶段，通过逐次假设和近似，设计师总是试图确定一些合适的边值问题，并寻求其可以接受的精确解答。

过去（现在也还是这样），设计中的问题只涉及较少的经济上和工艺上的困难，通常假设在不同的场之间，例如在电磁场与热场之间，互不发生作用。许多单一场的问题都是用近似方法求解的，求解时通常要求对其几何形状和所包含的材料作出相当的简化。这种多数是利用以前求出过解答的方法，例如利用均匀场解答所引出的集中参数法，特别在电机工程中获得了十分广泛的应用。

随着先进工艺的发展和许多工程系统的规模和价格的增长，需要相应发展出更为通用和精确的计算方法。无论是为了改进计算整体参数的精度，或是为了确定通常表示材料中临界应力条件的最大值的大小和位置，获得向量和张量场空间分布的更深入的知识，变得愈来愈重要。

最近十年，电力系统的容量，以及它们的规模和价值有了显著的增长。大约在十五年以前，汽轮发电机的最大容量还只有 200 兆伏安左右，而最近已生产出1000到1500兆伏安左右的电机，并且正在考虑设计更大容量的电机。同样，变

压器、电缆和其他许多电工装置的容量也增大了。

这种形势向工程师们提出了新的问题。例如，过去从运行系统的实验数据可以得到有价值的帮助；然而现在由于容量以及价格的增长，获得实验数据的可能性已大大减少。

另一方面，由于明显的经济上的理由，不能随着电工装置容量的增大而正比地增大其体积。因此，需要增强材料的应力，并为已经变化的需要采取新的设计准则。其后果是可能出现新的设计方案；例如，超导体已被建议用于电机和电缆。常有这样的情况，新的装置与以前的形状很不相同，因而老的计算方法变得不再适用。因此，提高理论性能推断的精度是十分必要的，特别是考虑到所涉及问题的几何形状和所用材料特性的复杂性。

例如，为了可靠地确定功率损耗和机电应力而进行电机的发热和机械设计，必须更好地了解电机内电流和磁场两者的空间和时间分布。但是，这可能要求把计算方法作进一步的推广，以使能把各向异性、饱和、磁性材料的磁滞、铁心的叠片结构、槽和气隙、导体和介电材料的空间分布、机座材料（它不能再被认为在电和磁的方面毫无作用）的影响等因素都考虑进去。此外，必须在时变条件下完成计算，而在计及材料的非线性或者外施电压或转矩的暂态条件时，随时间的变化通常是非正弦的。再者，通常认为整个电机是等温的这种假定已经不能被接受。这个假定使我们可以利用麦克斯韦方程和与温度无关的成分关系，把电场和磁场独立地处理。如果这一假定不再有效，则成分关系中就必须包括温度，这样麦克斯韦方程必须加上热场的方程　在确定介电材料中的电磁应力时也会出现类似的问题。

上述考虑适用于传统的大容量电机，例如变压器，汽轮发电机或凸极交流发电机。它们也同样适用于非传统形式的

电机以及其他电工设备，例如高压设备、强磁场磁铁、直流发电机和短时运行的电动机等。它们还能推广用于令人感兴趣的非传统电工装置，例如直线电动机、悬浮系统；也许还可以用于核聚变的特殊磁铁，磁流体发电机和储能器。在这些情况下，我们不得不处理许多这样的问题，它们的几何形状一般来说不适于用传统的方法来研究，因而需要别的有效的计算方法。

需要有效的计算方法的另一电工领域是电子学，特别在高频范围内。引起电子工业快速发展的半导体装置和集成电路的生产技术，为了解决半导体迁移方程中的一般形式的非线性问题，并且尽可能地计及二维和三维效应，也已提出了特殊的要求。其他类型的电子装置（例如，在波传播系统领域内的装置，或者存在等离子体或特殊材料时，比如装有压电体的电子装置）亦都需要新的计算方法。

上面列举的种种情况，在很大程度上影响着求解边值问题的计算方法的历史发展，并说明了这一领域内（特别是数值方法方面）当前感兴趣的问题和动态。

从麦克斯韦以来，求解边值问题的方法可以分为以下四种类型：模拟法、图解法、解析法和数值法。

模拟法是通过试验测试一个模拟场区来求待求场，模拟场和待求场具有同样的方程、边界和交界面。过去，这种方法一般仅用于二维或三维情况下的拉普拉斯方程。事实上，要用不同于实际问题中所用的介质去模拟非均质和非线性等情况，实际上是不可能的。此外，在其三维形式中（例如电解槽或电阻网络）这种方法相当肤浅和相当麻烦，而较为简便的形式（例如石墨纸或弹性薄膜）则仅限于二维场。

图解法很早以前就已应用，但是这种方法仅用于二维形式的拉普拉斯方程，因为通常它们是以解析函数的性质作为

基础（例如，参看莱曼法）。另外要注意的是，即便很细心地应用这种方法，其精度也是有限的。

当数值法尚处于初期阶段时，解析法得到了相当大的发展。这种方法（包括级数解法和保角变换法）至今仍然得到广泛的应用。其他正在流行的方法有积分方程法，变分表述法，或者用于不同问题的特定方法。最后一种方法，比如镜象法或倒量法，通常用于简单的几何形状和材料。在这种情况下，基于类似问题的已知解，可用观察法寻求解答，或者利用对称条件等。

级数解一般通过所谓分离变量法求得。这种方法主要用于二维或三维问题的拉普拉斯或亥姆霍兹方程，亦可用于时变问题，例如受扩散或波动方程所支配的问题。虽然这种方法可以认为比前述方法更为通用，但在涉及主要是有关边界和交界面条件的处理时，仍然受到严格的限制。实际上，这种方法的应用需要具备一个合适的坐标系，该坐标系必须满足以下两个条件：（1）每一个边界面或交界面必须与等坐标面相重合；（2）该坐标系必须能进行变量分离。在复杂的问题中，很少能够同时满足这两个条件。这种计算需要用到一些特殊函数（如贝塞尔函数，勒让德函数，椭圆函数），这些函数往往不太容易掌握。

分离变量法亦可用于非齐次方程，如泊松方程。在这种情况下，必须在对应齐次方程的通解上加上一个非齐次方程的特别积分，该特别积分通常可以通过体积分或面积分算出。然而，用解析法来进行这种积分计算，往往是很困难的；因而即使对于非常简单的几何形状，也采用了特殊方法来求解这类问题。这里，我们提出罗果夫斯基（Ragowski）法和罗斯（Roth）法，它们是用来求解变压器和电感线圈的磁场的。

用保角变换来求解场的问题是另一个早已广泛应用的解析方法。这种方法以解析复变函数的性质为基础，因此它仅能用于可以化成二维区域内拉普拉斯方程的问题。在这种区域内，保角变换法往往比级数法更有威力，因为在较为复杂的区域内，它能求得闭式解答。然而，为了避免复变函数积分所引起的困难，不得不对求解问题的几何形状予以严格限制。解析函数亦可以用来形成采用其他方法求解时需要用到的坐标变换，但是这种应用亦很有限。

上面对解析法作了简单介绍。这个命题是很广泛的，其内容包括推广和延伸上述方法的各种算法，即便是很费力的。解析法的主要缺点是缺乏普遍性。存在解析解、多少可以认为有点通用性的这类问题，都是最简单的一类；许多算法只适用于二维和稳态问题。此外，除了某些极为简单和特殊的问题之外，不均匀和非线性问题的算法实际上是不存在的。解析法的另一个值得注意的缺点是，为了求得场的解答需要花费一定的精力，例如寻求特殊的算法和技巧。

数值解在很大程度上避免了解析解的这些缺点，随着大型数字计算机的出现，数值解法已变得愈来愈引人注目。现在时兴的主要数值解法，可分为有限差分法、镜象法、积分方程法和变分表述。

约从 1940 年起，有限差分法实际上已广为应用，虽然更早可以追溯到高斯时代[1]。对于一维问题，早在 1868 年，莫尔（Mohr）[2]在求梁的挠度时所用的图解弦线多边形法，就是完整的有限差分法。最早应用于二维问题，是 1908 年由龙格作出的[3]。由有限差分法所得到的大型代数方程的解法，也同时得到了发展；这些发展是以高斯[4]、雅可比(Jacobi)[5]和赛得尔（Seidel)[6]的基本贡献，以理查森(Richardson)[7]和莱布曼（Liebmann)[8]在迭代法领域里的成

果，高斯[9]、杜里特（Doolittle）[10]和乔莱斯基（Choleski）[11]在直接法领域里的成就为基础的。

就象我们所看到的那样，数值法在得到广泛应用以前很久就已经有人在研究它，只是随着高速计算机的出现，它才得到了广泛的应用。

有限差分法的基本点是，用离散点（节点）所组成的网格来代替连续区域，仅在每个离散点上算出未知量。通过各种算法（例如用“差商”来近似代替导数和积分并作为各节点值的函数），把连续区域内所定义的方程以及边界和交界面条件转化为适用于各个节点处的离散方程。这可以利用诸如插值函数来完成，它们并不在特定的子区域内定义，而仅在节点的邻近定义。

传统上，网格采用规则的形式：比如矩形网格，此时节点位于各个正交直线的交点处；或者是极坐标网格，此时节点位于互相正交的圆和半径的交点处。这种使离散算法可以简化的限制并不是必需的。然而一般的曲线网格（或者不规则的网格，过去很少采用）并未获得成功，因而规则网格是目前实际上唯一采用的形式。因此，用有限差分法解许多问题时，遇到了很大的困难，它们的效能也受到很大的限制。除了其他次要因素之外，主要是由于网格与边界和交界面形状能否拟合这一几何上的原因。事实上，规则网格不太适合于场的变化十分剧烈的问题。在场梯度很大的区域内，网格应当较密，这就需要大量的节点，这样就会显著地增加计算时间和存储量；或者需要一种复杂的算法，以便按照需要来增加网格的密度。此外，规则网格也不适用于曲线边界或交界面，因为它们与网格线斜着相交，而不在节点处相交。在狄利克雷边界条件下，这并不成为问题，但在诺依曼边界条件或者在含有法向导数的交界面条件下，将造成不少困难。

这些情况需要有更高级的插值方法，这是很难用自动的形式实现的，并且使得由离散化所得到的代数方程组的解答复杂化。

尽管有这些不足之处，在1970年以前，在电机工程的数值方法这一领域内，有限差分法的传统形式实际上占有垄断地位。在任何情况下，它们均能导致有价值的结果。这里，我们不妨回想一下科罗拉多大学爱尔德莱（Erdelyi）小组的工作[12]，以及弗里茨（Fritz），缪勒（Müller）和窝尔夫（Wolff）在交流发电机和直流电机方面的工作[13]。

在镜象法和积分方程法领域内，提出了一些不同的方法，这些方法虽然较为优越，但仅限于用在特殊领域内。在镜象法领域内，这里我们要特别提到普林兹（Prinz）和辛格（Singer）小组的工作[14]。他们提出了电荷法，在该法中用算出镜象电荷值来模拟三维高压场。类似地，在积分方程领域内，我们要提到卢瑟福实验室的屈罗布里奇（Trowbridge）小组在计算磁铁的三维结构方面的工作。这两种方法看来主要面向三维非对称问题，在这方面，他们可以提供有意义的发展。

在其他工程领域，特别是在土木工程领域，在早期就已认识到传统有限差分法的缺陷，因而提出了一些替换的方法，例如变分方法。变分方法（它亦可以追溯到上一世纪）的发展导致了有限元法的现代形式；可以认为，在最近五十年内，变分方法已经完善化。实际上，“有限元法”这个名称是由克罗福（Clough）在1960年所发表的一篇论文[16]中首次提出的。

变分方法包括把边值问题的方程用一个称为“能量泛函”的变分表达式表述出来，在电工应用中，这个能量泛函常常与场的储能相一致。这个泛函的欧拉方程通常与原先的偏微